ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. IV, 1 SECTIO AA 1949

Zakład Fizyki Doświadczalnej Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego U. M. C. S.
Kierownik Zakładu: prof. dr St. Ziemecki

Armin TESKE

Ruchy Browna ciał promieniotwórczych
Brownian Movement of Radioactive Particles

Wstęp

Zawiesina ciała promieniotwórczego otrzymuje impulsy nie tylko ze strony molekuł otaczającego ją ośrodka; drugim ich źródłem jest radioaktywność zawiesiny. Emitowana cząstka, np. alfa, wywrze jakościowo taki sam skutek jak uderzająca molekuła. Poza zwykłym ruchem Browna ziarnko zawiesiny wykona jeszcze drugi, podobny; będzie on również wynikiem niezliczonej ilości uderzeń i ich fluktuacji, również „brownowski". W jakich warunkach ruch ten mógłby być obserwowany, nie będąc przesłonięty przez zwykły ruch Browna?

Przedmiot ten — o ile widać z literatury — nie był dotychczas poruszany*). Być może powodem tego było przekonanie, że wielkości,

*) O doświadczeniach wiążących teorię kinetyczną gazów i zjawiska radioaktywne myśleli np. The Svedberg i Smoluchowski; chodziło o spontaniczne wahania gęstości, których wskaźnikiem mogłaby być domieszka substancji promieniotwórczej. Por. M. Smoluchowski, Phys. Zeitschr. 13, 1069, 1912, w szczególności str. 1074, 1075; The Svedberg, Arkiv f. Kemi, Mineral, och Geol. Upsala, 4, Nr 22, 1911, Phys. Zeitschr. 14, 22, 1913 i 15, 512, 1914.

które można by wyznaczyć, gdyby się udało zmierzyć przesunięcie ziarnka zawiesiny wywołane tylko przez jego radioaktywność, jak okres rozpadu, energia wyrzucanych cząstek, byłyby już skądinąd znane z większą dokładnością — taką bowiem jest, a zwłaszcza była, sytuacja, jeżeli chodzi o zwykłe ruchy Browna. Słynne pomiary Perrin'a dały na liczbę Avogadry $7{,}15 \cdot 10^{23}$ [1]; wynik ten był pięknym potwierdzeniem wzoru Einsteina, lecz nie poprawił naszej znajomości liczby Avogadry.

Niemniej jednak ruchy Browna są w dalszym ciągu przedmiotem licznych rozpraw i prac doświadczalnych. Przyciągają one uwagę fizyków m. in. i dlatego, że stanowią doskonałą okazję do studium nad t. zw. przypadkowymi siłami, do których stosuje się rachunek prawdopodobieństwa. Wzgląd ten przemawia w równej mierze za zbadaniem zagadnienia tu poruszonego. Od wystąpienia E. v Schweidlera na Kongresie Radiologicznym w Liège w r. 1905 [2]) uważa się, że i rozpad promieniotwórczy podlega regułom prawdopodobieństwa. Znalezienie przesunięcia Browna, wywołanego przez specyficzne działanie substancji promieniotwórczej, stanowiłoby niestosowaną dotychczas metodę badania statystycznego.

Głównie jednak sugerowały pracę niniejszą inne perspektywy; wydaje się, że proponowana tu metoda może przyczynić się do wyjaśnienia kwestii dotyczącej istnienia neutrina. Myśl Pauli'ego posiada szerokie tło teoretyczne, mimo jednak licznych prac, w szczególności Crane'a [29]) i Allena [33]), pozbawiona jest w dalszym ciągu dostatecznych podstaw doświadczalnych.

I. Cząstki swobodne

1. Uwagi ogólne

Przy próbie przeniesienia metod rachunkowych, stosowanych do ruchów Browna, na ruch zawiesiny radioaktywnej uwidoczniają się pewne charakterystyczne różnice między tymi zjawiskami.

Cząstkę Browna (ziarnko zawiesiny) zwykło się traktować jako molekułę o szczególnie wielkich rozmiarach, do której można jednak stosować prawa teorii kinetycznej dla układów znajdujących się w stanie równowagi, w szczególności prawo ekwipartycji energii. Założenie to w odniesieniu do zawiesiny radioaktywnej nie jest spełnione. W teorii ruchów Browna natomiast odgrywa ono bardzo istotną rolę. Dzięki niemu właśnie można uniknąć szczegółowego rozpatrzenia mechanizmu zderzeń. Trudności powstające, gdy usiłujemy śledzić przebieg zderzeń, były właśnie powodem, że kinetyczne tłumaczenie ruchów Browna przyjęło się dopiero w kilkadziesiąt lat po powstaniu teorii kinetycznej gazów.

Myśl, że na tej drodze należy szukać rozwiązania, została wprawdzie wypowiedziana już w latach 60-tych [3]). Daleka jednak od ujęcia ilościowego, nawet jakościowo zdawała się fałszywa. Wiadomem było, że np. ziarnko o średnicy 1 mikrona (o gęstości 1), pływające w wodzie, przesuwa się z prędkością około mikrona na sekundę, gdy tymczasem szybkość nadana ziarnku przez padającą nań cząsteczkę wody wynosi zaledwie 3.10^{-6} cm/sek.; nadto wobec ogromnej liczby zderzeń (10^{20}/sek., w wodzie w normalnych warunkach) po uderzeniu w pewnym kierunku niemal natychmiast powinno się zdarzyć inne, przeciwnie skierowane uderzenie. Wydawało się więc, że z punktu widzenia kinetycznej teorii ziarnko wogóle nie powinno ruszyć z miejsca [4]).

Trudność tę pokonał dopiero Smoluchowski [5]). Jakkolwiek równe są szanse, że zawieszone ziarnko otrzyma pęd bądź w lewo, bądź w prawo skierowany, to w odniesieniu do poszczególnej cząstki Browna pędy te nie zniosą się, lecz będą się składały na pęd wypadkowy, rosnący proporcjonalnie do pierwiastka kwadratowego z liczby zderzeń. W odniesieniu do obranego przykładu oznacza to, że po upływie sekundy ziarnko miałoby szybkość $3\,10^{-6} \cdot 1{\cdot}0^{10} = 3.10^{4}$ cm./sek. Podobnie można by obliczyć szybkość ziarnka radioaktywnego, biorąc pod uwagę pęd i liczbę cząstek emitowanych.

Rozumowanie to obejmuje jednak tylko jedną stronę zjawiska. Gdy cząstka Browna jest w ruchu, występuje druga okoliczność, która wydatnie hamuje ruch: im większa jest prędkość cząstki, tym mniejsza jest liczba sprzyjających ruchowi uderzeń, tym bardziej wzrasta liczba uderzeń przeciwnych. Rezultat jest taki, że cząstka porusza się zgodnie z prawem ekwipartycji energii. Natomiast cząstka radioaktywna, jeżeli na razie weźmiemy pod uwagę tylko jej specyficzne działanie, otrzymuje zawsze te same bodźce, gdyż rozpad promieniotwórczy nie zależy od stanu ruchu. W porównaniu z tym zjawiska związane z ruchem termicznym są daleko bardziej skomplikowane. Jednak charakterystyczna zależność między siłami powodującymi ruch i siłami tarcia pozwala, w przypadku ruchu termicznego na użycie metod sumarycznych, nie rozpatrujących przebiegu zderzeń (Einstein, Langevin). Jak widać w odniesieniu do zadania tu postawionego nie mogą one mieć zastosowania. W teorii ruchów Browna opracowano jednak i inne metody, bardziej szczegółowe, które przy pewnej modyfikacji prowadzą do celu także w naszym przypadku *).

---

*) Interesująca jest może pewna sugestia, którą nasuwa wzór Einsteina $2\,kTt/6\,\pi\,q\,r$. Jeżeli czytamy wzór w ten sposób: średni kwadrat przesunięcia jest proporcjonalny do średniej energii uderzających molekuł (kT/2) i jeżeli weźmiemy jeszcze pod uwagę, że poza tym wchodzą do wzoru tylko promień ziarnka i lepkość, to mogłoby się wydawać, że przesunięcie wywołane radioaktywnością otrzymamy

Rozumie się, że ziarnko ciała radioaktywnego bombardowane jest przez cząsteczki ośrodka podobnie jak ziarnko nieradioaktywne i wykonywa zwykły ruch Browna — o pewnych odstępstwach będzie mowa nizej — na który nakłada się jej ewentualne specyficzne przesunięcie.

2. Ruch postępowy. Metoda Milatza — Ornsteina

Współczesna teoria ruchów Browna wychodzi naogół z równania Langevina[6]):

$$M \frac{du}{dt} = K(t) = -\beta u + F(t). \tag{1}$$

Po prawej stronie wypisana jest siła pochodząca z uderzeń cząsteczek. Siłę tę rozkłada się na dwie części, na t.zw. część systematyczną, odpowiadającą tarciu w ruchu makroskopowym i część szybkozmienną; tylko z tą ostatnią, t.zw. niesystematyczną, mają wiązać się fluktuacje zderzeń, β jest współczynnikiem stałym, w gazach rozrzedzonych zależnym od ciśnienia.

W odniesieniu do F(t) wprowadza się za przykładem Ornsteina[7]) następujące założenia:

a) średnia wartość F(t) dla grupy cząstek, mających tę samą szybkość początkową (lub dla jednej cząstki w różnych chwilach, ale takich, w których posiada ona tę samą szybkość) ma być równa zeru: $\overline{F(t)} = 0$;

b) F(t) ma być funkcją bardzo szybko zmieniającą swój znak. „Szybko zmieniającą” znaczy bardzo często w porównaniu ze zmianami innych wielkości w tym samym czasie. Wartość średnia $\overline{F(t) \cdot F(t+\delta)} = F^*(\delta)$ ma zależeć tylko od δ i to tak, że dla $\delta = 0$ posiadać ma ostre maksimum i dla $\delta \neq 0$ szybko znikać.

Na podstawie tych założeń można znaleźć średnią wartość szybkości i przesunięcia jako funkcji czasu oraz średnie kwadraty tych wielkości bez pominięć (w przypadku ruchu postępowego). Wzór Einsteina zawarty jest jako szczególny przypadek.

Równanie ruchu można napisać w postaci:

$$\frac{du}{dt} = -\beta_1 u + A(t), \quad \text{gdzie } \beta_1 = \beta/M, \; A(t) = F(t)/M. \tag{2}$$

Założenia dotyczące F pozostają słuszne dla A(t). Wtedy[8]):

$$\overline{u}^{u_0} = u_0 e^{-\beta_1 t}, \quad \overline{u^2}^{u_0} = \frac{\vartheta}{2\beta_1}\left(1 - e^{-2\beta_1 t}\right) + u_0^2 e^{-2\beta_1 t} \tag{3}$$

---

zastępując poprostu kT/2 przez energię np. cząstek alfa (jeżeli pominąć, że w przeciwieństwie do emitowanej cząstki, molekuła zmienia ilość ruchu o 2mv). Błąd polega choćby na tym, że kT/2 wchodzi do wzoru jako średnia energia kinetyczna z i a r n k a i tylko dzięki prawu ekwipartycji jest to równocześnie energia średnia molekuły.

i dla przesunięcia $s = x - x_0$

$$\overline{s}^{u_0} = \frac{u_0}{\beta_1}\left(1 - e^{-\beta_1 t}\right),$$

$$(4) \qquad \overline{s^2}^{u_0} = \frac{\vartheta}{\beta_1^2}\, t + \frac{u_0^2}{\beta_1^2}\left(1 - e^{-\beta_1 t}\right)^2 + \frac{\vartheta}{2\beta_1^3}\left(-3 + 4e^{-\beta_1 t} - e^{-2\beta_1 t}\right),$$

gdzie

$$(5) \qquad \vartheta = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\delta)\, d\delta, \quad H(\delta) = \overline{A(t)\, A(t+\delta)}$$

$$\text{lub} \quad H(\delta) = \frac{1}{M^2}\, \overline{F(t)\, F(t+\delta)}\,.$$

Średnie wartości odnoszą się do cząstek mających tę samą szybkość początkową (lub do jednej cząstki startującej wielokrotnie z tą samą szybkością) — stąd znaczek u_0 przy średnich wartościach. Zależność od warunków początkowych zanika przy wzrastającym t i po upływie dostatecznie długiego czasu wzory przyjmują uproszczoną postać:

$$(6) \qquad \overline{u^2} = \frac{\vartheta}{2\beta_1}, \qquad \overline{s^2} = \frac{\vartheta}{\beta_1^2}\, t\,.$$

Wielkość ϑ przedstawia działanie niesystematycznej siły F, powodującej przesunięcie. Można ją znaleźć z prawa ekwipartycji energii:

$$\frac{kT}{M} = \overline{u^2} = \frac{\vartheta}{2\beta_1},$$

gdzie k jest stałą Boltzmanna, T — temperaturą bezwzględną. Po podstawieniu do (6) wyrażenie na $\overline{s^2}$ przechodzi we wzór Einsteina:

$$(7) \qquad \overline{s^2} = \frac{2kT}{M\beta_1}\, t = \frac{2kT}{\beta}\, t\,.$$

Gdy mamy do czynienia z ziarnkiem radioaktywnym, równanie ruchu przybierze postać:

$$(8) \qquad M\frac{du}{dt} = -\beta u + F(t) + F_1(t)\,.$$

W porównaniu z (1) dochodzi jeszcze wyraz F_1, pochodzący z odrzutu emitowanych cząstek i analogiczny do F. Jak wynika z uwag wstępnych, β pozostaje niezmienione. W odniesieniu do F_1 będziemy mogli przyjąć założenia a) i b), charakterystyczne dla F (jeżeli emisje podlegają prawom prawdopodobieństwa). Zastrzeżenia odnoszące się do szybkości początkowej w punkcie a) są tu zbyteczne.

