

Adam GÓRAL

**O estymacji funkcji spektralnej procesów autoregresyjnych**

Об оценивании спектральной функции авторегрессионных процессов

On the Estimations of the Spectral Function of Autoregressive Processes

UWAGI WSTĘPNE

Funkcja spektralna (widmowa) jest niewątpliwie jedną z najważniejszych charakterystyk słabo stacjonarnych procesów losowych, a wśród nich słabo stacjonarnych procesów autoregresyjnych. O szerokim praktycznym wykorzystaniu wymienionej funkcji decyduje możliwość dekompozycji na jej podstawie wariancji procesu na składowe odpowiadające różnym częstotliwościom. Pomimo iż problemom estymacji funkcji spektralnej procesów autoregresyjnych poświęcono wiele prac (np. [1], [4], [5]) wydaje się, że niektóre z tych problemów nie zostały jednoznacznie rozwiązane. Wymienić tutaj można zagadnienie wyznaczenia takiej długości szeregu czasowego, przy której estymatory widma można uznać za wiarygodne ze statystycznego punktu widzenia oraz problem wyboru rodzaju estymatora w przypadku, gdy nie jest znany rząd procesu autoregresyjnego. W pracy podjęta zostanie próba ustosunkowania się do drugiego z wymienionych powyżej problemów. Obok wyników badań symulacyjnych omówione zostaną również wybrane metody oceny rzędu procesów autoregresyjnych oraz metody estymacji funkcji spektralnej tych procesów.

ESTYMACJA PARAMETRÓW SŁABO STACJONARNYCH  
PROCESÓW AUTOREGRESYJNYCH

Założmy, że  $\{X_t; t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  oznacza słabo stacjonarny i ergodyczny proces losowy. Proces ten nazywamy procesem autoregresyjnym rzędu  $p$ , gdy tworzące go zmienne losowe  $X_t$  czynią zadość następującej równości:

$$X_t = \alpha_{p1}X_{t-1} + \alpha_{p2}X_{t-2} + \dots + \alpha_{pp}X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

gdzie

$\{\varepsilon_t; t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  — proces czysto losowy  
o wariancji  $\delta_\varepsilon^2$ ,

$\alpha_{p1}, \alpha_{p2}, \dots, \alpha_{pp}$  — parametry autoregresji.

Przyjmując, że

$$B^k X_t = X_{t-k}, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

wzór (1) możemy przedstawić w formie

$$F(B)X_t = \varepsilon_t, \quad (2)$$

gdzie

$$F(B) = 1 - \alpha_{p1}B - \alpha_{p2}B^2 - \dots - \alpha_{pp}B^p.$$

Słaba stacjonarność procesu AR(p) oznacza, iż pierwiastki równania charakterystycznego  $F(B) = 0$  leżą na zewnątrz okręgu o promieniu jednostkowym. Jak wiadomo przy charakterystyce słabo stacjonarnych procesów losowych operuje się często pojęciami funkcji autokowariancji i funkcji autokorelacji. Pierwsza z wymienionych wyżej funkcji definiowana jest w następujący sposób:

$$\gamma(\tau) = \text{cov}(X_t, X_{t+\tau}), \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

gdzie  $\gamma(0)$  oznacza wariancję procesu  $\{X_t\}$ .

Funkcja autokorelacji przedstawiana jest w formie:

$$\rho(\tau) = \gamma(\tau) / \gamma(0), \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

Estymacja parametrów ekonomicznych procesów losowych wymaga przyjęcia założenia o ich ergodyczności. Wynika to oczywiście z faktu, iż w przypadku tego typu procesów nie mamy najczęściej możliwości uzyskania ich wielu realizacji.

Niech  $\{x_t; t = 1, 2, \dots, n\}$  stanowi n elementową próbę pochodzącą z charakteryzującego się słabą stacjonarnością i ergodycznością procesu  $\{X_t; t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  o zerowej wartości oczekiwanej. W pracy [3] wykazano, że estymator funkcji  $\gamma(\tau)$  charakteryzujący się zgodnością, asymptotyczną nieobciążonością oraz najmniejszą wartością błędu średniokwadratowego wyraża się wzorem:

$$c(\tau) = n^{-1} \sum_{t=1}^{n-\tau} x_t x_{t+\tau}, \quad \tau = 0, 1, \dots, m \quad (5)$$

gdzie m ( $m \ll n$ ) oznacza punkt odcięcia funkcji autokowariancji.

Oceny funkcji autokorelacji wyznaczone są ze wzoru o postaci:

$$r(\tau) = c(\tau)/c(0). \quad \tau = 0, 1, \dots, m \quad (6)$$

Obok parametrów  $\gamma(\tau)$  i  $\varrho(\tau)$  cennych informacji o przebiegu procesów losowych dostarczają również parametry autoregresji. Oceny tych parametrów uzyskiwane są często poprzez rozwiązanie układu równań Yule'a-Walkera przedstawianego w następującej formie:

$$\underline{R}(p)\underline{a}(p) = \underline{r}(p), \quad p > 0 \quad (7)$$

gdzie

$$\underline{R}(p) = \begin{bmatrix} r(0)r(1) \dots r(p-1) \\ r(1)r(0) \dots r(p-2) \\ \vdots \\ r(p-1)r(p-2) \dots r(0) \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}(p) = [a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{pp}]^T,$$

