ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL I, 3 SECTIO F 1946

Z Zakladu Logiki Matematycznej i Podstaw Matematyki Wydziału Przyrodniczego Uniwersytetu M. C. S.
Kierownik: Doc. Dr Jerzy Słupecki

JERZY SŁUPECKI

Pełny Trójwartościowy Rachunek Zdań

Le calcul complet de propositions à trois valeurs logiques

W pracy tej będzie mowa o dwu różnych systemach trójwartościowego rachunku zdań [1]) *). Systemy te będą systemami pełnymi, to znaczy, że terminy pierwotne każdego z nich pozwalają zdefiniować wszystkie możliwe funktory rozważanego rachunku.

§ 1. W roku 1920 p. prof. J. Łukasiewicz zbudował trójwartościowy rachunek zdań oparty na jednym terminie dwuargumentowym i jednym terminie jednoargumentowym [2]). Funktory te posiadają szereg własności analogicznych do własności funktorów implikacji i negacji dwuwartościowego rachunku zdań. Z tego też względu oznacza je p. prof. J. Łukasiewicz tak samo jak funktory implikacji i negacji dwuwartościowego rachunku zdań, a więc odpowiednio literami *C* oraz *N*.

Zaznaczmy jeszcze, że dla funktora C trójwartościowego rachunku zdań określamy regułę odrywania analogicznie jak dla dwuwartościowej implikacji. Również reguła podstawiania, którą przyjmujemy w systemach trójwartościowego rachunku zdań, jest zupełnie analogiczna do reguły podstawiania, obowiązującej w systemach dwuwartościowego rachunku zdań.

Przy określaniu własności funkcji Cpq oraz Np zakładamy, że argumenty tych funkcji mogą przyjmować wartości 0, ½, 1. Niech x i y będą odpowiednio wartościami pierwszego i drugiego argumentu fukcji Cpq.

P. prof. J. Łukasiewicz określa własności funkcji Cpq przy pomocy dwu następujących warunków:

a) jeśli $x \leq y$, to $Cxy = 1$

b) jeśli $x > y$, to $Cxy = 1 - x + y$

*) Wszystkie odnośniki umieszczane są przy końcu pracy.

Niech teraz x oznacza wartość argumentu funkcji Np. Przyjmujemy, że:

c) $Nx = 1 - x$

Warunki a, b, c, możemy zanotować w postaci następującej tabelki interpretacyjnej:

I.

C	0	$^1/_2$	1	N
0	1	1	1	1
$^1/_2$	$^1/_2$	1	1	$^1/_2$
1	0	$^1/_2$	1	0

gdzie liczby, stojące na lewo od pierwszej kreski pionowej, są wartościami pierwszego argumentu funkcji Cpq oraz wartościami funkcji Np, liczby, stojące ponad kreską poziomą są wartościami drugiego argumentu funkcji Cpq, liczby, znajdujące się między kreskami pionowymi poniżej kreski poziomej (tę część tabelki nazywać będziemy częścią wewnętrzną), są odpowiednimi wartościami funkcji Cpq, wreszcie liczby, stojące na prawo od drugiej kreski pionowej, są wartościami funkcji Np.

P. prof. J. Łukasiewicz określa swój system (system ten nazywać będziemy dalej systemem S_3), w ten sposób, że zalicza do jego tez te i tylko te wyrażenia sensowne, które dla dowolnego układu wartości zmiennych, w wyrażeniach tych występujących, przyjmują zgodnie z tabelką interpretacyjną I wartość 1. Wartość tę nazywamy wartością wyróżnioną tabelki.

O wyrażeniach, które dla dowolnego układu wartości swych argumentów przyjmują wartość wyróżnioną pewnej tabelki, mówimy, że są spełnione przez tę tabelkę.

Wykażemy, że system S_3 nie jest systemem pełnym. W tym celu weźmy pod uwagę funkcję jednoargumentową, która dla każdej wartości argumentu przyjmuje wartość ½.

O funkcji tej (będziemy ją dalej oznaczali przez Tp) udowodnimy następujące twierdzenie:

T w i e r d z e n i e I.

Funkcja Tp nie może być zdefiniowana przy pomocy terminów C oraz N, o własnościach określonych przez tabelkę I.

D o w ó d:

Załóżmy, że istnieją wyrażenia sensowne rozważanego rachunku zdań, których wszystkie zmienne są tego samego kształtu i które dla przynajmniej jednej wartości argumentu różnej od ½ przyjmują wartość $^1/_2$. O wyrażeniach tych będziemy mówili, że posiadają własność φ. Wśród wyrażeń o własności φ, o ile wyrażenia takie istnieją, muszą być oczywiście takie (oznaczmy przez α dowolne z nich), że ilość liter, przy pomocy których wyrażenie α jest zapisane, jest nie większa od ilości liter, przy pomocy których zostało zapisane każde pozostałe wyrażenie o własności φ. Jasne jest, że wyrażenie α nie może być pojedynczą zmienną. Załóżmy, że wyrażenie α jest negacją pewnego wyrażenia β. Z własności funkcji *Np* wynika łatwo, że wyrażenie β posiadać musi własność φ, co jest jednak sprzeczne z założeniem dotyczącym wyrażenia α, gdyż wyrażenie β jest zapisane przy pomocy mniejszej ilości liter niż wyrażenie α. Załóżmy z kolei, że wyrażenie α jest okresem warunkowym, którego poprzednik oznaczony przez β następnik zaś przez γ. Z własności funkcji *Cpq* wynika znów, że bądź wyrażenie β bądź γ posiada własność φ co, jak łatwo widzieć, jest sprzeczne z uczynionymi założeniami. Widzimy więc, że założenie istnienia wyrażeń sensownych o własności φ prowadzi do sprzeczności.