Załóżmy na razie. że można pominąć F w porównaniu z F_1 (nie uwzględniamy zwykłego ruchu Browna). Równanie ruchu ma wtedy postać:

$$M \frac{du}{dt} = -\beta u + F_1(t), \tag{9}$$

a zatem znów postać (1). Możemy więc przejąć poprzednie wyniki, w szczególności wzór (6) na średni kwadrat przesunięcia

$$\overline{s_r^2} = \frac{\vartheta}{\beta_1^2} t, \tag{6a}$$

jednak ϑ, znalezione poprzednio za pomocą prawa ekwipartycji energii, musi być teraz obliczone explicite. Zadanie to dla zwykłego ruchu Browna podjęli Ornstein i Milatz [10]). Metoda ich może być przystosowana do naszych celów. Ograniczamy się przypadków, w których prędkość cząstek emitowanych jest jednorodna, więc np. do preparatów wysyłających cząstki α.

Milatz i Ornstein posługują się następującym modelem. Punkt materialny P o masie M, przesuwający się wzdłuż prostej, wystawiony jest na uderzenia ze strony innych punktów materialnych o masie m (m małe wobec M), które biegną wzdłuż tej samej prostej. Uderzenia następują z obu stron w nieregularnych odstępach (zakłada się, że po uderzeniu cząstka lekka znika). By ująć rachunkowo oddziaływanie lekkich cząstek na P, Milatz i Ornstein zakładają, że cząstka P otoczona jest polem sił, rozciągającym się na niewielką odległość, wewnątrz której lekkie cząstki odpychane są stałą siłą K, dostatecznie dużą, by cząstka padająca zawróciła, nim dotrze do P.

W przypadku, gdy P przedstawia ziarnko radioaktywne, nie ma cząstek uderzających, są tylko cząstki emitowane (zwykły ruch Browna na razie pomijamy). Rachunkowo można jednak zastąpić cząstkę emitowaną przez padającą: ciałko, wyrzucone z szybkością v, wywoła taki sam odrzut jak ciałko padające (i odbite) o szybkości v/2. Zmiana pędu jest w obu przypadkach taka sama, równa mv, gdyż według założenia m jest małe wobec M. Będziemy więc w dalszym ciągu mówili o zderzeniach, ograniczając się, podobnie jak Ornstein, do jednego wymiaru.

Niech τ oznacza czas, który średnio upływa między dwoma zderzeniami (emisjami). Liczba cząstek uderzających średnio w jednostce czasu z prawej strony jest $1/2\tau$, z lewej również $1/2\tau$. U Milatza i Ornsteina wielkości te zależą jeszcze od szybkości punktu P; liczba emitowanych cząstek jednak nie zależy od ruchu. Czas trwania zderzenia τ_1 można wyliczyć z równania ruchu dla cząstki lekkiej:

$$m\ddot{y} = K\,, \quad m\dot{y} = -m\frac{v}{2} + Kt \quad ;$$

y jest spółrzędną cząstki lekkiej, v/2 jej szybkością (oznacza to, że szybkość cząstki emitowanej jest v). Gdy $t = mv/2K$ prędkość cząstki ulega odwróceniu. Czas, w ciągu którego cząstka przebywa w polu sił, t.j. czas zderzenia, wynosi:

$$\tau_1 = \frac{mv}{K}. \tag{10}$$

Za Ornsteinem zakładamy, że w dowolnej chwili uderza tylko jedna cząstka. Jak wykazali wspomniani autorowie, uproszczenie to nie zmienia wyniku.

Równanie ruchu dla P miało postać:

$$M \frac{du}{dt} = -\beta u + F_1(t).$$

Jeżeli nie ma zderzenia, $F_1 = 0$, w przeciwnym razie $F_1 = K$ lub $F_1 = -K$. Prawdopodobieństwo, że działa siła K, równe jest $\tau_1/2\tau$, takie samo jest prawdopodobieństwo, że działa siła $-$ K. Na prawdopodobieństwo, że siła równa się 0, otrzymamy:

$$1 - 2\frac{\tau_1}{2\tau} = 1 - \frac{mv}{K\tau}.$$

Wartości te zestawione są w tabelce 1.

Tabelka 1.

Wartość F_1	Prawdopodobieństwo
0	$1 - \frac{mv}{K\tau}$
$-K$	$\frac{mv}{2K\tau}$
$+K$	$\frac{mv}{2K\tau}$

Mnożąc wartość funkcji przez prawdopodobieństwo i sumując, otrzymujemy wartość średnią; przeto $\overline{F_1} = 0$, natomiast

$$\overline{F_1^2} = K^2 \frac{mv}{2K\tau} + K^2 \frac{mv}{2K\tau} = \frac{mv}{\tau} K$$

jest różne od zera.

Zmierzamy do wyliczenia ϑ, określonego przez (5)

$$\vartheta = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\delta)\, d\delta\,, \quad H(\delta) = \frac{1}{M^2} \overline{F_1(t)\, F_1(t+\delta)}$$

Należy więc znaleźć średnią wartość $\overline{F_1(t)\,F_1(t+\delta)}$.

Możliwe są dwa przypadki:

a) $F_1(t) \neq F_1(t+\delta)$, b) $F_1(t) = F_1(t+\delta)$.

W przypadku a) $\overline{F_1(t)\,F_1(t+\delta)} = 0$,

Pochodzi to stąd, że wtedy $\overline{F_1(t+\delta)} = 0$; gdyż jeżeli np. zderzenie właśnie minęło, nie możemy przepowiedzieć, jaką wartość F_1 będzie miało po zderzeniu.

W przypadku b) sytuacja (zderzenie lub ruch swobodny) jest jednakowa w chwili t i $t+\delta$. Posługując się tabelką znajdziemy wtedy

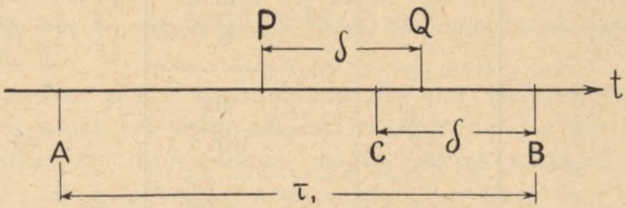
$$\overline{F_1(t)\,F_1(t+\delta)} = K^2\,\frac{mv}{2K\tau}\left\|\frac{\tau_1-\delta}{\tau_1}\right\| + K^2\,\frac{mv}{2K\tau}\left\|\frac{\tau_1-\delta}{\tau_1}\right\|. \tag{11}$$

Pierwszy współczynnik iloczynów przedstawia wartość $F_1(t)\,F_1(t+\delta)$, drugi — prawdopodobieństwo, że dana sytuacja zajdzie, trzeci $\|(\tau_1-\delta)/\tau_1\|$, który pochodzi z prawdopodobieństwa trwałości sytuacji, wymaga jeszcze uzasadnienia. Znaczenie tego symbolu jest następujące:

$\left\|\frac{\tau_1-\delta}{\tau_1}\right\|$ jest równe $\frac{\tau_1-\delta}{\tau_1}$, jeżeli δ jest mniejsze lub równe τ_1 i jest równe zeru, jeżeli δ jest większe od τ_1. Daje ono prawdopodobieństwo, że jeśli w czasie t miało miejsce zderzenie, to trwa ono jeszcze w czasie $t+\delta$. Jest jasne, że dla δ większego od τ_1, prawdopodobieństwo to jest równe zeru. Sytuację odpowiadającą przypadkowi δ mniejsze od τ_1 objaśnia rys 1.

Rys. 1

Fig. 1



Przypuśćmy, że zderzenie rozciąga się od A do B. Niech punkt P odpowiada chwili t, punkt Q chwili $t+\delta$. Jeżeli zakładamy, że zderzenie trwa, Q musi być położone na lewo od B, wobec tego P musi być odległe od B o więcej niż δ, a więc znajdować się między A i C. C jest to punkt leżący w odległości δ od B. Szukane prawdopodobieństwo równa się zatem

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\tau_1-\delta}{\tau_1}.$$

Wracając do wzoru (11) mamy:

$$\overline{F_1(t)\,F_1(t+\delta)} = \frac{mv}{\tau}\,K\left\|\frac{\tau_1-\delta}{\tau_1}\right\|,$$

$$(12) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(t)\, F_1(t+\delta)}\, d\delta = 2\, \frac{mv}{\tau}\, K\, \frac{\tau_1}{2} = \frac{m^2 v^2}{\tau}$$

i (13)
$$\vartheta = \frac{1}{M^2} \frac{m^2 v^2}{\tau}.$$

Średni kwadrat przesunięcia znajdziemy z (6a)

$$s_r^2 = \frac{\vartheta}{\beta_1^2}\, t.$$

Biorąc pod uwagę, że $\beta_1 = \beta/M$ (por. 1) i podstawiając znalezioną wartość na ϑ otrzymamy:

$$(14) \qquad s_r^2 = \frac{m^2 v^2}{\beta^2} \frac{1}{\tau}\, t = \frac{m^2 v^2}{\beta^2}\, n\, t,$$

gdzie v jest szybkością emitowanej cząstki, m jej masą, — zakłada się że ciałko Browna pokryte jest warstewką radioaktywną dostatecznie cienką, by wszystkie cząstki α skierowane na zewnątrz wybiegały z jednakową szybkością; β jest współczynnikiem oporu, t czasem; n oznacza ilość cząstek emitowanych w ciągu sekundy wzdłuż pewnej prostej. Jeżeli skorzystamy z założenia stosowanego czasem w teorii kinetycznej gazów i przyjmiemy, że emisje rozkładają się równomiernie na 3 prostopadłe do siebie osie, n będzie się równało szóstej części rozpadających się na sekundę atomów (połowa cząstek skierowana jest do środka ziarnka i ulega absorbcji).

Należy jeszcze zaznaczyć, że Milatz i Ornstein, przeprowadzając rachunek dla zwykłego ruchu Browna, posługują się pewnymi przybliżeniami wskazanymi w tym przypadku, zaniedbując np. wyrazy w których szybkość punktu P występuje w kwadracie. Jak widać, rachunek powyższy nie zawiera tych przybliżeń. Wiąże się to z tym, źe wzór (14) daje tylko przesunięcie wywołane przez specyficzne działanie preparatu, zwykły ruch Browna został pominięty.

Chcąc otrzymać całkowite przesunięcie powinniśmy wyjść ze wzoru (8). Funkcja $H(\delta)$ (por. 5) miałaby wtedy postać:

$$H(\delta) = \frac{1}{M^2} \overline{[F(t) + F_1(t)]\,[F(t+\delta) + F_1(t+\delta)]}$$
$$= \frac{1}{M^2} \overline{[F(t)F(t+\delta) + F_1(t)\, F_1(t+\delta) + F(t)\, F_1(t+\delta) + F_1(t)\, F(t+\delta)]}$$
$$= \frac{1}{M^2} [\overline{F(t)\, F(t+\delta)} + \overline{F_1(t)\, F_1(t+\delta)}],$$

gdyż średnie wartości $\overline{F(t) \cdot F_1(t+\delta)}$ i $\overline{F_1(t) \cdot F(t+\delta)}$ znikają, funkcje F i F_1 są bowiem niezależne od siebie. Otrzymana z całkowania $H(\delta)$ funkcja ϑ będzie więc sumą dwóch członów, odnoszących się —

jeden do zwykłego przesunięcia Browna, drugi do radioaktywnego i (por. 6):

$$\overline{s^2} = \overline{s^2_{Br}} + \overline{s^2_r} . \tag{15}$$

3. Metoda de Haas-Lorentz — Einsteina — Hopfa

G. L. de Haas-Lorentz[11]) zastosowała do przesunięcia Browna postępowanie rachunkowe, które Einstein i Hopf[12]) rozwinęli w innym związku. Metoda ta pozwala obliczyć średni kwadrat przesunięcia w zależności od pędu przekazywanego cząstce Browna. Wzory podane przez de Haas-Lorentz prowadzą również do równania (14). Interesujące jest może porównanie z metodą poprzednią, w szczególności też w odniesieniu do założeń a) i b), o których Ornstein i Uhlenbeck[8]) zauważyli, że ich uzasadnienie względnie krytyka powinna być zadaniem bardziej szczegółowej teorii kinetycznej. Odpowiedniki tych założeń w ujęciu de Haas-Lorentz mają charakter bardziej poglądowy.