$$\underline{r}(p) = [r(1), r(2), \dots, r(p)]^T.$$

W przypadku, gdy macierz  $R(p)$  jest nieosobliwa wartości wektora  $a(p)$  wyznaczone są na podstawie wzoru:

$$a(p) = R(p)^{-1}r(p). \quad (8)$$

Oceny Yule'a-Walkera wykorzystywane są najczęściej na etapie identyfikacji modeli autoregresyjnych. Znacznie lepszymi statystycznymi własnościami w porównaniu z ocenami  $a(p)$  uzyskanymi na podstawie wzoru (8) charakteryzują się oceny wyznaczone w oparciu o metodę Burga<sup>1</sup>. W metodzie tej oceny parametrów  $a_{pi}$ ;  $i = 1, 2, \dots, p$  otrzymywane są w wyniku rozwiązania następującego układu równań:

$$dS_{p+2}/da_{pp} = 0 \quad (9)$$

$$a_{p+1, j} = a_{pj} - a_{p+1, p+1} a_{p, p-j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (10)$$

gdzie

$$S_{p+1} = 2(n-p)^{-1} \sum_{t=1}^{n-p} [(x_t - a_{p1} x_{t-1} - \dots - a_{pp} x_{t-p})^2 + (x_{t-p} - a_{p1} x_{t-p+1} - \dots - a_{pp} x_t)^2].$$

<sup>1</sup> Opis tej metody można znaleźć między innymi w pracy [16].

W pracy [16] zwraca się uwagę na ścisły związek estymatorów Burga z estymatorami<sup>2</sup> uzyskiwanymi metodą największej wiarygodności<sup>2</sup>. W empirycznej części pracy wykorzystana zostanie metoda Burga.

#### AUTOMATYCZNE METODY OCENY RZĘDU PROCESÓW AUTOREGRESYJNYCH

Założmy, że parametry autoregresji  $\alpha_{p1}$ ,  $\alpha_{p2}$ , ...,  $\alpha_{pp}$  oszacowano w oparciu o próbę  $x_1, x_2, \dots, x_n$  na podstawie metody Burga. Model (1) można więc teraz przedstawić w postaci

$$x_t = a_{p1} x_{t-1} + \dots + a_{pp} x_{t-p} + e_t, \quad t = p + 1, p + 2, \dots, n \quad (11)$$

gdzie

$a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{pp}$  — oceny parametrów  $\alpha_{p1}, \alpha_{p2}, \dots, \alpha_{pp}$ ,

$e_t$  — składnik resztowy.

Jak wiadomo w procesie identyfikacji modeli ekonometrycznych szczególne znaczenie przypisywane jest wariancji składnika resztowego. W przypadku modeli autoregresyjnych rzędu  $p$  wariancja ta wyznaczana jest w oparciu o następujące wzory<sup>3</sup>

$$\bar{s}_p^2 = (n - 2p)^{-1} \sum_{t=p+1}^n (x_t - a_{p1} x_{t-1} - \dots - a_{pp} x_{t-p})^2 \quad (12)$$

lub

$$\bar{s}_p^2 = (n - p)^{-1} \sum_{t=p+1}^n (x_t - a_{p1} x_{t-1} - \dots - a_{pp} x_{t-p})^2,$$

J. Aniel [2] podkreśla, iż ocena rzędu procesu autoregresyjnego dokonywana jedynie na podstawie analizy zachowania funkcji  $s_k^2$  ( $k = 0, 1, \dots, k$ ) nie daje najlepszych rezultatów z tej prostej przyczyny, iż wzrostowi rzędu w modelu autoregresyjnym towarzyszy zmniejszanie się z większą lub mniejszą regularnością wartości  $s_k^2$  ( $k = 0, 1, \dots, k$ ). Wiadomo jednak, że zwiększanie liczby parametrów w modelu autoregresyjnym nie jest korzystne, gdyż prowadzi do problemów natury interpretacyjnej. Podstawę tzw. automatycznych metod doboru rzędu procesów autoregresyjnych stanowi funkcja, która z jednej strony uwzględnia wartości  $s_k^2$ , zaś z drugiej „łagodzi” zmniejszanie się tych wartości wraz ze wzrostem  $k$ . Wspomniana funkcja przedstawiana jest w następujący sposób:

<sup>2</sup> W pracy [7] podkreśla się, iż metoda największej wiarygodności daje najlepsze ze statystycznego punktu widzenia rezultaty.

<sup>3</sup> Zob. [2].

$$f(k) = s_k^2 [1 + h(k)], \quad k = 0, 1, \dots, k \quad (14)$$

gdzie  $h(k)$  jest pewną funkcją rosnącą „łagodzącą” zmniejszanie się wartości  $s_k^2$  wraz ze wzrostem  $k$ .

Idea oceny rzędu procesu autoregresyjnego polega na wybraniu takiej wartości,  $k$ , dla której  $f(k)$  ( $0 \leq k \leq K$ ) przyjmuje wartość minimalną, czyli

$$\check{p} = k \Leftrightarrow f(k) = \min_{0 \leq l \leq k} f(l) \quad (15)$$

gdzie  $\check{p}$  oznacza ocenę rzędu  $p$ .

Szeroką prezentację automatycznych metod doboru rzędu procesów autoregresyjnych zawarto w pracy [2].