Stąd łatwo już wynika prawdziwość naszego twierdzenia. Udowodnimy z kolei twierdzenie następujące:

T w i e r d z e n i e II.

Przy pomocy terminów *C*, *N*, oraz *T* można zdefiniować wszystkie funktory pełnego trójwartościowego rachunku zdań.

Dla dowodu naszego twierdzenia potrzebne nam będzie twierdzenie p. S. P i c a r d[3]). Twierdzenie to dla funkcji jednoargumentowych, określonych w zbiorze liczb 0, ½, 1, możemy sformułować w sposób następujący:

przy pomocy funkcji *Gp*, *Hp* oraz *Ip*, których własności określone są przez następujące związki:

$$GO = 1 \qquad G^1/_2 = 0 \qquad G1 = {}^1/_2$$
$$HO = {}^1/_2 \qquad H^1/_2 = 0 \qquad H1 = 1$$
$$IO = {}^1/_2 \qquad I^1/_2 = {}^1/_2 \qquad I1 = 1.$$

można zdefiniować każdą funkcję jednoargumentową, określoną w zbiorze liczb 0, ½, 1, i której wartościami są liczby tego zbioru.

Łatwo widzieć, że następujące trzy wyrażenia definiują odpowiednio funkcje *Gp*, *Hp* oraz *Ip*:

$$CCpTpCCNpTpNCNpTp$$
$$CCpTpCCNpTpNCpTp$$
$$CCpTpTp$$

Dalszą część naszego dowodu oprzemy na następującym twierdzeniu[4]):

System wielowartościowego rachunku zdań jest systemem pełnym, jeśli terminy pierwotne tego systemu pozwalają zdefiniować każdy jego funktor jednoargumentowy oraz gdy przynajmniej jeden termin pierwotny tego rachunku, będący funktorem dwuargumentowym, posiada tabelkę o następujących własnościach:

a) nie wszystkie wiersze wewnętrznej części rozważanej tabelki są ze sobą identyczne;

b) nie wszystkie kolumny wewnętrznej części rozważanej tabelki są ze sobą identyczne;

c) każda wartość, którą mogą przyjmować argumenty funktorów danego rachunku, występuje w części wewnętrznej rozważanej tabelki.

Zauważmy, że tabelka funktora C spełnia wszystkie powyższe warunki. Stąd oraz na podstawie części pierwszej dowodu wynika prawdziwość naszego twierdzenia.

Następująca tabelka interpretacyjna charakteryzuje łącznie własność funkcji Cpq, Np oraz Tp:

II.

C	0	$^1/_2$	1	N	T
0	1	1	1	1	$^1/_2$
$^1/_2$	$^1/_2$	1	1	$^1/_2$	$^1/_2$
1	0	$^1/_2$	1	1	$^2/_2$

przy czym liczby, stojące na lewo od pierwszej kreski pionowej, są wartościami argumentu funkcji Tp, liczby, stojące na prawo od ostatniej kreski pionowej, są odpowiednimi wartościami tej funkcji.

System, którego tezami są te i tylko te wyrażenia sensowne, które są spełnione przez tabelkę II, nazywać będziemy dalej systemem S'_3.

Możemy obecnie twierdzeniu II nadać postać:

T w i e r d z e n i e II'.

System S'_3 jest systemem pełnym.

Zauważmy jeszcze, że tabelka II jest tak zbudowana, że dla każdej wartości x związek $C1x = 1$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 1$. Stąd łatwo wynika, że każde wyrażenie sensowne, będące konsekwencją wyrażeń, spełnionych przez tabelkę II, jest również przez nią spełnione. Tabelki, posiadające powyższą własność, nazywamy dziedzicznymi.

W roku 1929 p. M. W a j s b e r g udowodnił następujące twierdzenie [5]):

Twierdzenie W a j s b e r g a:

Następujące cztery wyrażenia stanowią aksjomatykę systemu S_3:

1) $CqCpq$
2) $CCpqCCqrCpr$
3) $CCCpNppp$
4) $CCNqNpCpq$

T w i e r d z e n i e III.

Aksjomatami systemu S'_3 są wyrażenia 1—4 oraz dwa następujące wyrażenia:

5) $CTpNTp$

6) $CNTpTp$

Zauważmy przede wszystkim, że każde z wyrażeń 1—6 jest, jak łatwo sprawdzić, tezą systemu S'_3. Tezami więc tego systemu będą również wszystkie konsekwencje wyrażeń 1—6. Należy jeszcze udowodnić, że każda teza systemu S'_3 jest konsekwencją wyrażeń 1—6, co możemy uczynić, wzorując się na dowodzie twierdzenia W a j s b e r g a [6]), nieznacznie tylko uzupełniając ten dowód. Z tego też względu pominiemy stosunkowo długi dowód naszego twierdzenia.

Do dalszych rozważań nad systemem S'_3 potrzebna nam będzie następująca definicja:

Definicja I.

System rachunku zdań nazywamy zupełnym, jeśli każde jego wyrażenie sensowne, nie będące tezą, dołączone do tez systemu pozwala otrzymać w nim na podstawie przyjętych reguł wnioskowania wyrażenie, będące pojedynczą zmienną.