Punktem wyjścia jest równanie ruchu:

$$M \frac{du}{dt} = - \beta u + F .$$

Dzielimy czas na równe elementy τ, niech szybkości na początku każdego elementu będą:

$$u_0, \; u_1, \; u_1, \ldots ,$$

drogi przebyte w ciągu τ odpowiednio:

$$s_1, \; s_2, \; s_3, \; \ldots .$$

Całkując równanie ruchu na k-ty element czasu, mamy:

$$M (u_k - u_{k-1}) = - \beta \int_k u \, dt + \int_k F \, dt . \tag{16}$$

Druga całka równa się zmianie pędu, oznaczmy ją przez:

$$\int_k F \, dt = M X_k .$$

Jeżeli τ jest małe, wtedy:

$$\int_k u \, dt = u_{k-1} \tau .$$

Wprowadzając skrót

$$1 - \frac{\beta \tau}{M} = \alpha$$

otrzymany z (16):

$$u_k = \alpha \, u_{k-1} + X_k$$

lub $u_1 = \alpha \, u_0 + X_1$,

$$u_2 = \alpha^2 u_0 + \alpha X_1 + X_2 ;$$

$$u_3 = \alpha^3 u_0 + \alpha^2 X_1 + \alpha X_2 + X_3 \quad \text{i t. d.},$$

a na drogi:

$$s_1 = u_0 \tau ,$$
$$s_2 = u_1 \tau = (\alpha u_0 + X_1) \tau ,$$
$$s_3 = u_2 \tau = (\alpha^2 u_0 + \alpha X_1 + X_2) \tau .$$

Całkowite przesunięcie $s_1 + s_2 + s_3 + s_n = s$ równa się:

$$s = u_0 (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots \alpha^{n-1}) \tau + X_1 (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-2}) \tau$$
$$+ X_2 (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-3}) \tau + \ldots + X_{n-1} \tau$$

lub

$$\frac{s}{\tau} = u_0 \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} + X_1 \frac{1 - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha} + \ldots + X_{n-2} \frac{1 - \alpha^2}{1 - \alpha} + X_{n-1} .$$

Równanie to podnosimy do kwadratu i przechodzimy do wartości średnich:

$$(17) \quad \frac{1}{\tau^2} \overline{s^2} = \overline{u_0^2} \left(\frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}\right)^2 + \overline{X^2} \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \Big[(n - 1) +$$
$$- 2 (\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1}) + (\alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2(n-1)})\Big]$$
$$= \overline{u_0^2} \left(\frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}\right)^2 + \overline{X^2} \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \left[(n - 1) - 2\alpha \frac{1 - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha} + \alpha^2 \frac{1 - \alpha^{2(n-1)}}{1 - \alpha^2}\right].$$

By otrzymać prawą stronę równania, autorka przyjęła, że:

a) średnie kwadraty pędów przekazywanych w okresie są sobie równe *): $\overline{X_1^2} = \overline{X_2^2} = \overline{X_3^2} = \ldots = \overline{X^2}$;

b) szybkości u i pędy X mogą być, niezależnie od siebie, zarówno dodatnie jak i ujemne, tak że przy tworzeniu wartości średnich podwójne iloczyny znikają.

Równanie (17) upraszcza się, jeżeli n, liczba przedziałów, wzrasta. Wyrażenie zawierające n jako współczynnik przekracza wtedy wszystkie inne **) i

$$\overline{s^2} = \tau^2 \overline{X^2} \frac{n}{(1 - \alpha)^2} .$$

Przy uwzględnieniu, że $\alpha = 1 - \beta \tau / M$, otrzymamy:

$$(18) \qquad \overline{s^2} = \tau^2 \overline{X^2} \frac{n M^2}{\beta^2 \tau^2} = n \tau \frac{\overline{X^2} M^2}{\beta^2 \tau} .$$

Jeżeli teraz, wracając do ciała radioaktywnego, przez τ będziemy rozumieli średni czas między dwiema emisjami, to pęd przekazany

---

*) Pędem jest właściwie M X.

**) Komentarz odnoszący się do tego punktu rozumowania de Haas-Lorentz można znaleźć u K.F. Niessen i C.F. Backer, Physica 5, 977, 1938.

w tym okresie ciężkiej cząstce będzie równy pędowi cząstki emitowanej: $\overline{X^2} \cdot M^2 = m^2 \cdot v^2$ (pędy powodujące zwykły ruch Browna pomijamy) i

$$\overline{s_r^2} = \frac{m^2 v^2}{\beta^2 \tau} n\tau = \frac{m^2 v^2}{\beta^2 \tau} t ,$$

gdyż $n\tau$ przedstawia czas, w którym nastąpiło przesunięcie. Zmieniając teraz znaczenie n, mianowicie rozumiejąc przez n znów liczbę emisji na sekundę, mamy: $n = 1/\tau$

i $$\overline{s_r^2} = \frac{m^2 v^2}{\beta^2} \frac{1}{\tau} t = \frac{m^2 v^2}{\beta^2} n t ,$$

wzór identyczny z (14). O pewnych zastrzeżeniach dotyczących tego rozumowania będzie mowa w rozdz. II, 2.

4. Ruch obrotowy

Rachunki przebiegają analogicznie do przypadku ruchu postępowego. Dla prostoty skorzystamy z ujęcia, które podał V. Pospisil[13]). M będzie teraz momentem bezwładności, u szybkością kątową, s przesunięciem kątowym, p_z niech oznacza moment pędu (wielkości są odniesione do jednej z osi, np. do osi z). Czas dzielimy znów na drobne odstępy τ.

Przypuśćmy, że wskutek emisji promieniotwórczej ziarnko nabyło szybkości u_1, wtedy

$$M \frac{du}{dt} = -\beta u , \quad u = u_1 e^{-\frac{\beta}{M} t}$$

i drogą kątową aż do zupełnego wyczerpania się szybkości równa się:

(19) $$s_1 = u_1 \int_0^\infty e^{-\frac{\beta}{M} t} dt = \frac{p_{z1}}{\beta} .$$

Całkowanie rozciąga się do nieskończoności, praktycznie jednak funkcja podcałkowa znika już po krótkim czasie.

W następnym przedziale czasowym cząstka otrzyma szybkość u_2 i t.d. Dla każdego obrotu cząstkowego słuszne są równania analogiczne do (19). Całkowity kąt obrotu będzie więc $s = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$

i $$\overline{s^2} = \Sigma\, \overline{s_i^2} ,$$

gdyż średnie wartości podwójnych iloczynów typu

$$2\, s_i\, (s_{i+1} + s_{i+2} + \ldots + s_n)$$

znikają. Zatem uwzględniając (19) mamy:

$$\overline{s^2} = n \frac{\overline{p_z^2}}{\beta^2} ,$$

jeżeli $\overline{p_{z1}^2} = \overline{p_{z2}} = \ldots \overline{p_z^2}$.

Oczywiście rozumowanie to pod względem ścisłości nie może się równać z metodą Milatza i Ornsteina. Znikanie podwójnych iloczynów wymaga, by drogi cząstkowe były niezależne od siebie. Oznacza to w każdym razie, że czas obserwacji musi być duży wobec M/β — zastrzeżenie charakterystyczne dla uproszczonych wzorów w ruchu Browna.

Gdybyśmy teraz przez p_z rozumieli moment pędu przekazany ziarnku przy emisji jednej cząstki, a przez n znów liczbę cząstek wyrzucanych w ciągu sekundy, wzór na $\overline{s^2}$ przybrałaby postać:

$$\overline{s^2} = n \frac{\overline{p_z^2}}{\beta^2} t. \tag{20}$$

W rozdziale II, 1 wzór ten zostanie uzasadniony jeszcze na innej drodze.

5. Możliwości eksperymentalne

Wzór (14) przystosowany do przypadku ciała radioaktywnego może również służyć do oszacowania zwykłego przesunięcia Browna. Należy tylko przez m^2v^2 rozumieć średni kwadrat pędu przekazywanego cząstce przy jednym zderzeniu. W obu więc przypadkach przesunięcie zależy do liczby emisji (zderzeń) i od zmiany pędu przy poszczególnych emisjach (zderzeniach). By efekt radioaktywny był widoczny, przesunięcie wywołane emisjami musi być większe niż błąd w pomiarze zwykłego przesunięcia. Pęd cząstek α jest bardzo duży (około 10^{-14} g cm/sek.) w porównaniu z pędem cząsteczki, np. azotu (około 10^{-18} w zwykłej temperat.). Jednak liczba zderzeń przekracza tak znacznie liczbę emisji, że w zwykłych warunkach przesunięcie promieniotwórcze pozostanie niedostrzegalne. Jeżeli np. zawieszone ziarnko wysyła na cm² strumień cząstek α, odpowiadający rozpadowi jednego grama radu (1 Curie), t.j. około 10^{10} cząstek na sekundę, to równocześnie o tę powierzchnię uderza około 10^{23} molekuł w gazach — w cieczach daleko więcej. Trzeba więc bardzo znacznych rozrzedzeń, ewentualnie niskich temperatur, by zmienić sytuację. Rozrzedzenie zmniejsza tarcie, które w warunkach, o jakich tu mowa, jest wprost proporcjonalne do ciśnienia; w przypadku ciała radioaktywnego przesunięcie wzrasta wtedy szybko (β^2 w mianowniku), gdyż liczba emisji pozostaje stała; dla zwykłego ruchu Browna wzrost jest powolniejszy, bo wraz z ciśnieniem maleje liczba zderzeń. Ale doświadczenia nad postępowym ruchem Browna są bardzo trudne już przy niewielkim rozrzedzeniu. Niskie ciśnienie zdołano zastosować dotychczas jedynie w przypadku ciałek poddanych siłom sprężystym, o czym będzie mowa w następnym rozdziale.

Istnieje jednak i możliwość zbadania swobodnego ciałka przy niskim ciśnieniu, mianowicie jego obrotowego ruchu Browna — okoliczność, na którą pragnęlibyśmy zwrócić uwagę. Możliwość ta wiąże się z udoskonaloną w ostatnich latach metodą magnetycznego zawieszenia niewielkich ciałek ferromagnetycznych [14]. W szeregu doświadczeń nad otrzymaniem bardzo silnych pól odśrodkowych J. W. Beams i współpracownicy okazali [14]), że tarcie przy zawieszonej magnetycznie kulce (która została wprawiona w ruch obrotowy przez wirujące pole magnetyczne) pochodzi niemal wyłącznie z oporu powietrza otaczającego rotor, nawet jeżeli ciśnienienie wynosiło tylko 10^{-6} mm Hg. Tak np. podtrzymywany magnetycznie rotor o średnicy 1,59 mm, wirujący pod ciśnieniem 2.10^{-6} mm Hg z szybkością 100.000 obrotów na sekundę, stracił po upływie godziny zaledwie 0,1 procent swej szybkości początkowej. Powołując się na to niezwykle małe tarcie J. W. Beams zapowiada dokładne zmierzenie ciśnienia światła.

Wydaje się nie ulegać wątpliwości, że metoda ta otwiera możliwość eksperymentalnego zbadania obrotowego ruchu Browna przy niskim ciśnieniu. Tym samym dane byłyby także warunki konieczne do obserwacji obrotu radioaktywnego.

By zrobić użytek z wzoru (20), należy obliczyć średni kwadrat momentu pędu w odniesieniu do jednej z osi.

Przypuśćmy, że mamy kulę pokrytą cienką warstwą preparatu radioaktywnego, np. polonem. Moment pędu emitowanej cząstki dany jest przez iloczyn wektorowy $p = m\,[\vec{R}\,\vec{v}]$. Początek układu współrzędnych x, y, z, obieramy w środku kuli (por. rys. 2). Niech P będzie miejscem, z którego wylatuje cząstka. Z punktem tym zwiążemy drugi układ współrzędnych x_1, y_1, z_1; z_1 wzdłuż promienia OP, x_1, y_1, w płaszczyźnie stycznej. Jeżeli ϑ jest kątem między wektorami R i v, wtedy $p^2 = m^2 v^2 R^2 \sin^2 \vartheta$; R^2 i v^2 są stałe. By obliczyć wartość średnią $\overline{p^2}$, należy $m^2 v^2 R^2 \sin^2 \vartheta$ przemnożyć przez prawdopodobieństwo, że ta właśnie wartość wystąpi i sumować. Przy stałym P wartość p^2 zależy tylko od kierunku v. Kierunki, w których cząstka może być emitowana, pokrywają półkulę, której środkiem jest P. Miarą prawdopodobieństwa będzie więc element powierzchniowy półkuli podzielony przez jej pole, t. j. $\frac{1}{2\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$.

Stąd: $$\overline{p^2} = \int\int m^2 v^2 R^2 \sin^2 \vartheta \, \frac{1}{2\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi .$$

Całkowanie rozciąga się dla ϑ od 0 do $\pi/2$, dla φ od 0 do 2π,

przeto $$\overline{p^2} = \frac{m^2 v^2 R^2}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3} m^2 v^2 R^2 .$$

Wartość ta nie zależy od położenia punktu P. Oznaczając przez p_x, p_y, p_z, rzuty momentu pędu na stałe osie x, y, z, mamy

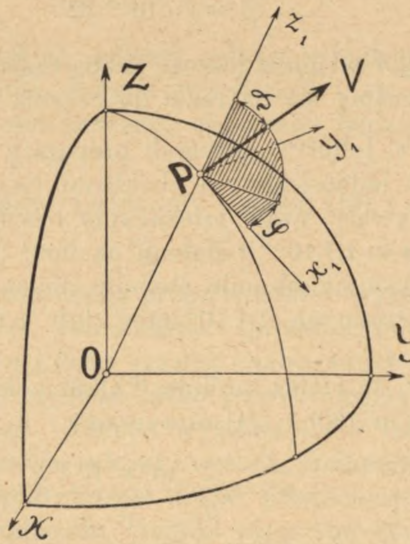
$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2,$$

$$\overline{p^2} = \overline{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \overline{p_x^2} + \overline{p_y^2} + \overline{p_z^2} = 3\,\overline{p_z^2},$$

gdyż ze względu na symetrię $\overline{p_x^2} = \overline{p_y^2} = \overline{p_z^2}$;

zatem

$$\overline{p_z^2} = \frac{2}{9}\, m^2 v^2 R^2. \tag{21}$$



Rys. 2

Fig. 2

Do wzoru (20) wchodzi właściwie moment pędu przekazywany cząstce Browna; wielkość ta różni się jednak tylko znakiem od momentu pędu cząstki emitowanej

Dla obliczenia β skorzystamy ze wzorów, które w rozprawie o ruchach Browna wyprowadził F. Zeilinger [15]) dla ciał kulistych w gazach rozrzedzonych (droga swobodna duża w porównaniu ze średnicą cząstki). W przypadku ruchu postępowego mamy

$$\beta = \frac{8}{3} \sqrt{2\pi\, k\, T\, m}\; N R^2,$$

dla obrotowego

$$\beta = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi\, k\, T\, m}\; N R^4;$$

R promień cząstki Browna, m masa cząsteczki otaczającego gazu, k stała Boltzmanna, T temperatura bezwzględna. N, liczba molekuł w cm^3, dana jest przez wzór:

$N = p/kT$ (p — ciśnienie); przeto dla ruchu obrotowego:

$$\beta = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2\pi m}{k}} \frac{p}{\sqrt{T}} R^4$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymuje się dla ruchu obrotowego, obierając za m masę cząstki wodoru, w temperaturze 0°C, przy ciśnieniu 10^{-3} mm Hg:

$$\beta = 4{,}2 \cdot 10^{-5} R^4 .$$

Jeżeli temperatura wynosi 100°K. i ciśnienie 10^{-3} mm Hg:

$$\beta = 7 \cdot 10^{-5} R^4 .$$

Do wzoru (20) wchodzi jeszcze liczba cząstek wylatujących w ciągu sekundy. Ograniczamy się na razie do cząstek alfa.