W pracy [9], dokonano w oparciu o symulację komputerową porównania efektywności spotykanych w praktyce metod. Okazało się, iż najlepsze ze statystycznego punktu widzenia własności należy przypisać metodzie Schwarza i metodzie  $FPE_\alpha(k)$  z  $\alpha = 4$ . Podstawę pierwszej z wymienionych metod stanowi funkcja o postaci:

$$SR(k) = \ln s_k^2 + k \ln(n)/n. \quad (16)$$

Funkcję kryterium  $FPE_\alpha(k)$  wprowadzili R. J. Bhanshali i D. Y. Dow-nham [6]. Przedstawiana jest ona w następujący sposób:

$$FPE_\alpha(k) = s_k^2 (1 + \alpha k/n). \quad (17)$$

Ponieważ obydwie metody charakteryzują się podobną efektywnością, do dalszych badań zdecydowano się zastosować tylko jedną z nich, a mianowicie metodę Schwarza.

#### METODY ESTYMACJI FUNKCJI SPEKTRALNEJ PROCESÓW AUTOREGRESYJNYCH SKOŃCZONEGO RZĘDU

Obok funkcji autokowariancji i autokorelacji cenną charakterystyką słabo stacjonarnych procesów losowych jest również funkcja spektralna. Funkcja ta definiowana jest jako transformata Fouriera funkcji autokowariancji. W przypadku, gdy transformacie Fouriera poddawana jest funkcja autokorelacji otrzymywana jest funkcja gęstości widmowej. Wymienione powyżej funkcje przedstawiane są w następującej postaci:

$$W(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) e^{-i2\pi f\tau}, \quad f \in \langle -1/2, 1/2 \rangle \quad (18)$$

$$G(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-i2\pi f\tau}, \quad f \in \langle -1/2, 1/2 \rangle \quad (19)$$

gdzie  $f$  oznacza częstotliwość.

Jak wiadomo praktyczne walory funkcji widmowej wynikają głównie z faktu, iż wariancja  $\{X_t\}$  wyrażana jest w formie:

$$\gamma(0) = \int_{-1/2}^{1/2} W(f) df. \quad (20)$$

Rezultatem wzoru (20) jest często powtarzane w literaturze przedmiotu stwierdzenie, iż znajomość wartości funkcji spektralnej słabo stacjonarnego procesu losowego umożliwia dekompozycję całkowitej wariancji tego procesu na składowe odpowiadające poszczególnym częstotliwościom z przedziału  $\langle -1/2, 1/2 \rangle$ . Bezpośrednie zastosowanie wzoru (18) do estymacji funkcji spektralnej prowadzi do estymatora widma o postaci:

$$I(f) = \sum_{\tau=-m}^m c(\tau) e^{-i2\pi f\tau}, \quad f \in \langle -1/2, 1/2 \rangle \quad (21)$$

gdzie  $c(\tau)$  oznacza estymator funkcji  $\gamma(\tau)$ .

Estymator  $I(f)$  jest estymatorem niezgodnym. Zgodność estymatora widma uzyskiwana jest poprzez zastosowanie okien uśredniających oceny  $I(f)$ . Wśród wspomnianych okien na uwagę wydają się zasługiwać:

1. Okno Hanna

$$d(\tau) = \begin{cases} 1/2 [1 + \cos(\pi \tau/m)] & \tau = 0, 1, \dots, m \\ 0 & \tau > m \end{cases} \quad (22)$$

2. Okno Hamminga

$$d(\tau) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos(\pi \tau/m) & \tau = 0, 1, \dots, m \\ 0 & \tau > m \end{cases} \quad (23)$$

3. Okno Parzena

$$d(\tau) = \begin{cases} 1 - 6\tau^2/m^2(1 - \tau/m) & 0 \leq \tau \leq [m/2] \\ 2(1 - \tau/m)^3 & [m/2] + 1 \leq \tau \leq m \\ 0 & \tau > m \end{cases} \quad (24)$$

4. Okno Bartletta

$$d(\tau) = \begin{cases} 1 - \tau/m & 0 \leq \tau \leq m \\ 0 & \tau > m \end{cases} \quad (25)$$

Wykorzystywane w praktyce klasyczne estymatory widma przedstawiane są w postaci:

$$w_k(f_j) = c(0) + 2 \sum_{\tau=1}^m c(\tau) d(\tau) \cos(2\pi f_j \tau), \quad (26)$$

gdzie

$w_k(f_j)$  — wartość klasycznego estymatora widma w punkcie  $f_j$ ,

- $c(\tau)$  — ocena autokowariancji rzędu  $\tau$ ,  
 $d(\tau)$  — okno korelacyjne,  
 $f_j$  — częstotliwość, dla której wyznaczana jest ocena widma  
 $(f_j = j/2m; \quad j = 0, 1, \dots, m)$ .

Statystyczne własności estymatorów  $w_k(f_j)$  odpowiadających poszczególnym oknom omówiono m.in. w pracach [12] i [14]. Ciekawe uwagi odnośnie do okien uśredniających można znaleźć w [11] oraz [13]. Ważną klasę estymatorów funkcji spektralnej stanowią również estymatory autoregresyjne. Jeżeli przyjmiemy, że dysponujemy realizacją procesu autoregresyjnego rzędu  $p$  to autoregresyjny estymator widma będziemy mogli przedstawić w następujący sposób:

$$w_a(f) = s_p^2 / \left| 1 - \sum_{l=1}^p a_{pl} e^{-i2\pi fl} \right|^2 \quad (27)$$

gdzie:

- $s_p^2$  — wariancja resztowa w modelu autoregresyjnym rzędu  $p$ ,  
 $a_{pl}$  ( $l = 1, 2, \dots, p$ ) — oceny parametrów autoregresji w modelu AR( $p$ ).