Zauważmy przede wszystkim, że system S_3 nie jest systemem zupełnym, gdyż wyrażenie

I $CCNppp$

zgodnie z tabelką interpretacyjną I dla wartości zmiennej p równej ½ przyjmuje wartość ½, nie jest więc tezą systemu S_3, dołączone zaś do tez tego systemu nie pozwala otrzymać w nim pojedynczej zmiennej, co wynika stąd, że wyrażenie I oraz wyrażenia 1—4 są tezami dwuwartościowego implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań, który jest systemem niesprzecznym.

Zachodzi natomiast twierdzenie następujące:

T w i e r d z e n i e IV.

System S'_3 jest systemem zupełnym.

D o w ó d:

Niech α będzie dowolnym wyrażeniem sensownym systemu S'_3, nie należącym jednak do tez tego systemu. Wtedy wyrażenie α dla pewnego układu wartości swych zmiennych (nazwijmy go układem U) przyjmie zgodnie z tabelką II wartość różną od 1. Podzielmy zmienne wyrażenia α na trzy grupy, zaliczając do grupy pierwszej te i tylko te zmienne, którym w układzie U odpowiada wartość 0, do grupy drugiej zmienne, którym w układzie U odpowiada wartość ½ i wreszcie do grupy trzeciej każdą zmienną, której w układzie U odpowiada wartość 1.

Podstawmy teraz w wyrażeniu α za każdą zmienną grupy pierwszej wyrażenie $NCpp$, grupy drugiej wyrażenie Tp oraz grupy trzeciej wyrażenie Cpp. Otrzymane w ten sposób wyrażenie oznaczmy przez α'. Łatwo widzieć, że w wyrażeniu tym występują wyłącznie zmienne kształtu p, przy czym dla każdej wartości tej zmiennej wyrażenie α' przyjmuje wartość różną od 1.

Z własności funkcji Cpq wynika, że wyrażenie

$$\text{II} \quad C\alpha' C\alpha' q$$

jest tezą systemu S'_3. Łatwo też widzieć, że wyrażenie q jest konsekwencją wyrażenia α i wyrażenia II. Stąd zaś wynika prawdziwość naszego twierdzenia.

Udowodnimy jeszcze niezależność każdego z aksjomatów 1—6 systemu S'_3 od wszystkich pozostałych. Uczynimy to metodą p. prof. J. Łukasiewicza. Metoda ta polega na budowaniu tabelek interpretacyjnych, nie spełniających aksjomatu, którego niezależność chcemy wykazać, spełniających natomiast wszystkie pozostałe aksjomaty. Tabelki te muszą być oczywiście dziedziczne.

Twierdzenie V.

Każdy z aksjomatów 1—6 systemu S'_3 jest niezależny od wszystkich pozostałych.

Dowód:

Nie będziemy przeprowadzali szczegółowego dowodu naszego twierdzenia, podamy tylko tabelki interpretacyjne, przy pomocy których można odpowiednio wykazać niezależność każdego z aksjomatów 1—6 od wszystkich pozostałych. Wartością wyróżnioną każdej z tych tabelek jest wartość 1.

T_1

C	0	1	N	T
0	1	0	0	0
1	0	1	1	1

T_2

C	0	$^1/_3$	$^2/_3$	1	N	T
0	1	$^1/_3$	1	1	0	0
$^1/_3$	1	1	1	1	1	0
$^2/_3$	1	1	1	1	1	0
1	$^2/_3$	$^2/_3$	$^2/_3$	1	$^1/_3$	0

T_3

C	0	$^1/_4$	$^2/_4$	$^3/_4$	1	N	T
0	1	1	1	1	1	1	$^2/_4$
$^1/_4$	$^3/_4$	1	1	1	1	$^3/_4$	$^2/_4$
$^2/_4$	$^2/_4$	$^3/_4$	1	1	1	$^2/_4$	$^2/_4$
$^3/_4$	$^1/_4$	$^2/_4$	$^3/_4$	1	1	$^1/_4$	$^2/_4$
1	0	$^1/_4$	$^2/_4$	$^3/_4$	1	0	$^2/_4$

T_4

C	0	1	N	T
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1

T_5

C	0	1	N	T
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1

T_6

C	0	1	N	T
0	1	1	1	0
1	0	1	0	0

§ 2. Weźmy pod uwagę następującą tabelkę interpretacyjną o wartości wyróżnionej 1:

III.

C	0	1/2	1	N
1	1	1	1	1
1/2	1	1	1	1
1	0	1/2	1	0

O tabelce tej, będącej, jak łatwo widzieć, tabelką dziedziczną, udowodnimy:

T w i e r d z e n i e VI.

Dowolne wyrażenie sensowne jest tezą dwuwartościowego implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełnione przez tabelkę interpretacyjną III.

D o w ó d:

Wykażemy przede wszystkim, że dowolna teza dwuwartościowego implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań (rachunek ten będziemy nazywali dalej systemem S_2) jest spełniona przez tabelkę III. W tym celu wystarczy sprawdzić, że aksjomaty systemu S_2, np. trzy następujące aksjomaty Ł u k a s i e w i c z a, są przez tę tabelkę spełnione:

7) $CCpqCCqrCpr$

8) $CCNppp$

9) $CpCNpq$

Załóżmy teraz, że istnieje wyrażenie sensowe α, nie będące tezą systemu S_2, spełnione przez tabelkę III. Wtedy, jak to wynika z zupełności systemu S_2, do konsekwencji wyrażeń 7—9 oraz α należy wyrażenie β, będące pojedynczą zmienną. Lecz wyrażenia 7—9 oraz α są spełnione przez tabelkę III, która, jak to było już zaznaczone, jest tabelką dziedziczną, wyrażenie zaś β nie jest oczywiście przez tę tabelkę spełnione. Widzimy więc, że założenie istnienia wyrażenia α, nie będącego tezą systemu S_2 i spełnionego przez tabelkę III, prowadzi do sprzeczności. Twierdzenie nasze zostało w ten sposób całkowicie udowodnione.