I. Curie i Fr. Joliot[16]) otrzymali preparaty polonu, które na 1 mm² powierzchni przy jednostronnym działaniu (w obrębie kąta przestrzennego 2π) wywoływały prąd jonizacyjny równy 8000 j. elektrostatycznych. Odpowiada to $1{,}3.10^{-6}$ g polonu na mm² (około 6 mC/mm²). Liczba rozpadających się na sekundę atomów równa się wtedy $2{,}2.10^{8}$, liczba emisji jednostronnych $1{,}1.10^{8}$/mm² lub $1{,}1.10^{10}$ na cm² preparatu w ciągu sekundy.

Przypuśćmy, że ciałko próbne (kulka) pokryte jest taką warstewką polonu. Ze wzorów (20) i (21) otrzymamy:

$$\overline{s^2} = \frac{2}{9} \frac{m^2 v^2 R^2}{\beta^2} n t .$$

Liczbę cząstek wylatujących n możemy zastąpić przez $4\pi R^2 n^*$ rozumiejąc przez n^* liczbę cząstek emitowanych na cm² (i sekundę, jednostronnych).

Wtedy:

$$\overline{s^2} = \frac{2}{9} \frac{m^2 v^2 R^2}{\beta^2} 4\pi R^2 n^* t .$$

Podstawiając za pęd cząstki alfa $mv = 10^{-14}$, za $\beta = 7.10^{-5} R^4$, za $n^* = 1{,}1.10^{10}$, mamy dla kulki o średnicy 1/10 mm, przy ciśnieniu 10^{-3} mm Hg i w temperaturze 100°K:

$$\overline{s_r^2} = 1 \cdot t .$$

Na zwykły obrót Browna znajdziemy ze wzoru Einsteina

$$\overline{s_{Br}^2} = \frac{2kT}{\beta} t$$

w tych samych warunkach

$$\overline{s_{Br}^2} = 6{,}3 \cdot 10^{-1} t .$$

Wielkość obrotu wzrasta bardzo szybko, jeżeli rozmiary ciała maleją (β proporcjonalne do R^4). Jednak stosunek $\overline{s_r^2} : \overline{s_{Br}^2}$ pozostaje stały, jeżeli pozostałe wielkości nie uległy zmianie:

$$\frac{\overline{s_r^2}}{\overline{s_{Br}^2}} = \frac{2}{9} \frac{4\pi\, n^*\, m^2\, v^2}{2\, k\, T} \frac{R^4}{\beta}$$

nie zależy od promienia, ponieważ β jest proporcjonalne do R^4.

Natomiast obniżenie ciśnienia o jeden rząd wielkości spowodowałoby stokrotny wzrost obrotu radioaktywnego, podczas gdy $\overline{s_{Br}^2}$ wzrosłoby tylko dziesięć razy.

Przy stosowaniu niskich ciśnień należy jednak mieć na uwadze, że dla ciał o stosunkowo dużych rozmiarach t. zw. czas relaksacji $t^* = M/\beta$ przybiera wartości znaczne; obszerniej będzie o tym mowa niżej.

Na obrót obserwowany otrzymamy według (15)

$$\overline{s^2} = \overline{s_{Br}^2} + \overline{s_r^2}.$$

Wskutek ciepła wyzwolonego przez preparat wystąpi tu, szczególnie w niskiej temperaturze, interesujące zjawisko, podobne do efektu radiometrycznego. Z ogólnej ilości cząstek emitowanych przez warstewkę polonu ($2{,}2 . 10^{10}/\mathrm{cm}^2$ i sek.) wybiega tylko połowa, reszta skierowana jest do środka i ulega absorpcji. Ciepło wytworzone w ten sposób wynosi $9{,}3 . 10^4$ ergów/cm^2 sek. (energia odrzutu została pominięta). Przy niskim ciśnieniu ciało traci ciepło głównie dzięki promieniowaniu. Temperatura będzie się więc podnosiła, dopóki promieniowanie nie wyrówna przypływu ciepła. W przykładzie powyższym nastąpi to przy około 200°K (temperatura otoczenia była 100°K). Wtedy energia wypromieniowana wyniesie (według wzoru na promieniowanie ciała czarnego) $5{,}75 . 10^{-5} \cdot 200^4 = 9{,}2 . 10^4$ ergów/cm^2 sek., a więc prawie tyle, ile ciepło dostarczone. Energia promienista, którą kulka otrzymuje, jest 16 razy mniejsza i może być pominięta w orientacyjnym rachunku, podobnie jak ciepło odprowadzone przez cząsteczki gazu.

W teorii efektu radiometrycznego przyjmuje się, że cząsteczki odbite posiadają energię odpowiadającą temperaturze ściany[17]). W naszym przypadku cząsteczki uderzają z szybkością odpowiadającą 100°K, odskakują więc z energią podwojoną, gdyż temperatura ziarnka wynosi 200°K. Okoliczność ta uwidoczni się w intensywniejszym ruchu Browna. Wzrost przesunięcia oszacujemy, ograniczając się dla prostoty do ruchu postępowego, na podstawie wzoru (18)

$$\overline{s^2} = n\,\tau\, \frac{M^2\, \overline{X^2}}{\tau\, \beta^2}.$$

Wielkość $n\tau$ przedstawia czas. Jeżeli przez $1/\tau$ będziemy rozumieli liczbę zderzeń na sekundę*), $\overline{M^2 X^2}$ będzie kwadratem pędu, który cząstka Browna średnio otrzymuje przy jednym zderzeniu. Załóżmy, że molekuły gazu mają wszystkie tę samą prędkość; możemy wtedy opuścić znak średniej wartości. Szybkość X rozkładamy na dwie części X_1 i X_2, które odpowiadają szybkościom udzielonym przy uderzeniu i przy odskoku. W przypadku ziarnka nieradioaktywnego obie te wielkości są sobie równe. Połóżmy: $X_1 = X_2 = U/2$; wtedy przesunięcie równa się:

$$\overline{s^2} = \frac{M^2 U^2}{\tau \beta^2} t .$$

Gdy zastąpimy ziarnko zwykłe przez radioaktywne, X_1 nie zmieni się, natomiast X_2 wzrośnie. W przykładzie naszym $X_2^2 = 2X_1^2$, a zatem:

$$\overline{s^2} = \frac{M^2}{\tau \beta^2} (X_1 + X_2)^2 t = \frac{M^2}{\tau \beta^2} \left(\frac{U}{2} + \frac{U}{2} \sqrt{2}\right)^2 t = 1{,}4 \frac{M^2 U^2}{\tau \beta^2} t .$$

W rezultacie różnica między ruchem ciałka zwykłego i ciałka pokrytego substancją promieniotwórczą zwiększy się. Jeżeli w pierwszym przypadku znajdziemy wartość $\overline{s^2_{Br}}$, w drugim otrzymamy

$$\overline{s^2} = \overline{s^2_r} + c\, \overline{s^2_{Br}}, \text{ gdzie } c > 1 .$$

W podanym przykładzie $c = 1{,}4$; jest to oczywiście tylko wartość przybliżona.

W wyższej temperaturze efekt ten zanika; ciepło dostarczone przez preparat zostaje wypromieniowane już przy stosunkowo niewielkim podwyższeniu się temperatury.

II. Przypadek sił zewnętrznych

1. Wzory na wychylenie

Wysokie rozrzedzenie konieczne, by Brownowski obrót radioaktywny był dostrzegalny, sprawia, iż najprzejrzystszą sytuację eksperymentalną napotykamy w dziedzinie ciałek pozostających pod działaniem sił sprężystych, tu bowiem wykonano szereg doświadczeń nad ruchami Browna stosując niskie ciśnienia. Były one realizacją pomysłów Smoluchowskiego. Na Zjeździe Przyrodników w Münster w r. 1912 Smoluchowski[18]), podając odnośne rachunki, zaproponował:

1) zawieszenie lusterka o minimalnych rozmiarach na cienkiej nitce kwarcowej, grubości 10^{-5} cm — chodziło o zbadanie ruchu obrotowego lusterka,

2) obserwację swobodnego końca takiej nitki.

Doświadczenie drugie zostało wykonane w r. 1925 przez A. Houdijka i P. Zeemana[19]) oraz przez Einthovena i współpracowników[20]), szczególnie płodnym okazał się jednak pomysł dotyczący lusterka.

---

*) Że przy takim założeniu wzór (18) może być użyty do oszacowania, wynika z rezultatów Milatza i Ornsteina l. c.

Zrealizowali go Gerlach i Lehrer w r. 1927 [21]); teoretyczną stroną doświadczenia zajęli się Uhlenbeck i Goudsmit[22]), następnie szereg prac ogłosił na ten temat E. Kappler[9,23]).

Równanie ruchu dla ciałka, na które działa siła sprężysta f, ma postać:

$$M \frac{du}{dt} + fx = -\beta u + F(t). \tag{22}$$

Gdy chodzi o ruch obrotowy, np. lusterka zawieszonego na nitce, M oznacza moment bezwładności, f moment kierujący nici; F(t) jest momentem sił fluktuacyjnych, wywołujących obrót Browna. Wszystkie wielkości odniesione są do osi obrotu.

Po podzieleniu przez M otrzymujemy:

$$\frac{du}{dt} + w^2 x = -\beta_1 x + A(t); \quad w^2 = \frac{f}{M}, \quad \beta_1 = \frac{\beta}{M}, \quad A(t) = \frac{F(t)}{M}$$

i dalej*) przyjmując w odniesieniu do F(t) znów założenia Ornsteina (zob. I,2):

$$\overline{s^2}^{u_0 x_0} = \frac{1}{(\varphi_2 - \varphi_1)^2} \left\{ \left[-(u_0 - \varphi_2 x_0)\, e^{\varphi_1 t} + (u_0 - \varphi_1 x_0)\, e^{\varphi_2 t} \right]^2 \right. \tag{23}$$

$$\left. - \vartheta \left[\frac{1}{2\varphi_1}\left(1 - e^{2\varphi_1 t}\right) + \frac{1}{2\varphi_2}\left(1 - e^{2\varphi_2 t}\right) - \frac{2}{\varphi_1 + \varphi_2}\left(1 - e^{(\varphi_1+\varphi_2)t}\right) \right] \right\}.$$

Średnia wartość odnosi się do cząstek, które miały wspólne położenie początkowe i tę samą szybkość, stąd znaczek $u_0 x_0$; φ_1 i φ_2 są skrótami:

$$\varphi_1 = -\frac{\beta_1}{2} + \sqrt{\frac{\beta_1^2}{4} - w^2}, \qquad \varphi_2 = -\frac{\beta_1}{2} - \sqrt{\frac{\beta_1^2}{4} - w^2}.$$

Podobnie jak poprzednio ϑ jest określone przez wzór:

$$\vartheta = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\delta)\, d\delta, \quad \text{gdzie} \quad H(\delta) = \frac{1}{M^2} \overline{F(t)\, F(t+\delta)}.$$

Po dostatecznie długim czasie wyrazy wykładnicze znikają i

$$\overline{s^2} = \frac{\vartheta}{2 w^2 \beta_1} = \frac{\vartheta M^2}{2 f \beta}. \tag{24}$$

Z równania ruchu wynika związek między prędkością kątową i ϑ, analogiczny do (24):

$$\overline{u^2} = \frac{\vartheta}{2\beta_1}.$$

*) Przedstawienie niniejsze opiera się na ujęciu E. Kapplera w Ann. d. Phys. 31, 377, (1938).

Według prawa ekwipartycji energii jest:

$$\overline{u^2} = \frac{kT}{M};$$

stąd

$$\vartheta = 2\,\frac{\beta_1}{M}\,kT = 2\,\frac{\beta}{M^2}\,kT$$

i (25)

$$\overline{s^2} = \frac{kT}{f}.$$

Średni kwadrat przesunięcia nie zależy od rozmiarów ciała, ani od tarcia; nie zależy też od czasu.

W przypadku ciała radioaktywnego we wzorze (22) wystąpi po prawej stronie jeszcze moment F_1, wywołany emisjami. Jeżeli znów pominiemy F w porównaniu z F_1 możemy przejąć równanie (22) i rozwiązanie (24), pisząc F_1 zamiast F. Wielkość ϑ musi być teraz obliczona explicite. Podobnie jak poprzednio zastosujemy metodę Milatza i Ornsteina.