K. N. Berk [5] wykazał zgodność autoregresyjnego estymatora widma przy założeniu, że  $p^3/n \rightarrow 0$  (gdzie  $n$  jest liczbą obserwacji w szeregu czasowym, na podstawie którego szacowane jest widmo). Jedno z twierdzeń podanych przez wymienionego powyżej autora głosi, że asymptotyczny rozkład autoregresyjnych estymatorów widma jest rozkładem normalnym.

Rozważając problemy estymacji funkcji spektralnej słabo stacjonarnych procesów losowych warto zwrócić uwagę, iż teoretycy dostarczają nam informacji odnośnie do asymptotycznych własności estymatorów. Długość szeregów czasowych, stanowiących podstawę badań praktycznych sprawia jednak, że nie zawsze uwagi teoretyczne można bezpośrednio wykorzystać. Powoduje to, iż pewne problemy z zakresu estymacji widma nie zostały dotychczas jednoznacznie rozstrzygnięte. Prace<sup>4</sup> Parzena i Kromera dowodzą, iż w przypadku, gdy znany jest rząd procesu autoregresyjnego, z którego pochodzi dany szereg czasowy autoregresyjne estymatory widma charakteryzują się lepszymi statystycznymi własnościami w porównaniu z estymatorami klasycznymi. Wiemy jednak, że w praktyce najczęściej zmuszeni jesteśmy poddawać ocenie rząd procesu, z którego pochodzi dany szereg czasowy. Żadna z metod, które do tego celu mogą być wykorzystane nie daje pełnej gwarancji wyboru rzeczywistej wartości tego rzędu. Powyższe uwagi wydają się świadczyć

<sup>4</sup> Informację tę przytoczono za pracą [5].

o konieczności podjęcia badań, które dałyby możliwość odpowiedzi na pytanie; czy automatyczny dobór rzędu procesu autoregresyjnego może spowodować, iż klasyczne estymatory widma okażą się efektywniejsze w porównaniu z autoregresyjnymi.

#### ANALIZA PORÓWNAWCZA AUTOREGRESYJNYCH I KLASYCZNYCH OCEN WIDMA

W tej części pracy porównana zostanie efektywność estymatorów autoregresyjnych widma z estymatorami klasycznymi w przypadku, gdy rząd procesu autoregresyjnego jest znany oraz gdy oceniany jest on w oparciu o automatyczną metodę Schwarza. Badania przeprowadzono na podstawie realizacji wybranych słabo stacjonarnych i ergodycznych procesów AR(1) oraz AR(2). Realizacje procesu AR(1) generowano zgodnie z następującą zależnością rekurencyjną:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varepsilon_1, \\ x_t &= \alpha_{11} x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (28)$$

gdzie  $\{\varepsilon_t; t = 1, 2, \dots, n\}$  oznacza ciąg liczb pseudolosowych z rozkładu  $N(0,1)$ .

Analizę przeprowadzono dla  $\alpha_{11} = 0,3$  i  $\alpha_{11} = 0,8$ . Do generowania ciągów liczb reprezentujących proces AR(2) wykorzystano zależności o postaci:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varepsilon_1, \\ x_2 &= \varepsilon_2, \\ x_t &= \alpha_{21} x_{t-1} + \alpha_{22} x_{t-2} + \varepsilon_t, \quad t = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (29)$$

gdzie  $\{\varepsilon_t; t = 1, 2, \dots, n\}$  oznacza ciąg liczb pseudolosowych z rozkładu  $N(0,1)$ .

Badania wykonano na podstawie realizacji AR(2) o parametrach  $\alpha_{21} = 0,4$  i  $\alpha_{22} = 0,45$ . Liczby pseudolosowe z rozkładu  $N(0,1)$  otrzymywano w wyniku zastosowania generatora wykorzystującego centralne twierdzenie graniczne. Opis wymienionego generatora zawarty jest w [17, s. 84]. Liczby pseudolosowe z rozkładu równomiernego, niezbędne do uzyskania liczb z rozkładu normalnego wyznaczono w oparciu o funkcję RANF(X), która jest funkcją standardową w systemie CYBER-72. W celu likwidacji efektu<sup>5</sup> wynikającego z przyjęcia warunków początkowych w sposób określony we wzorach (28) i (29), w każdej z wygenerowanych realizacji pomijano 200 pierwszych obserwacji. W pojedynczym eksperymencie wyróżnić można następujące etapy postępowania:

<sup>5</sup> Zagadnienie to zostało omówione przez G. S. Fishmana [8].