Zauważmy, że istnieje szereg trójwartościowych tabelek interpretacyjnych, dla których są prawdziwe twierdzenia analogiczne do twierdzenia VI.

Nasuwa się tu zagadnienie, sformułowane przez p. prof. J. Ł u k a s i e w i c z a, czy istnieje trójwartościowa tabelka interpretacyjna, określająca własności więcej niż dwu funktorów i spełniająca trzy następujące warunki:

a) dla dwu spośród funktorów, scharakteryzowanych przez tę tabelkę, zachodzi twierdzenie analogiczne do twierdzenia VI;

b) przy pomocy funktorów, scharakteryzowanych przez te tabelkę, można zdefiniować wszystkie możliwe funktory trójwartościowego rachunku zdań;

c) żaden z funktorów, scharakteryzowanych przez tę tabelkę, nie daje się zdefiniować przy pomocy wszystkich pozostałych.

Wykażemy, że następujące dwie tabelki interpretacyjne spełniają wszystkie te warunki:

IV

C	0	$^1/_2$	1	N	R
0	1	1	1	1	0
$^1/_2$	1	1	1	1	1
1	0	$^1/_2$	1	0	$^1/_2$

IV'

C'	0	$^1/_2$	1	N'	R'
0	1	1	1	1	1
$^1/_2$	1	1	1	1	$^1/_2$
1	0	$^1/_2$	1	$^1/_2$	0

Tabelki te są, jak łatwo widzieć, izomorficzne. Każdej więc własności przysługującej jednej z nich, odpowiada własność analogiczna, przysługująca tabelce drugiej [6]). Dla tego też w dalszych rozważaniach uwzględniać będziemy tylko tabelkę IV.

Umówmy się, nazywać systemem S''_3 system, którego tezami są te i tylko te wyrażenia sensowne, które są spełnione przez tabelkę IV, przy czym za wartość wyróżnioną tej tabelki przyjmujemy wartość 1.

Zauważmy przede wszystkim, że własności funkcji Cpq oraz Np, określone przez tabelkę III oraz tabelkę IV są identyczne. Stąd, oraz z twierdzenia VI wynika natychmiast, że tabelka IV posiada własność a).

Następujące twierdzenie wykaże nam, że tabelka IV posiada również własność b):

T w i e r d z e n i e VII.

System S''_3 jest systemem pełnym.

D o w ó d:

Zauważmy przede wszystkim, że następujące trzy wyrażenia definiują odpowiednio funkcje Gp. Hp oraz Ip, o których była mowa w dowodzie twierdzenia II:

$CCNRpNNpRNNp$

$CNpRNRp$

$CNpRCpp$

Dalsza część dowodu naszego twierdzenia jest zupełnie analogiczna do dowodu twierdzenia II.

O tym, że tabelka IV posiada również własność c) możemy łatwo się przekonać, rozumując podobnie jak przy dowodzie twierdzenia I.

Twierdzenie VIII.

Aksjomatami systemu S''_3 są wyrażenia 7—9 oraz sześć następujących wyrażeń:

10) $CRpNp$
11) $CRCpqRq$
12) $CpCRqRCpq$
13) $CRRpp$
14) $CpRRp$
15) $NRNp$

Zanim przystąpimy do dowodu tego twierdzenia musimy podać szereg definicji.

Definicja II.

Niech k oznacza dowolną liczbę naturalną.

Następnikiem rzędu k-tego danego okresu warunkowego α nazywamy:

a) w przypadku $k = 1$ następnik wyrażenia α

b) w przypadku $k > 1$ następnik wyrażenia β, będącego następnikiem rzędu $k - 1$ wyrażenia α.

Definicja III.

Następnikiem małym danego okresu warunkowego α, nazywamy wyrażenie sensowne [7]), nie będące okresem warunkowym i które dla pewnego naturalnego k jest następnikiem rzędu k-tego wyrażenia α.

Definicja IV.

Niech k oznacza dowolną liczbę naturalną.

Poprzednikiem rzędu k-tego danego okresu warunkowego α nazywamy:

a) w przypadku $k = 1$ poprzednik wyrażenia α

b) w przypadku $k > 1$ poprzednik wyrażenia β, będącego następnikiem rzędu k-1-go wyrażenia α.

Definicja V.

Poprzednikiem małym danego okresu warunkowego α nazywamy każde wyrażenie sensowne, będące dla pewnego naturalnego k poprzedkiem rzędu k-tego wyrażenia α.

Definicja VI.

Wyrażeniem prostym rzędu 1-go nazywamy każde wyrażenie kształtu $\alpha, N\alpha, NR\alpha, RN\alpha$ oraz $NRN\alpha$, przy czym α jest pojedyńczą zmienną.

Definicja VII.

Wyrażeniem prostym rzędu 2-go nazywamy dowolny okres warunkowy, którego każdy poprzednik mały oraz następnik mały jest wyrażeniem prostym rzędu 1-go.