Przypuśćmy, że lusterko zawieszone na nitce pokryte jest cienką warstewką substancji radioaktywnej, wysyłającej promienie α. Przyjmijmy dla prostoty, że emisje odbywają się wyłącznie w trzech prostopadłych do siebie kierunkach. Prostopadle do powierzchni lustra wybiegnie wtedy 1/6 powstających cząstek (cząstki skierowane do środka ulegają absorpcji). Siła działająca za każdym razem na lusterko jest stała — przypuśćmy, że wynosi ona K jednostek. Natomiast moment siły zmienia się wraz z odległością od osi obrotu. Średnia jego wartość F_1 równa się $+ KR/2$, gdy emituje np. prawa część przedniej strony lusterka i $- KR/2$, gdy emituje lewa; $2R$ oznacza szerokość lustra.

Przejmiemy teraz rozumowanie podane w rozdziale I, 2. Zachowując oznaczenia tam wprowadzone (τ czas między dwiema emisjami prostopadłymi do powierzchni zwierciadła) i zastępując formalnie ciałko emitowane przez uderzające, napiszemy równanie ruchu dla cząstki lekkiej:

$$m\ddot{y} = K, \quad m\dot{y} = -\,mv/2 + Kt\,.$$

Stąd czas zderzenia:

$$\tau_1 = \frac{mv}{K}.$$

Jeżeli nie ma zderzenia (emisji), moment sił jest zerem, w przeciwnym razie wynosi albo $KR/2$, albo $-KR/2$. Prawdopodobieństwo, że zajdzie jeden z tych ostatnich przypadków, jest $\tau_1/2\tau$ i tabelka 1 ma postać:

Wartość F_1	Prawdopodobieństwo
0	$1 - mv/K\tau$
$- KR/2$	$mv/2K\tau$
$KR/2$	$mv/2K\tau$

Przy obliczeniu $\overline{F_1(t)\, F_1(t+\delta)}$ wartości różne od zera otrzymamy tylko, gdy $F_1(t) = F_1(t+\delta)$.

Wobec tego:

$$\overline{F_1(t)\, F_1(t+\delta)} = \frac{K^2 R^2}{4} \frac{mv}{2K\tau} \left\| \frac{\tau_1 - \delta}{\tau_1} \right\| + \frac{K^2 R^2}{4} \frac{mv}{2K\tau} \left\| \frac{\tau_1 - \delta}{\tau_1} \right\|$$

$$= \frac{mv\, R^2}{4\tau} K \left\| \frac{\tau_1 - \delta}{\tau_1} \right\|.$$

Kolejne człony iloczynu przedstawiają wartość funkcji $F_1(t)\, F_1(t+\delta)$, prawdopodobieństwo wystąpienia tej wartości i prawdopodobieństwo trwałości sytuacji. Ta ostatnia wielkość jest jednaka dla F_1 i dla K; obliczenie podane w rozdziale I 2 pozostaje więc w mocy.

Po scałkowaniu mamy:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(t)\, F_1(t+\delta)}\, d\delta = 2 \frac{mvR^2}{4\tau} K \frac{\tau_1}{2} = \frac{m^2 v^2 R^2}{4\tau}$$

i

$$\vartheta = \frac{1}{M^2} \frac{m^2 v^2 R^2}{4\tau}.$$

Średni kwadrat wychylenia równa się według (24):

$$\overline{s_r^2} = \frac{\vartheta M^2}{2 f \beta} = \frac{1}{8} \frac{m^2 v\, R^2}{f \beta \tau}.$$

Jeżeli n oznacza liczbę cząstek emitowanych na zewnątrz w ciągu sekundy (prostopadle do zwierciadła), wówczas

$$\overline{s_r^2} = \frac{1}{8} \frac{m^2 v^2 R^2}{f \beta} n. \tag{26}$$

Ponieważ wzory Zeilingera na współczynnik oporu odnoszą się do ciałek kulistych, wyprowadzimy jeszcze wzór na przesunięcie i w tym przypadku. Zakładamy więc, że na cienkiej nitce zawieszono kulkę, pokrytą preparatem wysyłającym promienie α. Niech cząstka wybiega z punktu P (por. rys. 2, rozdz. I, 5). Siłę przyśpieszającą cząstkę oznaczymy przez K. Jej moment względem osi z, $p_z = [\vec{R}\vec{K}]_z$ będzie zależał od położenia punktu P i od kierunku emisji. By mieć uproszczony punkt wyjścia wprowadzimy wartość średnią. Przejmując rachunki z rozdziału I, 5, w których mv zastąpimy przez K, otrzymamy na średni kwadrat $\overline{p_z^2} = 2K^2R^2/9$. W dostatecznym przybliżeniu

$$\bar{p}_z = \sqrt{\overline{p_z^2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{3} RK.$$

Możemy więc przyjąć, że przy każdej emisji wystąpi moment obrotowy względem osi z równy albo $\sqrt{2}\,RK/3$, albo $-\sqrt{2}\,RK/3$. Rozumowanie dalsze przebiega jak poprzednio. Tabelka 1 będzie miała postać:

Tabelka 1.

Wartość F_1	Prawdopodobieństwo
0	$1 - \frac{mv}{K\tau}$
$-\frac{\sqrt{2}}{3}KR$	$\frac{mv}{2K\tau}$
$+\frac{\sqrt{2}}{3}KR$	$\frac{mv}{2K\tau}$

Dalej $$\overline{F_1(t)\,F_1(t+\delta)} = \frac{2}{9} K^2R^2 \frac{mv}{K\tau} \left\| \frac{\tau_1 - \delta}{\tau_1} \right\|.$$

Całka średniej wartości równa się:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(t)\,F_1(t+\delta)}\,d\delta = 2\,\frac{2}{9}\,\frac{mvR^2}{\tau}\,K\,\frac{\tau_1}{2} = \frac{2}{9}\,\frac{m^2v^2R^2}{\tau}.$$

Jeżeli n oznacza liczbę emisji na sekundę, n* liczbę emisji na cm² i sekundę,

$$\overline{s_r^2} = \frac{1}{9}\,\frac{m^2v^2R^2}{f\beta}\,n = \frac{4\pi}{9}\,\frac{m^2v^2R^4}{f\beta}\,n^*. \tag{27}$$

Skorzystamy z otrzymanych rezultatów, by uzasadnić jeszcze raz wzór (20) na ruch obrotowy kulki swobodnej, otrzymany poprzednio inną drogą.

Momenty sił, działające wskutek emisji, są jednakie tak dla ciałka poddanego siłom sprężystym, jak i dla swobodnego. W przypadku kulki swobodnej całka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(t)\, F_1(t+\delta)}\, d\delta$$

będzie więc miała wartość wyżej wyliczoną. Równanie Langevina dla (radioaktywnego) ruchu obrotowego ma postać:

$$M \frac{du}{dt} = -\beta u + F_1(t),$$

a więc postać (9); M wszakże jest teraz momentem bezwładności, $F_1(t)$ momentem sił fluktuacyjnych (względem np. osi z). F(t), charakterystyczne dla zwykłego ruchu Browna zostało pominięte, podobnie jak w I, 2.

Interesujące nas rozwiązanie dane jest przez (6):

$$\overline{s_r^2} = \frac{\vartheta}{\beta_1^2}\, t, \quad \beta_1 = \frac{\beta}{M}.$$

Wymieniona poprzednio całka określa wielkość ϑ:

$$\vartheta = \frac{1}{M^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(t)\, F_1(t+\delta)}\, d\delta = \frac{1}{M^2}\, \frac{2}{9}\, \frac{m^2 v^2 R^2}{\tau}.$$

Stąd
$$\overline{s_r^2} = \frac{2}{9}\, \frac{m^2 v^2 R^2}{\beta^2 \tau}\, t.$$

Biorąc pod uwagę, że (por. (21))

$$\frac{2}{9}\, m^2 v^2 R^2 = \overline{p_z^2}$$

i wprowadzając n, liczbę cząstek emitowanych na sekundę zamiast $1/\tau$, otrzymamy:

$$\overline{s_r^2} = \frac{\overline{p_z^2}}{\beta^2}\, n\, t,$$

t. j. wzór (20).

2. Przykłady: Czas minimalny obserwacji.

W doświadczeniach Gerlacha i Lehrera a następnie Kapplera ciałkiem badanym było lusterko o powierzchni około 1 mm^2, zawieszone na nitce kwarcowej grubości kilku dziesiątych mikrona. Światło odbite od lusterka znaczyło jego ruch obrotowy; u Kapplera padało ono na przesuwaną taśmę fotograficzną, rysując zygzakowatą krzywą o ogólnym kształcie sinusoidy. Badania potwierdziły wzór (25), w szczególności niezależność średniego kwadratu wychylenia od oporu ośrodka. Okoliczność ta stanowi novum w porównaniu z ruchem cząstek swobodnych; wspomniani badacze upewnili się stosując niskie ciśnienia, do 10^{-4} mm Hg włącznie. Dokładność, jaką osiągnął Kappler obliczając np. stałą Boltzmanna, wynosiła 1%. Seria pomiarów rozciągała się na kilkanaście godzin.

Skorzystamy z danych Kapplera (Ann. d. Physik, 31, 377, 1938), by oszacować wychylenie lusterka w przypadku, gdy jest ono pokryte warstewką radioaktywną.

Przy ciśnieniu kilku 1/100 mm Hg współczynnik oporu β wynosił $7{,}7\ 10^{-8}$ (w jedn. cgs), lusterko miało powierzchnię 0,7 mm^2. Ponieważ opór zmienia się proporcjonalnie do rozrzedzenia, przy ciśnieniu kilku 10^{-5} mm Hg β równałoby się $7{,}7.10^{-11}$, liczbę tę podstawimy do wzoru (26)

$$\overline{s_r^2} = \frac{1}{8} \frac{m^2 v^2 R^2}{f \beta} n;$$

bok lusterka 2R = 0,84 mm, temperatura — pokojowa. Liczba emisji jednostronnych na cm^2 i sekundę wynosiła dla preparatu Curie i Joliot $1{,}1.10^{10}$; liczbę tę musimy pomnożyć przez 1/3 (przypuszczamy, że emisje odbywają się wyłącznie w trzech do siebie prostopadłych kierunkach) i przez powierzchnię zwierciadła (obie strony lustra). Pęd cząstki α wynosi 10^{-14}. Po podstawieniu otrzymamy:

$$\overline{s_r^2} = 1{,}5 \frac{1}{f} 10^{-14},$$

podczas gdy wychylenie w zwykłym ruchu Browna wynosiłoby według (25)

$$\overline{s_{Br}^2} = 4{,}1 \frac{1}{f} 10^{-14}.$$

Moment kierujący f u Kapplera miał wartości od 10^{-6} do 10^{-9}.

W temperaturze 100°K mielibyśmy

$$\overline{s_{Br}^2} = 1{,}38 \frac{1}{f} 10^{-14},$$

natomiast $\overline{s_r^2}$ zmniejszyłoby się w mniejszym stopniu ($\sqrt{3}$ razy, sądząc ze wzoru Zeilingera na współczynnik oporu).

Biorąc pod uwagę, że Kappler osiągnął dokładność 1%, efekt powinien być jeszcze widoczny także pod ciśnieniem 10^{-4} mm Hg, t. j. w warunkach, w których pracowali Gerlach i Kappler.

W niskiej temperaturze ciepło dostarczone przez substancję promieniotwórczą zwiększy różnicę między wychyleniem lusterka zwykłego i lusterka pokrytego preparatem radioaktywnym podobnie jak w przypadku ciała swobodnego.

Podobne wyniki otrzymamy dla zawieszonej kulki. Załóżmy, że ciśnienie wynosi 10^{-3} mm Hg, wtedy $\beta = 7 . 10^{-5} R^4$ (w temperaturze 100°K). Po podstawieniu do wzoru (27)

$$\overline{s_r^2} = \frac{4\pi}{9} \frac{m^2 v^2 R^4 n^*}{7 \cdot 10^{-5} f R^4} = \frac{4\pi}{9} \frac{m^2 v^2 n^*}{7 \cdot 10^{-5} f};$$

jest ono niezależne od rozmiarów ciała. Wyliczenie daje:

$$\overline{s_r^2} = 2{,}2 \cdot 10^{-14}/f,$$

podczas gdy

$$\overline{s_{Br}^2} = 1{,}38 \cdot 10^{-14}/f.$$

Pod ciśnieniem 10^{-4} mm Hg $\overline{s_r^2}$ wzrośnie 10-krotnie, natomiast $\overline{s_{Br}^2}$ pozostanie niezmienione.

Przy stosowaniu niskich ciśnień należy jednak mieć na uwadze, że wtedy czas relaksacji, t.j. $t^* = M/\beta$ może przybierać wartości znaczne, jeżeli równocześnie nie zmniejszymy momentu bezwładności. W drugiej swojej pracy nad ruchami Browna Einstein[24]) okazał, że wzór (7) — wobec tego też (6), (14) itp. — jest tylko wtedy słuszny, jeżeli porównujemy obserwacje, między którymi upłynął czas duży wobec M/β. Rozwiązanie prawdziwe dla jakiegokolwiek czasu podali Ornstein[25]) i Fürth[26]) niezależnie od siebie. Dla ruchu postępowego jest nim wzór (4). Ze wzoru tego widać, że przesunięcie zależy od warunków początkowych. Gdy np. szybkość początkowa jest duża, cząstka przebiegnie odległość większą, niż wypada ze wzoru Einsteina. Odstępstwo to jednak maleje z czasem. Porównując więc obserwacje bliskie w czasie, należy stosować wzór pełny (4), Jednak i wtedy różnica czasu nie powinna być zbyt mała, jeżeli chcemy uchwycić zjawiska charakterystyczne dla ruchu Browna — człony zawierające ϑ byłyby zbyt małe, a ϑ jest właśnie wyrazem fluktuacji Browna.