- 1) generowanie realizacji danego procesu losowego,
- 2) pominięcie 200 pierwszych obserwacji,
- 3) wyznaczenie teoretycznych wartości widma analizowanego procesu na podstawie wzoru (27) przy założeniu, że  $s_p^2$  oraz  $a_{pl}$ ;  $l = 1, 2, \dots, p$  zastąpiono teoretycznymi wartościami odpowiednich parametrów,
- 4) wyznaczenie autoregresyjnych ocen widma poprzez bezpośrednie zastosowanie wzoru (27),
- 5) obliczenie wartości łącznego błędu średniokwadratowego estymatora autoregresyjnego,
- 6) wyznaczenie ocen widma metodą standardową na podstawie wzoru (26) i przy wykorzystaniu wszystkich omówionych we wcześniejszych rozważaniach okien uśredniających,
- 7) obliczenie wartości łącznego błędu średniokwadratowego dla poszczególnych estymatorów klasycznych,
- 8) porównanie wartości łącznego błędu średniokwadratowego estymatora autoregresyjnego z błędami średniokwadratowymi estymatorów klasycznych,
- 9) 100-krotne powtórzenie czynności 1—8,
- 10) wyznaczenie wartości średnich i błędów średniokwadratowych wszystkich analizowanych estymatorów, dla każdej częstotliwości oddzielnie.

Niektóre z przedstawionych wyżej punktów wymagają rozwinięcia. W przypadku wyznaczania autoregresyjnych ocen widma eksperyment przeprowadzono przy założeniu, że rząd procesu jest znany bądź szacowany na podstawie metody Schwarza. W obydwu przypadkach wartości parametrów autoregresji obliczano na podstawie metody Burga.

Wartości łącznego błędu średniokwadratowego poszczególnych estymatorów uzyskiwano na podstawie wzorów:

$$bs_a = (m + 1)^{-1} \sum_{j=0}^m [w_a(f_j) - w_T(f_j)]^2 \quad (30)$$

$$bs_k = (m + 1)^{-1} \sum_{j=0}^m [w_k(f_j) - w_T(f_j)]^2, \quad (31)$$

gdzie:

$(m + 1)$  — liczba punktów estymacji widma,

$f_j = j/2m$  ( $j = 0, 1, \dots, m$ ) —  $j$ -ta częstotliwość,

$w_T(f_j)$  — wartość widma teoretycznego uzyskiwana na podstawie wzoru (27) przy założeniu, iż przyjęte zostaną w nim rzeczywiste wartości poszczególnych parametrów,

$w_a(f_j)$  — wartość autoregresyjnego estymatora widma,

$w_k(f_j)$  — wartość klasycznego estymatora widma.

W celu uzyskania większej przejrzystości wyników analizie poddano wartości średnie i błędy średniokwadratowe następujących statystyk:

$$z_a(f_j) = w_a(f_j)/w_T(f_j), \quad j = 0,1, \dots, m \quad (32)$$

$$z_k(f_j) = w_k(f_j)/w_T(f_j), \quad j = 0,1, \dots, m \quad (33)$$

gdzie oznaczenia są analogiczne do przyjętych poprzednio.

Oceny wymienionych parametrów wyznaczono na podstawie wzorów o postaci:

$$\bar{z}_a(f_j) = 100^{-1} \sum_{i=1}^{100} z_{ai}(f_j) \quad j = 0,1, \dots, m \quad (34)$$

$$\bar{z}_k(f_j) = 100^{-1} \sum_{i=1}^{100} z_{ki}(f_j), \quad j = 0,1, \dots, m \quad (35)$$

$$\hat{mse}[z_a(f_j)] = 100^{-1} \sum_{i=1}^{100} [z_{ai}(f_j) - 1]^2, \quad j = 0,1, \dots, m \quad (36)$$

$$\hat{mse}[z_k(f_j)] = 100^{-1} \sum_{i=1}^{100} [z_{ki}(f_j) - 1]^2, \quad j = 0,1, \dots, m \quad (37)$$

gdzie:

$z_{ai}(f_j)$  — wartość statystyki  $z_a(f_j)$  uzyskana w  $i$ -tym powtórzeniu eksperymentu,

$z_{ki}(f_j)$  — wartość statystyki  $z_k(f_j)$  uzyskana w  $i$ -tym powtórzeniu eksperymentu.

Eksperyment przeprowadzono dla różnej liczby punktów estymacji ( $m$ ) i w oparciu o realizacje o różnych długościach ( $n$ ).

Rezultaty omówionych badań prezentowane są w tabelach 1, 2, 3 i 4.

Liczby zawarte w trzech pierwszych tabelach określają, w ilu przypadkach na 100 powtórzeń eksperymentu estymatory autoregresyjne okazywały się „lepsze” (ze względu na wartość łącznego błędu średniokwadratowego) od estymatorów klasycznych.

Analiza uzyskanych wyników pozwala przecząco odpowiedzieć na postawione w pracy pytanie odnośnie do wpływu automatycznego doboru rzędu procesu autoregresyjnego na efektywność autoregresyjnych estymatorów widma w stosunku do estymatorów klasycznych.