Definicja VIII.

Wyrażeniem częściowo prostym rzędu 1-go nazywamy każde wyrażenie kształtu $R\alpha$ oraz $NR\alpha$ gdzie α jest dowolnym wyrażeniem sensownym, nie będącym pojedynczą zmienną.

Definicja IX.

Wyrażeniem częściowo prostym rzędu 2-go nazywamy każde wyrażenie, którego wszystkie poprzedniki małe oraz następnik mały są wyrażeniami prostymi bądź częściowo-prostymi rzędu 1-go.

Definicja X.

Wyrażenie sensowne α jest inferencyjnie równoważne wyrażeniom sensownym

$$\text{I.}\quad \beta_1, \beta_2 \ldots\ldots \beta_k$$

wtedy i tylko wtedy gdy wyrażenia

$$C\alpha\beta_i \; (i = 1, 2, \ldots\ldots k)$$

oraz wyrażenie

$$C\beta_1 C\beta_2 \ldots\ldots C\beta_k \alpha$$

są konsekwencjami wyrażeń 7—15.

Symbolicznie inferencyjną równoważność wyrażenia α oraz wyrażeń I notujemy w sposób następujący:

$$\alpha \sim \beta_1, \beta_2 \ldots\ldots \beta_k$$

Zaznaczamy, że określony stosunek wyrażeń sensownych jest stosunkiem przechodnim.

Definicja XI.

Dla każdego wyrażenia sensownego α, symbol $m(\alpha)$ oznacza liczbę naturalną równą ilością liter, przy pomocy których wyrażenie to jest zapisane.

Definicja XII.

Dla każdego okresu warunkowego α symbol $n(\alpha)$ oznacza liczbę naturalną równą ilości poprzedników małych, występujących w wyrażeniu α.

Dla dowolnego wyrażenia sensownego β, nie będącego okresem warunkowym, przyjmujemy, że $n(\beta) = 0$.

Definicja XIII.

Wyrażenie sensowne α jest prostsze od wyrażenia sensownego β wtedy i tylko wtedy, gdy bądź

$$m(\alpha) < m(\beta)$$

bądź

$$m(\alpha) = m(\beta) \text{ oraz } n(\alpha) > n(\beta)$$

Następujące pięć lemmatów są odpowiednikami twierdzeń z zakresu metodologii systemu S_2, przy czym każdy z nich wynika wyłącznie z własności funkcji Cpq oraz Np. Dlatego też pominiemy dowody tych lemmatów.

Lemmat I.

Dowolne wyrażenie sensowne α, nie będące wyrażeniem prostym rzędu 1-go lub 2-go ani też wyrażeniem częściowo prostym rzędu 1-go lub 2-go, jest inferencyjnie równoważne wyrażeniom, z których każde jest wyrażeniem prostym rzędu 1-go lub 2-go, bądź wyrażeniem częściowo prostym rzędu 1-go lub 2-go, przy czym wszystkie te wyrażenia są prostsze od wyrażenia α.

Lemmat II.

Jeśli α oraz β są dowolnymi wyrażeniami sensownymi i jeśli

$$\alpha \backsim \beta$$

przy czym wyrażenie β jest prostsze od wyrażenia α, to dowolny okres warunkowy φ, którego jeden z poprzedników małych, bądź następnik mały jest równokształtny z wyrażeniem α, jest inferencyjnie równoważny wyrażeniom prostszym.

Lemmat III.

Jeśli α, β oraz γ są dowolnymi wyrażeniami sensownymi, spełniającymi związki:

$$\alpha \backsim \beta, \gamma$$

oraz

$$m(\alpha) = m(\beta) + m(\gamma) + 1$$

to dowolny okres warunkowy φ, którego jeden z poprzedników małych bądź następnik mały, jest równokształtny z wyrażeniem α, jest inferencyjnie równoważny wyrażeniom prostszym.

Lemmat IV.*

Jeśli wyrażenie $N\alpha$ jest konsekwencją wyrażeń 7—15, wyrażenie zaś φ jest okresem warunkowym, którego dowolny poprzednik mały oznaczmy przez β, następnik zaś mały przez γ, to:

a) jeśli wyrażenie β jest równokształtne wyrażeniu $N\alpha$, to wyrażenie φ jest inferencyjnie równoważne wyrażeniu prostszemu;

b) jeśli wyrażenie β jest równokształtne wyrażeniu α, to wyrażenie φ jest konsekwencją wyrażeń 7—15;

c) jeśli wyrażenie γ jest równokształtne wyrażeniu $N\alpha$, to wyrażenie φ jest konsekwencją wyrażeń 7—15;

d) jeśli wyrażenie γ jest równokształtne wyrażeniu α, to wyrażenie φ jest inferencyjnie równoważne wyrażeniu prostszemu.

Lemmat V.

Jeśli α oraz $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$ są dowolnymi wyrażeniami sensownymi, wyrażenie zaś α bądź $C\beta_1\alpha$ bądź $C\beta_1 C\beta_2\alpha$ jest konsekwencją wyrażeń 7—15, to kosnekwencją tych wyrażeń jest również wyrażenie $C\beta_{i_1}C\beta_{i_2} \ldots C\beta_{1k}\alpha$ gdzie ciąg wskaźników $i_1, i_2 \ldots i_k$ jest dowolną permutacją liczb $1, 2 \ldots k$.

Lemmat VI.