W przykładzie podanym w rozdziale I, 5 czas relaksacji wynosi około 15 minut (w założeniu, że kulka sporządzona jest z żelaza). W przypadku lusterka omówionego poprzednio moment bezwładności (zmierzony przez Kapplera) równał się $M = 2{,}35 \cdot 10^{-7}$; przy ciśnieniu kilku 10^{-4} mm Hg otrzymamy na t^* kilkaset sekund, przy ciśnieniu kilku 10^{-5} mm Hg już około godziny (50 minut).

III. Wnioski dotyczące neutrina

„Nie każdy byłby skłonny przyznać, że wierzy w istnienie neutrina, ale można powiedzieć, że bodajże nie ma nikogo wśród nas, któremu by hipoteza o neutrinie nie była pomocna, gdy myśli o rozpadzie beta”.[27])

Użyteczność hipotezy o neutrinie nie ogranicza się do zakresu zjawisk, dla których Pauli ją wprowadził. Późniejsze odkrycia w dziedzinie promieniotwórczości (np. promieniowanie K), teoria promieni kosmicznych wymagają jej w równej mierze; zastosowano ją także w astrofizyce[28]). Doświadczalne jej podstawy są jednak w dalszym ciągu niedostateczne.

Właściwy dowód istnienia neutrina polegałby na wykazaniu, że wywołuje ono skutki nie tylko w miejscu, gdzie powstaje. Usiłowania zmierzające w tym kierunku, np. do wykrycia jonizacji, dały wynik negatywny*). Wydaje się, że na razie tego rodzaju doświadczenia zgóry skazane są na niepowodzenie.

Pozostaje wobec tego program skromniejszy: znalezienie odrzutu wywołanego przez emisję neutrina. Energia neutrina jest znana, mianowicie równa deficytowi będącemu powodem hipotezy; do wyliczenia odrzutu potrzebna jest poza tym jeszcze znajomość masy. Istnieją w tym względzie oszacowania teoretyczne; z teorii Fermiego jak i Konopińskiego — Uhlenbecka wynika górna granica dla masy neutrina, wynosząca 0,2 masy elektronu. Badania nad bilansem energetycznym przy niektórych reakcjach cyklicznych oraz nad rozpadem H^3 (energia będąca tu do dyspozycji wynosi zaledwie 11 ± 2 keV) potwierdziły te przewidywania, obniżając jeszcze blisko dziesięciokrotnie górną granicę masy. Można zatem bez większego błędu przyjąć, że masa neutrina równa jest zeru.

Wielkość, która ma być zmierzona, jest więc określona; jest ona niestety bardzo mała.

Zastosowanie komory Wilsona nie dałoby wyniku przy zwykłym jej działaniu. Dodatkowe manipulacje wprowadzone wobec tego przez Crane'a i Halperna[29]) wymagają interpretacji, która z kolei jest sporna[30]). Po wykryciu promieniowania K, Alichanow i Alichanian[31]) oraz K. C. Wang[32]) zauważyli, że zjawisko to wyjątkowo dobrze nadaje się do poszukiwania odrzutu, który powinien mieć miejsce przy emisji neutrina. Doświadczenie tego rodzaju zostało wykonane przez Allena[33]). Płytka pokryta możliwie jednoatomową warstwą preparatu otoczona była urządzeniem, przeznaczonym do rejestracji atomów odrywających się wskutek odrzutu. Allen otrzymał wynik pozytywny**). Jednak doświadczenie to „nie może być uważane za decydujący dowód istnienia neutrina, gdyż według opinii szeregu autorów, metoda wymaga jeszcze stosunkowo daleko idących poprawek” [34]).

We wszystkich tych eksperymentach możliwość powodzenia zależała od wykrycia swobodnych atomów odrzutu. W tym właśnie punk-

*) Literaturę można znaleźć w artykule A.P. Grinberga w Usp. Fiz. Nauk, 26, 189 (1944) oraz u H. R. Crane'a, Rev. of Mod. Physics 20, 278 (1948).

**) Podobne rezultaty otrzymał B. T. Wright[35]).

cie, stanowiącym główną trudność dotychczasowych doświadczeń, różniłaby się metoda, która nasuwa się w naszym związku. Metoda ta polegałaby na wykryciu ruchu Brownowskiego, wywołanego emisjami neutrina.

Substancją użytą w eksperymencie Allena było B_e^7. Izotop ten został zbadany przez Rumbaugha, Robertsa i Hafstada[36]). Powstaje on w wyniku reakcji:

$$L_i^6 + D^2 \rightarrow B_e^7 + n \qquad (3{,}3\ M_eV)$$

i rozpada się według następującego schematu:

$$B_e^7 + e_k \rightarrow L_i^7 + \eta \qquad (1\ M_eV)\,;$$

w dziesięciu procentach natomiast zachodzi:

$$B_e^7 + e_k \rightarrow (L_i^7)^* + \eta \qquad (0{,}55\ M_eV)\,,$$

$$(L_i^7)^* \rightarrow L_i^7 + \gamma \qquad (0{,}45\ M_eV)\,.$$

Haxby i współpracownicy[37]) podali później 0,87 M_eV na wyzwoloną energię zamiast 1 M_eV.

Przypuśćmy, że ciałko nadające się do ruchu Browna zawiera pewną ilość B_e^7. Pęd neutrina dany jest przez wzór:

$$p = \frac{1}{c}\,(E_k^2 + mc^2\,E_k)^{1/2},$$

gdzie c — szybkość światła,
m — masa spoczynkowa,
i E_k — energia kinetyczna neutrina.

Założenie, że masa spoczynkowa neutrina równa jest zeru, nie spowoduje dostrzegalnej różnicy; wtedy otrzymuje się na pęd (dla 0,87 M_eV) $p = 0{,}47 \cdot 10^{-16}$ jedn. c. g. s. W dalszych rachunkach pominiemy promieniowanie γ i okoliczność, że $^1/_{10}$ część neutrinów ma nieco mniejszy pęd. Niech ciałkiem zawierającym pewien procent B_e^7 będzie lusterko Gerlacha. Wychylenie wywołane obecnością preparatu dane jest wtedy przez wzór (26):

$$\overline{s^2} = \frac{1}{8}\,\frac{m^2v^2R^2}{f\beta}\,n$$

i zależy od liczby emisji. Biorąc pod uwagę, że 1 g B_e^7 zawiera $0{,}86.10^{23}$ atomów i że czas połówkowy rozpadu wynosi według Allena 43 dni, otrzymany na stałą rozpadu $1{,}9.10^{-7}$ i liczba atomów rozpadających się na g i sekundę będzie $n = 1{,}6\,10^{16}$.

Załóżmy, że lusterko zawiera 4.10^{-5} g B_e^7, wtedy $n = 4.1{,}6.(1/3).10^{11}$ (tylko trzecia część wybiega prostopadle do lusterka). Podstawiając poza tym liczby z rozdziału II, 2: $\beta = 7{,}7.10^{-11}$, $2R = 0{,}84$ mm oraz za pęd $0{,}47.10^{-16}$ otrzymujemy w temperaturze pokojowej, przy ciśnieniu kilku 10^{-5} mm Hg:

$$\overline{s_r^2} = 1{,}3 \cdot 10^{-15}/f\,.$$

Zwykłe wychylenie Browna w temperaturze $100\,^\circ$K wyniesie natomiast według (25):

$$\overline{s_{Br}^2} = 1{,}38 \cdot 10^{-14}/f$$

(wielkość $\overline{s_r^2}$ w tej temperaturze byłaby nieco mniejsza, niż podano wyżej, przypuszczalnie około $\sqrt{3}$ razy).

Obniżenie ciśnienia np. o jeden rząd wielkości zwiększyłoby $\overline{s_r^2}$ dziesięciokrotnie, podczas gdy zwykły ruch Browna pozostałby niezmieniony. W tym samym stosunku wzrósłby jednak czas relaksacji, który w powyższym przykładzie wynosił 50 minut.

Bardziej przejrzyście przedstawia się sytuacja w przypadku zawieszenia kulki, gdyż β jest wtedy określone przez wzór Zeilingera. Przypuśćmy, że kulka próbna pokryta jest warstewką B_e^7 o grubości ΔR. Jeżeli ΔR jest małe w porównaniu z R, masa tej warstewki wyniesie $4\pi R^2 \Delta R d$ (d — gęstość) i liczba emisji na sekundę będzie równa $n = 4\pi R^2 \Delta R d n_1$; n_1 oznacza liczbę emisji na g i sek. i wynosi dla B_e^7 $1{,}6.10^{16}$. Za gęstość B_e^7 przyjmiemy 1,8 g/cm^3*). Z równania (27) otrzymujemy:

$$\overline{s_r^2} = \frac{1}{9}\,\frac{m^2 v^2 R^2}{f\beta}\,n = \frac{4\pi}{9}\,\frac{m^2 v^2 R^4}{f\beta}\,\Delta R\, n_1 d\,.$$

Wyrażenie to nie zależy od promienia, ponieważ β jest proporcjonalne do R^4.

Jeżeli np. ciśnienie wyniesie 10^{-4} mm Hg i grubość warstwy B_e berylu $\Delta R = 10^{-4}$ cm, temperatura 100°K, wtedy:

$$\overline{s_r^2} = 1{,}2 \cdot 10^{-15}/f\,;$$

tę samą wartość otrzymamy dla warstewki $\Delta R = 10^{-5}$ cm przy ciśnieniu 10^{-5} mm Hg.

W obu przypadkach średni kwadrat wychylenia w zwykłym ruchu Browna wyniesie (przy 100°K):

$$\overline{s_{Br}^2} = 1{,}38 \cdot 10^{-14}/f\,.$$

Rola ciśnienia została już omówiona — obniżenie ciśnienia zwiększy efekt bądź też pozwoli użyć słabszego preparatu

---

*) Liczba ta odnosi się do B_e^9 w temperaturze pokojowej.

Czas relaksacji M/β w przypadku ciałka kulistego dany jest przez

$$t^* = \frac{M}{\beta} = \frac{\frac{2}{5} R^2 \frac{4}{3} \pi R^3 d}{\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi m}{k}} \frac{p}{\sqrt{T}} R^4} = c \frac{R\sqrt{T}}{p},$$

gdzie c jest stałym współczynnikiem. Jak widać, obniżenie ciśnienia pociąga za sobą konieczność zmniejszenia rozmiarów ciałka próbnego, jeżeli t^* ma pozostać stałym. W podanym przykładzie czas relaksacji wynosiłby około godziny dla kulki o promieniu $^1/_{10}$ mm przy ciśnieniu 10^{-4} mm Hg, jeżeli za d podstawimy gęstość berylu.

Wpływ temperatury na $\overline{s_r^2}$ uwidacznia się tylko za pośrednictwem tarcia w ten sposób, że $\overline{s_r^2}$ jest proporcjonalne do pierwiastka kwadratowego z temperatury bezwzględnej. Zwykły ruch Browna natomiast jest proporcjonalny wprost do temperatury bezwzględnej. Im niższa temperatura, tym korzystniejsze są warunki dla uwidocznienia radioaktywnego ruchu Browna.

W rozdziale niniejszym ograniczyliśmy się do ciałek poddanych siłom sprężystym. Podobne rezultaty otrzymalibyśmy w przypadku ciałka mogącego się swobodnie obracać, przypadku, który może być zrealizowany za pomocą metody magnetycznego zawieszenia.