Możemy wprawdzie zauważyć, że w wielu badanych przypadkach

Tab. 1. Porównanie autoregresyjnych i klasycznych estymatorów widma (AR(1) z  $\alpha_{11} = 0,3$ )A comparison of autoregressive and classical estimators of the spectrum (AR(1) with  $\alpha = 0,3$ )

Liczba obserwacji	Liczba punktów estymacji widma	Rodzaj estymatora autoregresyjnego	Nazwa estymatora klasycznego			
			Hann	Hamming	Bartlett	Parzen
50	11	estymator I <sup>a</sup>	69 <sup>c</sup>	70	58	44
		estymator II <sup>b</sup>	87	89	85	77
50	13	estymator I	79	81	67	58
		estymator II	92	94	90	83
50	17	estymator I	91	93	79	77
		estymator II	96	96	94	94
100	21	estymator I	96	99	94	90
		estymator II	98	99	96	95
100	26	estymator I	100	100	97	96
		estymator II	100	100	99	98
100	34	estymator I	100	100	100	100
		estymator II	100	100	100	100
200	21	estymator I	95	95	90	85
		estymator II	99	99	98	98
200	41	estymator I	100	100	100	100
		estymator II	100	100	100	100
300	31	estymator I	100	100	100	99
		estymator II	100	100	100	100
300	38	estymator I	100	100	100	100
		estymator II	100	100	100	100

<sup>a</sup> Estymator I oznacza estymator autoregresyjny, dla którego rząd procesu oceniano na podstawie metody Schwarza

<sup>b</sup> Estymator II oznacza estymator autoregresyjny, który nie wymagał oceny rzędu procesu (rząd był znany)

<sup>c</sup> Liczba ta oznacza, iż w 69 przypadkach (na 100) estymator autoregresyjny typu I okazał się lepszy (w sensie wartości łącznego błędu średniowadratowego) od estymatora klasycznego wykorzystującego okno Hanna.

Źródło: obliczenia własne.

automatyczny dobór rzędu procesu autoregresyjnego powodował, że estymatory klasyczne okazywały się „lepsze” od autoregresyjnych dla większej liczby eksperymentów, niż to miało miejsce w sytuacji, gdy rząd procesu był znany, lecz wyniki uzyskane w obydwu rozważanych przy-

Tab. 2. Porównanie autoregresyjnych i klasycznych estymatorów widma  
(AR(1) z  $\alpha_{11} = 0,8$ )  
A comparison of autoregressive and classical estimators of the spectrum  
(AR(1) with  $\alpha_{11} = 0,8$ )

Liczba obserwacji	Liczba punktów estymacji widma	Rodzaj estymatora autoregresyjnego	Nazwa estymatora klasycznego			
			Hann	Hamming	Bartlett	Parzen
50	11	estymator I <sup>a</sup>	74 <sup>c</sup>	74	76	79
		estymator II <sup>b</sup>	76	75	79	81
50	13	estymator I	70	70	74	76
		estymator II	73	75	79	79
50	17	estymator I	69	71	73	70
		estymator II	70	70	76	75
100	21	estymator I	64	63	75	71
		estymator II	63	65	76	71
100	26	estymator I	68	69	76	68
		estymator II	68	70	77	69
100	34	estymator I	70	75	76	68
		estymator II	79	82	81	69
200	21	estymator I	68	69	75	77
		estymator II	70	72	74	72
200	41	estymator I	83	84	80	73
		estymator II	86	87	85	77
300	31	estymator I	74	76	77	69
		estymator II	77	81	77	72
300	38	estymator I	86	86	80	71
		estymator II	85	86	82	75

a, b, c — oznaczenia analogiczne do podanych w tablicy 1.

Źródło: obliczenia własne.

padkach nie różniły się od siebie istotnie. Wyjątkowe w stosunku do powyższych uwag były wyniki uzyskane na podstawie realizacji procesu AR(1) z  $\alpha_{11} = 0,3$ . Okazało się bowiem, iż dla małych prób ( $n = 50$ ) automatyczny dobór rzędu procesu autoregresyjnego spowodował, że dla  $m = 10$  klasyczny estymator widma wykorzystujący okno Parzena był „lepszy” od estymatora autoregresyjnego w 56 powtórzeniach eksperymentu. Sytuację tę można wytłumaczyć, jeżeli uwzględni się wyniki badań dotyczących efektywności metody Schwarz’a<sup>9</sup>. Warto również pod-

<sup>9</sup> Zob. [9].

Tab. 3. Porównanie autoregresyjnych i klasycznych estymatorów widma  
(AR/2,  $\alpha_{21} = 0,4$ ;  $\alpha_{22} = 0,45$ )

A comparison of autoregressive and classical estimators of the spectrum  
(AR/2,  $\alpha_{21} = 0,4$ ;  $\alpha_{22} = 0,45$ )

Liczba obserwacji	Liczba punktów estymacji widma	Rodzaj autoregresyjnego estymatora	Nazwa estymatora klasycznego			
			Hann	Hamming	Bartlett	Parzen
50	11	estymator I <sup>a</sup>	83 <sup>c</sup>	83	85	85
		estymator II <sup>b</sup>	85	84	85	87
50	13	estymator I	81	78	83	85
		estymator II	83	80	84	87
50	17	estymator I	75	75	80	81
		estymator II	77	78	81	84
100	21	estymator I	77	73	83	85
		estymator II	82	81	86	88
100	26	estymator I	72	73	79	79
		estymator II	78	78	85	85
100	34	estymator I	72	73	77	73
		estymator II	78	78	79	81
200	21	estymator I	80	80	80	84
		estymator II	81	81	81	82
200	41	estymator I	76	76	76	77
		estymator II	75	77	78	78
300	31	estymator I	81	77	81	85
		estymator II	80	79	84	84
300	38	estymator I	72	69	78	82
		estymator II	75	74	82	82

a, b, c — oznaczenia analogiczne do podanych w tabelicy 1.