Następujące wyrażenia sensowne są konsekwencjami wyrażeń 7—15:

16) *CRCpqp*

17) *CRNpq*

18) *CRpCpq*

19) *CNRCpqCpNRq*

20) *CCpNRqNRCpq*

21) *CNRRpNp*

22) *CNpNRRp*

23) *CpNRp*

Dowód:

Wszystkie podane w dowodzie wyrażenia sensowne, w których występują wyłącznie funktory kształtu **C** oraz *N* są, jak łatwo widzieć, tezami systemu S_2, a więc również konsekwencjami wyrażeń 7—15:

wyrażenie 16 wynika z wyrażeń 7, 10, *CNCpqp;*

wyrażenie 17 wynika z wyrażeń *CNpCpq*, 15;

wyrażenie 18 wynika z wyrażeń *CCpCqrCCspCsCqr*, *CNpCpq*, 10;

wyrażenie 19 wynika z wyrażeń *CCpCqrCNrCpNq*, 12;

wyrażenie 20 wynika z wyrażeń *CCrpCCrqCCpNqNr*, 16, 11;

wyrażenie 21 wynika z wyrażeń *CCpqCNqNp*, 14;

wyrażenie 22 wynika z wyrażeń *CCpqCNqNp*, 13;

wyrażenie 23 wynika z wyrażeń *CCpNqCqNp, 10.*

Lemmat VII.

Niech α oraz β będą dowolnymi wyrażeniami sensownymi; prawdziwe są następujące inferencyjne równoważności:

a) $RR\alpha \backsim \alpha$

b) $NRR\alpha \backsim N\alpha$

c) $RC\alpha\beta \backsim \alpha, R\beta$

d) $NRC\alpha\beta \backsim C\alpha NR\beta$

Dowód:

Prawdziwość każdej z tych równoważności wynika odpowiednio stąd, że następujące układy wyrażeń są konsekwencjami wyrażeń 7—15:

a) 13, 14;

b) 21, 22;

c) 16, 11, 12;

d) 19, 20.

Lemmat VIII.

Dowolna teza systemu S''_3, będąca wyrażeniem częściowo prostym rzędu 1-go, jest bądź konsekwencją wyrażeń 7—15, bądź jest inferencyjnie równoważna wyrażeniom prostszym, z których każde bądź jest wyrażeniem prostym rzędu 1-go lub 2-go, bądź wyrażeniem częściowo prostym rzędu 1-go lub 2-go.

D o w ó d:

Niech α oznacza dowolne wyrażenie sensowne, spełniające założenia naszego lemmatu. Wyrażenie α musi być wyrażeniem jednego z następujących kształtów:

a) $RR\,\beta$
b) $NRR\,\beta$
c) $RC\,\gamma\delta$
d) $NRC\,\gamma\delta$
e) $RN\,\beta$
f) $NRN\,\beta$

gdzie β, γ oraz δ są dowolnymi wyrażeniami sensownymi.

W przypadkach *a—d* lemmat nasz wynika z lemmatów VII i I oraz z przechodniości stosunku inferencyjnej równoważności.

W przypadku *e)* wyrażenie α, jak łatwo to wynika z własności funktorów R oraz N, określonych przez tabelkę IV, nie może być tezą systemu S''_3.

W przypadku *f*) wyrażenie α, jest konsekwencją wyrażeń 7—15, co wynika stąd, że wyrażenie $NRNp$ jest jednym z wyrażeń 7—15.

Lemmat IX.

Dowolna teza systemu S''_3, będąca wyrażeniem częściowo prostym rzędu 2-go jest bądź konsekwencją wyrażeń 7—15, bądź jest inferencyjnie równoważna wyrażeniom prostszym, z których każde bądź jest wyrażeniem prostym rzędu 1-go lub 2-go, bądź wyrażeniem częściowo prostym rzędu 1-go lub 2-go.

D o w ó d:

Niech φ oznacza dowolne wyrażenie sensowne, spełniające założenia naszego lemmatu, α zaś dowolny poprzednik mały bądź następnik mały wyrażenia φ, będący wyrażeniem częściowo-prostym rzędu 1-go. Dla wyrażenia α musimy uwzględnić te wszystkie przypadki, o których była mowa w dowodzie lemmatu poprzedniego:

w przypadkach *a—d* lemmat nasz wynika z lemmatów VII, II lub III oraz I;

w przypadkach *e*, *f* lemmat nasz wynika z lemmatów IV oraz I.

Możemy obecnie podać:

D o w ó d t w i e r d z e n i a VIII.

Zauważmy przede wszystkim, że każde z wyrażeń 7—15 jest, jak łatwo to sprawdzić, tezą systemu S''_3. Tezami tego systemu będą więc również wszystkie konsekwencje tych wyrażeń. Dla udowodnienia więc naszego twierdzenia wystarczy wykazać, że każda teza systemu S''_3, jest konsekwencją wyrażeń 7—15. Weźmiemy pod uwagę przede wszystkim wyrażenia proste rzędu 1-go i 2-go. Rozważania nasze możemy, oczywiście, ograniczyć do tych tylko wyrażeń prostych, w których występuje funktor R i które nie są podstawieniami tez systemu S_2. Niech α oznacza dowolne spośród tych wyrażeń. Łatwo widzieć, że α jest tezą systemu S''_3 wtedy i tylko wtedy, gdy występują w nim dwa poprzedniki małe, jeden kształtu β drugi $R\beta$ bądź poprzednik mały równokształtny z jednym z tych wyrażeń i następnik mały równokształtny z negacją pozostałego z tych wyrażeń, bądź jeden poprzednik mały kształtu $RN\beta$, bądź następnik mały kształtu $NRN\beta$ przy czym β jest pojedynczą zmienną. Lecz wtedy wyrażenie α jest na podstawie lemmatów IV, V oraz VI (teza 18, 17) i tego, że wyrażenia 10,15 zaliczyliśmy do aksjomatów systemu S''_3 konsekwencją wyrażeń 7—15.