LITERATURA

1. Średnia wartość ze wszystkich pomiarów dla ruchu postępowego; cytuję według J. Perrin: Die Brownsche Bewegung und die wahre Existenz der Moleküle, Kolloidchemische Beihefte, Dresden 1910, str. 60. Z pomiarów innego rodzaju otrzymywano wówczas wartości leżące między $6{,}2.10^{23}$ i $7{,}1.10^{23}$; por. poz. 11 niniejszego spisu, str. 37 i 38.
2. E. v. Schweidler — Premier Congrès Int. pour l'Etude de la Radiologie et de l'Ionisation, Liège 1905.
3. Chr. Wiener — Ann. d. Physik und Chemie 118, 79 (1863).
4. v. Naegeli — Münch. Sitzungsber., Math.—Physik. Kl. 9, 389 (1879).
5. M. Smoluchowski — Ann. d. Phys. 21, 756 (1906).
6. P. Langevin — C. r. Acad. Sci. Paris 146, 503 (1908).
7. L. S. Ornstein — Verslagen Amst. 25, 1005 (1918).
8. G. E. Uhlenbeck i L. S. Ornstein — Phys. Rev. 36, 823 (1930) i L. S. Ornstein i W. R. van Wijk — Physica, 1, 235 (1934).
9. E. Kappler — Ann. d. Phys. 31, 377 (1938).
10. J. M. Milatz i L. S. Ornstein — Physica 7, 793 (1940).
11. G. L. de Haas-Lorentz — Die Brownsche Bewegung und einige verwandte Erscheinungen, Braunschweig, 1913.
12. A. Einstein i Hopf — Ann. d. Phys. 33, 1105 (1910).
13. V. Pospisil — Phys. Zeitschr. 30, 82 (1929).
14. J. W. Beams — Rotors Driven by Light Pressure, Phys. Rev. 72, 987 (1947); por. też L. E. Mac Hattie — Rev. of sc. Instr. 12, 429 (1941).
15. F. Zeilinger — Ann. d. Phys. 75, 403 (1924).
16. I. Curie i Fr. Joliot — Journ. chim. phys. 28, 201 (1931).
17. K. F. Herzfeld — Kinetische Theorie der Wärme, Braunschweig 1925, str. 103.
18. M. Smoluchowski — Phys. Zeitschr. 13, 1069 (1912).
19. A. Houdijk i P. Zeeman — Proc. Amst. 28, 52 (1925).
20. W. Einthoven — Physica 5, 358, Nr 11/12 (1925).
21. W. Gerlach i E. Lehrer — Naturw. 15, 15 (1927).
22. G. E. Uhlenbeck i S. Goudsmit — Phys. Rev. 34, 145 (1929).
23. E. Kappler — Ann. d, Phys. 5 F 11, 233 (1931); Ann. d. Phys. 5 F 15, 545 (1932).
24. A. Einstein — Ann. d. Phys. 19, 371 (1906).
25. L. S. Ornstein — Proc. Amst. 21, 96 (1918).
26. R. Fürth — Zeitschr. f. Phys. 2, 244 (1920).
27. H. R. Crane — Rev. of Mod. Physics 20, 278 (1948).
28. G. Gamow i M. Schoenberg — Phys. Rev. 58, 1117 (1940).
29. H. R. Crane i H. Halpern — Phys. Rev. 53, 789 (1938); 56, 232 (1939).
30. Por. też R. S. Ingarden — Acta Phys. Polonica 9, 109 (1948).
31. Por. A. P. Grinberg — Usp. Fiz. Nauk 26, 189 (1944).
32. K. C. Wang — Phys. Rev. 61, 97 (1942).
33. J. Allen — Phys. Rev. 61, 692 (1942).
34. K. C. Wang — Phys. Rev. 71, 645 (1947).
35. B. T. Wright — Phys. Rev. 71, 839 (1947).
36. L.H. Rumbaugh, R.B. Roberts i L.R. Hafstad — Phys. Rev. 54, 657 (1938)
37. R O. Haxby, W. E. Shoupp, W. E. Stephens i W. H. Wells — Phys Rev. 58, 1035 (1940).

SUMMARY

A radioactive particle suspended in a gas or liquid gets impacts not only from the molecules of the surrounding medium but from the ejected particles as well. Every single emission causes a recoil comparable in effect with that of a striking molecule. In addition to the ordinary Brownian movement there will be another, similar movement also due to a great number of impulses fulfilling the laws of probability.

The investigation of this „radioactive" Brownian movement may be of interest for the following reasons:

1. It would provide a new approach to the study of the probability forces and could illustrate the statistical properties of radioactive substances just as the ordinary Brownian movement does for the kinetic theory of matter.

2. It seems that in this way it might be possible to get experimental evidence for the existence of the neutrino.

In the following we shall give the formulae (deduced in extenso in the Polish text) for the displacement of a radioactive particle and discuss the experimental possibilities.

I. Free Particles

There is a close resemblance between a particle hit by surrounding molecules and that suffering recoils during the disintegration of its radioactive components. But on the other hand there are some differencies between these two phenomena.

In the simple Brownian movement the distribution of the impacts depends on the velocity of the particle; the greater the velocity, the smaller the number of collisions accelerating the motion. As a result the particle will move according to the law of equipartition of energy.

In the case of a radioactive grain the distribution of the recoils does not depend on the velocity of the grain. The situation is here rather a simpler one, but on the other hand the usual methods of calculating the displacement in the Brownian movement based on the law of equipartition of energy cannot be applied here, and another method going somewhat deeper into the details has to be found.

It is evident that the phenomenon under consideration is always accompanied by the normal Brownian movement.

The modern theory of the Brownian movement generally starts with Langevin's equation

$$M \frac{du}{dt} = K(t) = -\beta u + F(t). \tag{1}$$

The force K is resolved into two parts, the first representing the friction, the second due to the irregular impulses. As shown by Ornstein[7,8] this equation can be solved on the following assumptions:

1. The mean value of F(t) at given t over an ensemble of particles which have started at $t = 0$ with the same velocity u_0 is zero, *i. e.* $\overline{F(t)} = 0$;

2. There will be correlation between the values of F(t) at diffe- times t and $t + \delta$ only when δ is very small *i. e.*

$$\overline{F(t)\, F(t+\delta)} = F^*(\delta),$$

where $F^*(\delta)$ is a function with a very sharp maximum at $\delta = 0$; if $\delta \neq 0$ the function decreases rapidly.

Writing

$$\frac{du}{dt} = -\beta_1 u + A(t), \text{ where } \beta_1 = \beta/M,\ A(t) = F(t)/M, \tag{2}$$

we get the following expressions for the mean square of the velocity and the displacement:

$$\overline{u}^{u_0} = u_0 e^{-\beta_1 t}, \quad \overline{u^2}^{u_0} = \frac{\vartheta}{2\beta_1}\left(1 - e^{-2\beta_1 t}\right) + u_0^2 e^{-2\beta_1 t}, \tag{3}$$

$$\overline{s^2}^{u_0} = \frac{\vartheta}{\beta_1^2} t + \frac{u_0^2}{\beta_1^2}\left(1 - e^{-\beta_1 t}\right)^2 + \frac{\vartheta}{2\beta_1^3}\left(-3 + 4e^{-\beta_1 t} - e^{-2\beta_1 t}\right), \tag{4}$$

where

$$\vartheta = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\delta)\, d\delta, \quad H(\delta) = \overline{A(t)\, A(t+\delta)} \tag{5}$$

or

$$H(\delta) = \frac{1}{M^2}\, \overline{F(t)\, F(t+\delta)}.$$

After sufficiently long time (5) and (4) become

$$\overline{u^2} = \frac{\vartheta}{2\beta_1}, \quad \overline{s^2} = \frac{\vartheta}{\beta_1^2} t. \tag{6}$$

The value of ϑ can be found with the help of the theorem of equipartition of energy

$\frac{kT}{M} = \overline{u^2} = \frac{\vartheta}{2\beta_1}$, (T—absolute temperature, k—Boltzmann's constant).

Substituting this into (6) we get the formula of Einstein

$$\overline{s^2} = \frac{2\,kT}{M\,\beta_1}\,t = \frac{2\,kT}{\beta}\,t\,. \tag{7}$$

If we now consider a radioactive grain, Langevin's equation can be written as follows

$$M\,\frac{du}{dt} = -\,\beta\,u + F(t) + F_1(t)\,. \tag{8}$$

The force contains now a third term F_1 due to the radioactive recoils and similar to F. Let us first assume that we can neglect the ordinary Brownian motion; then F can be omitted, and we get an equation similar to (1):

$$M\,\frac{du}{dt} = -\,\beta\,u + F_1(t)\,. \tag{9}$$

Assuming that F_1 fulfils the conditions of Ornstein we can use the previous results, especially the expression (6) for the mean square of the displacement

$$\overline{s_r^2} = \frac{\vartheta}{\beta_1^2}\,t\,, \tag{6a}$$

but ϑ determined above by means of the theorem of equipartition must now be computed explicitly.

This problem has been solved for the ordinary Brownian motion by Milatz and Ornstein[10]. Their method can be adapted to the case here considered.

Milatz and Ornstein use the following model. A material point P of the mass M is moving along a straight line. This point is exposed to the impacts of a number of small particles having the mass m, small compared with M. The impacts are acting from both sides at irregular intervals. It is assumed that the light particles disappear after the collision. To describe the interaction between the heavy and the light particles Milatz and Ornstein introduce a field of forces around P. In this field extending over a small distance the light particle is repelled by a constant force K sufficiently large to invert the velocity of an approaching particle.

In the case when P represents a radioactive grain we shall at first assume that the ordinary Brownian motion can be neglected. Then instead of striking molecules we have to consider emitted particles. Formally, however, there is no difference between both cases: a particle leaving P with the velocity v imparts to it the same impulse as a particle striking P with the velocity v/2; the change of momentum is in both cases the same, namely mv, as m is assumed to be small in comparison with M. In the following we may therefore speak about collisions according to the Milatz-Ornstein model. At first we shall limit our considerations to α particles.

Let τ be the mean time between two collisions. The mean number of particles striking P from the right is then $1/2\tau$, and from the left also $1/2\tau$. In the calculation given by Milatz and Ornstein these values depend on the velocity of P; the number of emitted particles is, however, indepedent of the velocity.

The duration of a collision τ_1 can be calculated by solving the following equations

$$m\ddot{y} = K\,, \quad m\dot{y} = -m\frac{v}{2} + Kt\,,$$

where y denotes the coordinate of the light particle, v/2 its velocity (it means that the velocity of an emitted particle is v). If

$$t = mv/2K\,,$$

the velocity of the particle is inverted. The duration of a collision is therefore

$$\tau_1 = \frac{mv}{K}\,. \tag{10}$$

Let us assume that there is no more than one collision at any moment. As shown by Milatz and Ornstein this assumption is irrelevant for the result.

The equation of motion of the heavy particle may be written

$$M\frac{du}{dt} = -\beta u + F_1(t)\,.$$

As long as a collision does not take place $F_1 = 0$. When a collision occurs, then $F_1 = K$ or $F_1 = -K$. The probability of the force K is $\tau_1/2\tau$, and so is the probability of the force $-K$. For the probability of the force zero we get therefore

$$1 - 2\frac{\tau_1}{2\tau} = 1 - \frac{mv}{K\tau}\,.$$

These probabilities are shown in Table I:

Table 1.

F_1	Probability
0	$1 - \frac{mv}{K\tau}$
$-K$	$\frac{mv}{2K\tau}$
$+K$	$\frac{mv}{2K\tau}$

Multiplying the values of the function F_1 by their probabilities and adding we get the mean value; it follows that $\overline{F_1} = 0$, whilst

$$\overline{F_1^2} = K^2 \frac{mv}{2K\tau} + K^2 \frac{mv}{2K\tau} = \frac{mv}{\tau} K$$

is different from zero.

To calculate ϑ given by (5)

$$\vartheta = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\delta)\, d\delta \ , \quad H(\delta) = \frac{1}{M^2} \overline{F_1(t)\, F_1(t+\delta)}$$

let us find the mean value $\overline{F_1(t)\, F_1(t+\delta)}$. We may distinguish the following cases:

a) The situation of the system (collision or free movement) is the same at the instants t and $t + \delta$; then $F_1(t+\delta) = F_1(t)$;

b) The situation is not the same; then we have $\overline{F_1(t)\, F_1(t+\delta)} = 0$, because $\overline{F_1(t+\delta)} = 0$. For, when *e. g.*, a collision is just over, we cannot predict anything as to the value of F after the collision.

We may therefore write:

$$\overline{F_1(t)\, F_1(t+\delta)} = K^2 \frac{mv}{2K\tau} \left\| \frac{\tau_1 - \delta}{\tau_1} \right\| + K^2 \frac{mv}{2K\tau} \left\| \frac{\tau_1 - \delta}{\tau_1} \right\| . \tag{11}$$

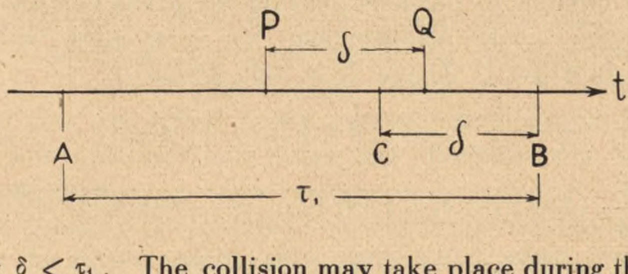
The first factor represents the value of $F_1(t)\, F_1(t+\delta)$, the second — the probability of the occurence of the situation, the third — the probability of its duration. The last term needs some explanation.

The meaning of the symbol $\|(\tau_1 - \delta)/\tau_1\|$ is:

$$\left\| \frac{\tau_1 - \delta}{\tau_1} \right\| = \frac{\tau_1 - \delta}{\tau_1}, \text{ if } \delta \leq \tau_1 \text{, and } = 0, \text{ if } \delta > \tau_1 .$$

In order to show that this expression gives the probability that a collision, acting at the time t is still going on at the time $t + \delta$, let us consider the situation shown in Fig. 1.

Fig. 1.



Assume that $\delta < \tau_1$. The collision may take place during the time interval $\tau_1 = AB$. Let P represent the point belonging to t, Q that belonging to $t+\delta$. If we assume that the collision is still going on, Q must lie on the left side of B and P on the left side of C, if $CB = \delta$.

The required probability is therefore

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\tau_1 - \delta}{\tau_1}.$$

If $\delta > \tau_1$, it is evident that the probability is zero.