Źródło: obliczenia własne.

kreślić, iż w omawianym przypadku dla prób o liczebności  $n = 100, 200, 300$  autoregresyjne estymatory widma okazywały się lepsze od estymatorów klasycznych we wszystkich 100 powtórzeniach eksperymentu zarówno w sytuacji, gdy rząd był znany, jak i w sytuacji, gdy był on oceniany na podstawie metody automatycznej. Zawartość wszystkich czterech tabel wyraźnie wskazuje, iż estymatory autoregresyjne charakteryzują się lepszymi statystycznymi własnościami w porównaniu z estymatorami klasycznymi. Należy zaznaczyć, że autoregresyjne estymatory

Tab. 4. Wartości średnie i błędy średniokwadratowe estymatorów widma wybran  
The mean values and mean square errors of the estimators of the spectrum of the

$f_j$	Proces AR (1) $\alpha_{11} = 0,3$						$\bar{z}_{a1}$	$mse_{a1}$
	$\bar{z}_{a1}^a$	$mse_{a1}^b$	$\bar{z}_{a2}^c$	$mse_{a2}$	$\bar{z}_k^d$	$mse_k$		
0	1,024	0,089	1,020	0,054	0,953	0,089	1,006	0,186
1/40	1,017	0,078	0,018	0,051	0,981	0,070	0,961	0,071
2/40	1,002	0,054	1,012	0,043	1,022	0,067	0,974	0,034
3/40	0,991	0,035	1,004	0,034	1,030	0,071	1,000	0,034
4/40	0,990	0,026	0,997	0,026	1,012	0,064	1,015	0,039
5/40	0,998	0,030	0,992	0,020	0,982	0,056	1,020	0,038
6/40	1,005	0,037	0,989	0,015	0,964	0,049	1,018	0,032
7/40	1,004	0,036	0,987	0,012	0,975	0,042	1,013	0,026
8/40	1,001	0,034	0,986	0,011	1,004	0,042	1,007	0,020
9/40	0,995	0,031	0,986	0,011	1,017	0,053	1,001	0,015
10/40	0,990	0,027	0,987	0,010	1,005	0,062	0,996	0,013
11/40	0,985	0,023	0,988	0,011	1,000	0,057	0,993	0,011
12/40	0,982	0,020	0,990	0,012	1,002	0,051	0,990	0,012
13/40	0,980	0,018	0,991	0,013	1,000	0,051	0,988	0,013
14/40	0,981	0,017	0,992	0,014	1,008	0,065	0,987	0,014
15/40	0,983	0,018	0,993	0,014	1,006	0,061	0,987	0,017
16/40	0,988	0,020	0,994	0,015	0,990	0,043	0,987	0,019
17/40	0,994	0,025	0,995	0,016	0,993	0,047	0,988	0,022
18/40	0,999	0,029	0,995	0,016	1,002	0,045	0,989	0,024
19/40	1,003	0,033	0,996	0,016	0,987	0,056	0,989	0,025
20/40	1,004	0,034	0,996	0,016	0,973	0,085	0,989	0,026

a — średnia wartość statystyki  $z_a(f_j)$  przy założeniu, że estymator autoregresyjny

b — mse oznacza wartość średniokwadratową odpowiedniego estymatora,

c — średnia wartość estymatora autoregresyjnego przy założeniu, że rząd procesu

d — średnia wartość wybranego (najlepszego w danym przypadku) estymatora  $k_l$   
Źródło: obliczenia własne.

widma charakteryzowały się niską obciążonością i niewielkimi wartościami błędów średniokwadratowych nawet w przypadku realizacji o 50 elementach (ze względu na ograniczoną liczbę wyników te nie są prezentowane).

#### ZAKOŃCZENIE

Omówione w pracy badania symulacyjne upoważniają do sformułowania następujących wniosków:

1) autoregresyjne estymatory widma charakteryzują się „lepszymi”

ych procesów autoregresyjnych ( $n = 200$ ,  $m = 20$ )  
 autoregressive processes ( $n = 200$ ,  $m = 20$ )