Załóżmy teraz, że istnieje wyrażenie sensowne φ spełniające trzy następujące warunki:

a) wyrażenie φ jest tezą systemu S''_3;

b) wyrażenie φ nie jest konsekwencją wyrażeń 7—15;

c) wyrażenie φ jest wyrażeniem częściowo prostym rzędu 1-go lub 2-go.

Jeśli istnieją wyrażenia, spełniające wszystkie te trzy warunki, to na podstawie definicji XIII wnioskujemy, że wśród wyrażeń tych istnieć muszą takie wyrażenia (oznaczmy przez α dowolne z tych wyrażeń), że żadne pozostałe spośród wyrażeń, spełniających warunki a—c, nie jest prostsze od wyrażenia α. Na podstawie lemmatów VIII i IX wnioskujemy, że wyrażenie α jest inferencyjnie równoważne wyrażeniem

$$\text{I} \quad \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k,$$

z których każde, bądź jest wyrażeniem prostym rzędu 1-go lub 2-go, bądź wyrażeniem częściowo prostym rzędu 1-go lub 2-go, przy czym wszystkie te wyrażenia są prostsze od wyrażenia α.

Na podstawie definicji X oraz założenia, że wyrażenie α jest tezą systemu S''_3 wnioskujemy, że każde z wyrażeń I jest również tezą tego systemu oraz, że przynajmniej jedno z tych wyrażeń (oznaczmy je przez β) nie jest konsekwencją wyrażeń 7—15, w przeciwnym bowiem razie wyrażenie α musiało być wbrew założeniom, konsekwencją tych wyrażeń.

Zauważmy dalej, że wyrażenie β, w myśl pierwszej części naszego dowodu, nie może być wyrażeniem prostym rzędu 1-go lub 2-go.

Widzimy więc, że wśród wyrażeń I musi być przynajmniej jedno wyrażenie, spełniające wszystkie warunki *a—c*, przy czym, wyrażenie to jest prostsze od wyrażenia α, wniosek ten jest jednak sprzeczny z założeniem, dotyczącym tego wyrażenia. Widzimy więc, że żadne wyrażenie częściowo proste rzędu 1-go lub 2-go nie spełnia jednocześnie warunków *a* oraz *b*.

Niech teraz φ oznacza dowolną tezę systemu S''_3, nie będącą wyrażeniem prsotym rzędu 1-go lub 2-go, ani też wyrażeniem częściowo prostym rzędu 1-go lub 2-go.

W myśl lemmatu I wyrażenie φ jest inferencyjnie równoważne wyrażeniom

$$\text{II} \quad \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_k,$$

z których każde jest wyrażeniem prostym rzędu 1-go lub 2-go, bądź wyrażeniem częściowo prostym rzędu 1-go lub 2-go. Dowolne spośród wyrażeń II jest oczywiście tezą systemu S''_3; w myśl więc poprzednich części naszego dowodu, każde z tych wyrażeń jest konsekwencją wyrażeń 7—15. Stąd oraz na podstawie definicji X wnioskujemy, że wyrażenie φ jest również konsekwencją tych wyrażeń. Widzimy więc, że dowolna teza systemu S''_3, nie będąca wyrażeniem prostym rzędu 1-go lub 2-go, ani też wyrażeniem częściowo prostym rzędu 1-go lub 2-go, jest konsekwencją wyrażeń 7—15.

Dowód naszego twierdzenia został więc całkowicie przeprowadzony.

T w i e r d z e n i e IX.

System S''_3 jest systemem zupełnym.

Dowód tego twierdzenia analogiczny do dowodu twierdzenia IV pomijamy.

T w i e r d z e n i e X.

Każdy z aksjomatów 7—15 systemu S''_3 jest niezależny od pozostałych.

Podamy tabelki interpretacyjne, przy pomocy których można wykazać niezależność każdego z aksjomatów 7—15 od wszystkich pozostałych. Z wyjątkiem tabelki T_{10}, w której wartościami wyróżnionymi są wartości $^2/_3$ 1 wartością wyróżnioną każdej z tych tabelek jest wartość 1. Tabelki te są dziedziczne.