Proces AR (1) $\alpha_{11} = 0,8$				Proces AR (2) $\alpha_{21} = 0,4; \alpha_{22} = 0,45$					
$\bar{z}_{a2}$	$mse_{a2}$	$\bar{z}^k$	$mse_{ak}$	$\bar{z}^{a1}$	$mse_{a1}$	$\bar{z}_{a2}$	$mse_{a2}$	$\bar{z}_k$	$mse_k$
1,013	0,172	0,766	0,148	0,925	0,318	0,940	0,297	0,537	0,276
0,973	0,068	0,969	0,090	0,934	0,057	0,926	0,049	1,230	0,257
0,969	0,025	1,192	0,157	1,004	0,036	0,980	0,023	1,488	0,416
0,978	0,014	1,155	0,148	1,029	0,036	1,003	0,022	1,193	0,177
0,986	0,011	1,102	0,129	1,034	0,036	1,013	0,023	1,127	0,146
0,991	0,011	1,028	0,089	1,029	0,033	1,018	0,024	1,023	0,089
0,994	0,010	0,978	0,071	1,021	0,029	1,019	0,024	0,977	0,067
0,996	0,010	0,977	0,059	1,012	0,026	1,019	0,023	0,969	0,060
0,998	0,010	1,016	0,062	1,004	0,024	1,013	0,022	1,015	0,065
0,999	0,011	1,032	0,077	0,998	0,024	1,016	0,020	1,026	0,078
1,000	0,011	0,997	0,091	0,994	0,026	1,013	0,018	0,995	0,090
1,000	0,011	0,996	0,077	0,991	0,028	1,009	0,016	1,001	0,075
1,001	0,011	1,004	0,066	0,990	0,030	1,005	0,013	1,009	0,068
1,001	0,011	0,992	0,069	0,991	0,033	0,999	0,011	0,995	0,068
1,001	0,011	1,016	0,096	0,990	0,037	0,993	0,010	1,021	0,100
1,001	0,011	1,013	0,085	0,987	0,040	0,987	0,011	1,010	0,081
1,001	0,011	0,973	0,059	0,977	0,032	0,982	0,014	0,980	0,059
1,002	0,011	0,987	0,068	0,968	0,024	0,980	0,021	0,995	0,069
1,002	0,011	1,013	0,065	0,975	0,034	0,982	0,032	1,006	0,062
1,002	0,011	0,984	0,067	0,999	0,062	0,987	0,045	0,963	0,066
1,002	0,011	0,952	0,127	1,016	0,086	0,990	0,052	0,926	0,121

wymaga szacowania rzędu procesu

jest znany,  
 asychnego,

statystycznymi własnościami w porównaniu z estymatorami klasycznymi bez względu na to, czy rząd procesu jest znany, czy też oceniamy go na podstawie efektywnej metody automatycznej,

2) estymatory autoregresyjne charakteryzują się niską obciążonością i wysoką efektywnością nawet w przypadku, gdy ich wartości wyznaczone są na podstawie szeregów czasowych o długości 50 elementów.

Na zakończenie należy dodać, iż badania przedstawione w niniejszej pracy przeprowadzone zostały w oparciu o programy komputerowe napisane przez autora.

## LITERATURA

1. Akaike H., A New Look at the Statistical Model Identification, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-19, nr 6, s. 716—722 (1974).
2. Andel J., Fitting models in time series analysis, Math. Oper. Stat., vol. 13, nr 1, s. 121—143 (1982).
3. Anderson T. W., The Statistical Analysis of Time Series, Wiley, New York 1971.
4. Beamish N., Priestley M. B., A study of autoregressive and window spectral estimation, Appl. Stat., vol. 30, nr 1, s. 41—58 (1981).
5. Berk K. N., Consistent autoregressive spectral estimates, The Annals of Statistics, vol. 2, nr 3, s. 489—502 (1974).
6. Bhansali R. J., Downham D. Y., Some properties of the order of an autoregressive model selected by a generalization of Akaike's FPE criterion, Biometrika, vol. 64, s. 547—551 (1977).
7. Box G. E. P., Jenkins G. M., Time Series Analysis, Holden Day, San Francisco 1976.
8. Fishman G. S., Symulacja komputerowa. Pojęcia i metody, PWE, Warszawa 1981.
9. Góral A., Symulacyjne badania statystycznych własności wybranych metod doboru rzędu w modelach autoregresyjnych, praca w recenzji.
10. Hannan E. J., Time Series Analysis, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC — 19, nr 6, s. 706—715 (1974).
11. Jakubczyc J., Kryteria doboru okien korelacyjnych w analizie widmowej, „Przeгляд Statystyczny”, 26. 1/2 (1984).
12. Jenkins G. M., General Considerations in the Analysis of Spectra, Technometrics, vol. 3, nr 2 (1961).
13. Otnes R. K., Enochson L., Analiza numeryczna szeregów czasowych, WNT, Warszawa 1978.
14. Parzen E., Mathematical Considerations in the Analysis of Spectra, Technometrics, vol. 3, nr 2 (1961).
15. Parzen E., Some Recent Advances in Time Series Modelling, IEEE Transactions On Automatic Control, vol. AC — 19, nr 6 (1974).
16. Urych T. J., Bishop T. N., Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition, Reviews of Geophysics and Space Physics, vol. 13, nr 1, s. 183—200 (1975).
17. Zieliński R., Generatory liczb losowych, WNT, Warszawa 1979.

## РЕЗЮМЕ

Предпринята попытка проверки гипотезы, гласящей: автоматический подбор ряда авторегрессионного процесса так влияет на значения авторегрессионных оценок спектра, что они становятся „хуже” (в смысле значения средней квадратической ошибки) классических оценок. Верификация этой гипотезы была проведена на основе моделирующих исследований, опираясь на реализацию слабостационарных и эргодических процессов AR (1) и AR (2). Рассмотрена также идея автоматических методов подбора ряда авторегрессионного процесса и процедура оценки параметров авторегрессии, предложенная Бургом.



### SUMMARY

The work undertook an attempt to verify the hypothesis that automatic choice of the order of the autoregressive process has such an influence on the autoregressive values of the estimators of the spectrum that, they become "worse" (in the sense of the value of mean-square error) than classical estimators. Verification of the above hypothesis was made on the basis of simulation investigations, on the basis of the realization of weakly stationary, and ergodic processes AR (1) and AR (2). The work also discussed the idea of automatic methods of choosing the order of the autoregressive process and the procedure of estimating the parameters of autoregression as suggested by Burg.