T_7

C	0	$^1/_5$	$^2/_5$	$^3/_5$	$^4/_5$	1	N	R
0	1	$^1/_5$	1	1	1	1	1	$^1/_5$
$^1/_5$	1	1	1	1	1	1	1	0
$^2/_5$	1	1	1	1	1	1	1	$^3/_5$
$^3/_5$	1	1	1	1	1	1	1	$^2/_5$
$^4/_5$	1	1	1	1	1	1	1	1
1	$^2/_5$	$^2/_5$	$^2/_5$	$^2/_5$	$^4/_5$	1	$^1/_5$	$^4/_5$

T_8

C	0	$^1/_3$	$^2/_3$	1	N	R
0	1	1	1	1	1	0
$^1/_3$	1	1	1	1	1	1
$^2/_3$	1	1	1	1	0	$^2/_3$
1	0	$^1/_3$	$^2/_3$	1	0	$^1/_3$

T_9

C	0	1	N	R
0	1	1	1	1
1	0	1	1	0

T_{10}

C	0	$^1/_3$	$^2/_3$	1	N	R
0	1	1	$^2/_3$	1	1	1
$^1/_3$	1	1	$^2/_3$	1	1	$^1/_3$
$^2/_3$	0	$^1/_3$	$^2/_3$	1	$^1/_3$	$^2/_3$
1	0	$^1/_3$	$^2/_3$	1	$^1/_3$	0

T_{11}

C	0	$^1/_3$	$^2/_3$	1	N	R
1	1	1	1	1	1	1
$^1/_3$	1	1	1	1	1	$^1/_3$
$^2/_3$	1	1	1	1	1	$^1/_3$
1	0	0	0	1	$^1/_3$	0

T_{12}

C	0	$^1/_2$	1	N	R
0	1	1	1	1	1
$^1/_2$	1	1	1	1	$^1/_2$
1	$^1/_2$	$^1/_2$	1	$^1/_2$	0

T_{13}

C	0	$^1/_2$	1	N	R
0	1	1	1	1	1
$^1/_2$	1	1	1	1	0
1	0	$^1/_2$	1	$^1/_2$	0

T_{14}

C	0	1	N	R
0	1	1	1	0
1	0	1	0	0

T_{15}

C	0	1	N	R
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0

Zwróćmy jeszcze uwagę na pewną charakterystyczną własność funkcji *Rp*:

wyrażenie następujące, które moglibyśmy nazwać prawem ekstensjonalności, nie jest tezą systemu S''_3

$$CCpqCCqpCRpRq.$$

Wyrażenie to bowiem dla wartości zmiennych ½, 0 przyjmuje, zgodnie z tabelką interpretacyjną IV, wartość 0, a więc wartość niewyróżnioną.

ODNOŚNIKI

[1]) Streszczenie wyników, dotyczących jednego z tych systemów, ukazało się w pracy: Jerzy Słupecki — Pełny trójwartościowy rachunek zdań; *Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie* XXIX, 1936, *Classe* III. Wyniki, dotyczące systemu drugiego referowałem w r. 1937 na posiedzeniu Seminarium Filozoficznego prowadzonego przez p. prof. J. Łukasiewicza.

[2]) O systemie tym Czytelnik może się dowiedzieć szczegółowiej z dwu następujących prac: J. Łukasiewicz, A. Tarski — *Untersuchungen über den Aussengenkalkül; Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie.* XXIII, 1930. *Classe* III. J. Łukasiewicz — *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls.* Tamże.

[3]) Twierdzenie to znajdzie Czytelnik w pracy: *Sur les fonctions définies dans les ensembles finis quelconques par* Sophie Piccard *(Neuchâtel). Fundamenta Mathematica,* t. XXIV. Warszawa 1935, str. 298—301.

[4]) Twierdzenie to znajdzie Czytelnik w pracy: Jerzy Słupecki — Kryterium pełności wielowartościowych systemów logiki zdań, *Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie,* XXXIII, 1939, *Classe* III.

[5]) M. Wajsberg — Aksjomatyzacja trójwartościowego rachunku zdań, *Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, XXIV, 1931, *Classe* III.

[6]) Można łatwo wykazać, że wśród tabelek trójwartościowych tylko tabelki IV i IV' spełniają jednocześnie warunki *a, b, c*.

[7]) Tu oraz w dalszych naszych rozważaniach będzie stale chodziło o wyrażenia sensowne systemu S''_3.

RESUME

Le calcul complet de propositions à trois valeurs logiques.

Il est question dans cet ouvrage de deux différents systèmes de calcul complet de propositions à trois valeurs logiques. Le résumé des conclusions se rapportant à l'un de ces systèmes a appartu dans l'ouvrage: Jerzy Słupecki,— *Der volle dreiwertige Aussagenkalkül;* Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettre de Varsovie XXIX, 1936, Classe III.

Je vais me bonher donc à résumer les conclusions de l'autre système. Ce système est déterminé par une matrice d'interprétation suivante, dont la valeur distinguée est 1.

C	0	1/2	1	N	R
0	1	1	1	1	0
1/2	1	1	1	1	1
1	0	1/2	1	0	1/2

C'est-à-dire une proposition est vraie dans ce système lorsqu'elle accomplit la matrice I.

Les axiomes del système sont:

1. *CCpqCCqrCpr*
2. *CCNppp*
3. *CpCNpq*
4. *CRpNp*
5. *CRCpqRq*
6. *CpCRqRCpq*
7. *CRRpp*
8. *CpRRp*
9. *NRNp*

Remarquons qu' aucun de ces axiomes n'est la conséquence de tous les autres. Remarquons ensuite que less axiomes 1—3 sont identiques aux axiomes du calcul de propositions à deux valeurs du prof. J. Łukasiewicz. En conséquence chaque these du calcul de propositions à deux valeurs est en même temps une thèse de notre système.

Notre système possède trois propriétés suivantes:

1) Chaque fonction possible peut être définie en termes de ce système, c'est-à-dire en termes *C, N, R* et les variables. (Autrement dit, le système est complet).

2) Une seule variable n'est pas une conséquence des axiomes (le système n'est pas contradictoire).

3) En ajoutant aux systèmes une proposition qui lui n'appartient pas en obtient parmi les conséquences une seule variable.