For the value of $\overline{F_1(t)\, F_1(t+\delta)}$ we get then

(cf. 11) $$\overline{F_1(t)\, F_1(t+\delta)} = \frac{mv}{\tau} K \left\| \frac{\tau_1 - \delta}{\tau_1} \right\|,$$ and therefore

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(t)\, F_1(t+\delta)}\, d\delta = 2 \frac{mv}{\tau} K \frac{\tau_1}{2} = \frac{m^2 v^2}{\tau}, \tag{12}$$ and

$$\vartheta = \frac{1}{M^2} \frac{m^2 v^2}{\tau}. \tag{13}$$

The mean square of the displacement was shown to be

$$s_r^2 = \frac{\vartheta}{\beta_1^2} t.$$

Taking into account that (cf. 2) $\beta_1 = \beta/M$ and substituting (13) we obtain the required formula

$$s_r^2 = \frac{m^2 v^2}{\beta^2} \frac{1}{\tau} t = \frac{m^2 v^2}{\beta^2} n t, \tag{14}$$

where v is the velocity of the emitted particle, m its mass; it is assumed that the radioactive layer is so thin that practically it does not affect the velocity of particles traversing it. β is the resistance coefficient, t — time, n — number of particles emitted during the unit of time in the direction of a straight line, say, the x-axis. If we use an assumption known from the kinetic theory of gases, n will be equal to 1/3 of the number of particles leaving the grain per second.

To find the whole displacement we must start with the equation (8). The function H (δ) (cf. 5) is then given by

$$\begin{aligned} H(\delta) &= \frac{1}{M^2} \overline{[F(t) + F_1(t)]\,[F(t+\delta) + F_1(t+\delta)]} \\ &= \frac{1}{M^2} \overline{[F(t)\,F(t+\delta) + F_1(t)\,F_1(t+\delta) + F(t)\,F_1(t+\delta) + F_1(t)\,F(t+\delta)]} \\ &= \frac{1}{M^2} [\overline{F(t)\,F(t+\delta)} + \overline{F_1(t)\,F_1(t+\delta)}], \end{aligned}$$

for the mean values $\overline{F(t)\,F_1(t+\delta)}$ and $\overline{F_1(t)\,F(t+\delta)}$ vanish, F and F_1 being independent of each other.

Integrating $H(\delta)$ we obtain ϑ, which is therefore the sum of two terms relating to the ordinary Brownian movement and to the radioactive one; hence for the whole displacement:

$$\overline{s^2} = \overline{s^2_{Br}} + \overline{s^2_r}\,. \tag{15}$$

It may be noticed that the formula (14) can also be deduced following the line of reasoning used by G.L. de Haas-Lorentz[11].

In the case of the rotational Brownian movement one obtains in a similar way for the radioactive part

$$\overline{s^2} = n\,\frac{\overline{p_z^2}}{\beta^2}\,t\,, \tag{20}$$

where $\overline{s^2}$ denotes the mean square of the angular displacement, p_z the angular momentum of the emitted particle (both quantities referred to the axis of rotation), and n the number of ejected particles (per sec).

2. Experimental Possibilities

It can be shown that the equation (14) here derived for radioactive particles may also be used to estimate the ordinary Brownian displacement; mv means then the average change of momentum suffered by the particle each time a molecule collides with it. In both cases the displacement depends on the number of emissions (collisions) and the momentum of the ejected particle (colliding molecule). Now, it will be possible to observe the radioactive Brownian displacement, if its value exceeds the error made in measuring the ordinary Brownian movement. The momentum of an α particle is great (10^{-14} g cm/sec) compared with that of a molecule of, say, nitrogen (10^{-18} at normal temperatures), but the number of collisions exceeds so much the number of emitted particles that under normal conditions the radioactive displacement remains unobservable. If for example a suspended grain gives per cm^2 a beam of α particles corresponding to the disintegration of 1g Ra (1 Curie) *i. e.*, about 10^{10} particles per second, the number of molecules striking that area is 10^{23}/sec. in a gaseous medium, in liquids much more. Very low pressures and rather low temperatures are needed to change the situation.

At low pressure the friction decreases proportionally to the pressure. In this case the displacement of a radioactive grain increases rapidly (β^2 in the denominator), whilst for an ordinary grain the increase of the displacement is smaller, the number of collisions being also proportional to the pressure. Experimental investigations of the progressive Brownian movement in rarefied gases are very difficult, even if the pressure is not very low. But there should be no difficulty in measuring the rotational Brownian movement at low pressures — a point to which we want to call attention.

It has been found possible to suspend freely small ferromagnetic bodies by means of a magnetic field; further, in a series of experiments on the production of very intensive centrifugal fields J.W. Beams and collaborators could prove „that the frictional drag on a magnetically suspended spinning spherical rotor could be accounted for almost entirely by gaseous friction, even when the pressure surrounding the rotor was as low as 10^{-6} mm Hg. For example, when a magnetically supported 1.59 mm rotor spinning at about 100,000 r. p. s. in air at a pressure of 2.10^{-6} mm Hg was allowed to coast, it required about an hour for it to lose 0,1 percent of its rotational speed. The existence of this exceedingly low frictional torque suggested that it may be possible to drive magnetically suspended rotors in a good vacuum by light pressure".

There seems to be no doubt that this method offers the possibility to investigate the rotational Brownian movement even at very low pressures. Given this possibility we may also hope to observe the radioactive Brownian movement.

In order to get closer data we start from the formula (20). The quantity p_z denotes here the angular momentum of an ejected particle about the z - axis. Assuming that all directions are equally probable we obtain for the mean square about this axis:

$$\overline{p_z^2} = \frac{2}{9} m^2 v^2 R^2 ; \tag{21}$$

m — mass of an ejected particle,
v — its velocity,
R — radius of the (spherical) grain; it is assumed that the grain is covered with a thin α radioactive layer.

To determine β we can use the formula derived by Zeilinger[15] for spherical bodies in rarefied gases (free path large compared with the dimensions of the body). This formula gives for progressive motion:

$$\beta = \frac{8}{3} \sqrt{2\pi k T m} \, N R^2 ,$$

for rotational motion:

$$\beta = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi k T m} \, N R^4 ;$$

where R is the radius of the Brownian particle, m mass of a molecule of the surrounding medium, k Boltzmann's constant, T absolute temperature. The number of molecules per cm^3, N, is given by

$$N = p/kT \qquad (p - \text{pressure}).$$

Therefore β becomes in the case of rotation

$$\beta = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2\pi m}{k}}\,\frac{p}{\sqrt{T}}\,R^4 .$$

Taking for m the mass of a hydrogen molecule and assuming that the pressure is 10^{-3} mm Hg we get at 0°C

$$\beta = 4{,}2\cdot 10^{-5}\,R^4 ,$$

and at 100° K

$$\beta = 7\cdot 10^{-5}\,R^4 .$$

To make use of formula (20) the number of ejected particles must still be known. In the following we shall consider only α particles.

I. Curie and Fr. Joliot[16] obtained polonium preparations giving pro 1 mm^2 surface (into a space angle 2π) an ionisation current of 8000 electrostatic units. It corresponds to $1{,}3.10^{-6}$ g polonium/mm^2 (about 6 mC/mm^2). The total number of disintegrations is then $2{,}2.10^8/mm^2$. sec, the number of onesided emissions $1{,}1.10^8$ mm^2 sec, *i. e.* $1{,}1.10^{10}$ particles per cm^2 per sec.

Let us assume that the suspended spherical grain is covered with such a polonium preparation. Using (20) and (21) we obtain

$$\overline{s_r^2} = \frac{2}{9}\,\frac{m^2 v^2 R^2}{\beta^2}\,n\,t$$

or replacing n by $4\pi R^2 n^*$, where n^* denotes the number of particles ejected per cm^2 and second into the space angle 2π:

$$\overline{s^2} = \frac{2}{9}\,\frac{m^2 v^2 R^2}{\beta^2}\,4\pi R^2 n^* t .$$

Substituting for the momentum of an α particle 10^{-14}, for $\beta = 7.10^{-5} R^4$, for $n^* = 1{,}1.10^{10}$, we get for a grain of $^1/_{10}$ mm diameter at 100° K and 10^{-3} mm Hg pressure

$$\overline{s_r^2} = 1\cdot t .$$

For the ordinary Brownian rotation Einstein's formula

$$\overline{s^2_{Br}} = \frac{2\,k\,T}{\beta}\,t$$

gives under the same conditions

$$\overline{s^2_{Br}} = 6{,}3\cdot 10^{-1}\,t .$$

The rotation increases rapidly, if we use a smaller grain. But the ratio $s_r^2 : s_{Br}^2$ remains constant other quantities being unchanged:

$$\frac{\overline{s_r^2}}{\overline{s_{Br}^2}} = \frac{2}{9}\,\frac{4\pi\, n^*\, m^2\, v^2}{2\,k\,T}\,\frac{R^4}{\beta}.$$

This expression does not depend on the radius, since β is proportional to R^4.

On the other hand, if the pressure diminishes from, say, 10^{-3} to 10^{-4} mm Hg, $\overline{s_r^2}$ increases 100 times; whereas s_{Br}^2 is then only 10 times greater.

The use of low pressures is, however, limited owing to the fact that the time of relaxation becomes then considerable; this circumstance will be discussed later.

II. Harmonically Bound Particles

1.

As has been shown before, low pressures are necessary in order to observe the radioactive Brownian movement. This is the reason why experimental possibilities are easier to survey, if we consider harmonically bound particles. For in this case we can refer to a series of experiments performed at low pressures. They were due to idias expressed by Smoluchowski. At a meeting of natural philosophers at Münster (1912) M. Smoluchowski[18]) proposed:

1. To suspend a small mirror by means of a fine quartz thread (10^{-5} cm) in order to investigate its rotational Brownian movement;

2. To observe the free end of such a thread.

The second experiment was performed by A. Houdijk and P. Zeeman[19]) in 1925, and independently by Einthoven and collaborators[20]), the first by Gerlach and Lehrer[21]) in 1927; Uhlenbeck and Goudsmit[22]) analysed its theoretical aspect, further, a series of experiments were carried out by E. Kappler[9,23]).

The equation of motion of a harmonically bound particle can be written as follows

$$M\,\frac{du}{dt} + f x = -\,\beta u + F(t)\,. \tag{22}$$

If we consider the rotation of a small suspended mirror, M means the moment of inertia, f the moment of torsion, F(t) is the moment of the fluctuating forces. All quantities are referred to the axis of rotation.

The equation (22) may be also written

$$\frac{du}{dt} + w^2 x = -\beta_1 x + A(t); \quad w^2 = \frac{f}{M}, \quad \beta_1 = \frac{\beta}{M}, \quad A(t) = \frac{F(t)}{M}.$$

Assuming as before that F(t) fulfils the conditions of Ornstein (cf. I, 1) we get

$$\overline{s^2}^{u_0 x_0} = \frac{1}{(\varphi_2 - \varphi_1)^2} \left\{ \left[-(u_0 - \varphi_2 x_0)\, e^{\varphi_1 t} + (u_0 - \varphi_1 x_0)\, e^{\varphi_2 t} \right]^2 \right. \tag{23}$$

$$\left. - \vartheta \left[\frac{1}{2\varphi_1} \left(1 - e^{2\varphi_1 t}\right) + \frac{1}{2\varphi_2}\left(1 - e^{2\varphi_2 t}\right) - \frac{2}{\varphi_1 + \varphi_2}\left(1 - e^{(\varphi_1 + \varphi_2) t}\right) \right] \right\}.$$

The mean value is referred to a mirror starting repeatedly from the same position with the same velocity — hence the sign $u_0 x_0$; φ_1 and φ_2 are abbreviations:

$$\varphi_1 = -\frac{\beta_1}{2} + \sqrt{\frac{\beta_1^2}{4} - w^2}, \qquad \varphi_2 = -\frac{\beta_1}{2} - \sqrt{\frac{\beta_1^2}{4} - w^2}.$$

As before ϑ is given by

$$\vartheta = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\delta)\, d\delta, \quad \text{where } H(\delta) = \frac{1}{M^2}\, \overline{F(t)\, F(t+\delta)}$$

For very long times (23) becomes

$$\overline{s^2} = \frac{\vartheta}{2 w^2 \beta_1} = \frac{\vartheta M^2}{2 f \beta}. \tag{24}$$

By integrating (22) we get also an expression for the mean square of the velocity:

$$\overline{u^2} = \frac{\vartheta}{2\beta_1}.$$

On the other side

$$\overline{u^2} = \frac{kT}{M},$$

so that

$$\vartheta = 2\,\frac{\beta_1}{M}\, kT = 2\,\frac{\beta}{M^2}\, kT.$$

Substituting we get finally

$$\overline{s^2} = \frac{kT}{f}. \tag{25}$$

The mean square of the displacement does not depend on the size of the body nor on the friction; it is also independent of the time.

In the case of a radioactive body we must add to the right side of (22) a third term F_1 due to radioactive recoils. If we at first neglect the ordinary Brownian movement, we can use the previous results, writing F_1 instead of F; but ϑ must now been calculated explicitly. This can be done in a similar way as before. We shall quote here only the result. For a suspended mirror we get

$$\overline{s_r^2} = \frac{1}{8} \frac{m^2 v^2 R^2}{f \beta} n ; \tag{26}$$

$\overline{s_r^2}$ is the mean square of the angular displacement, mv the momentum of an ejected particle, n the number of particles leaving the mirror perpendicularly*) to its surface (per sec.), 2R the side of the (rectangular) mirror.

In the case of a suspended spherical grain this formula is given by:

$$\overline{s_r^2} = \frac{1}{9} \frac{m^2 v^2 R^2}{f \beta} n = \frac{4\pi}{9} \frac{m^2 v^2 R^4}{f \beta} n^* , \tag{27}$$

where n is the number of particles ejected per second, n* this number referred to 1 cm² surface and second. R is the radius of the grain.

2. Examples. The Limiting Time Condition.

Gerlach and Lehrer and then Kappler used a mirror of about 1 mm² surface suspended on a quartz thread having a diameter of a few 10^{-5} cm. A beam of light reflected from the mirror reproduces the rotation of the mirror on a shifted photographic film. The experiments verified the formula (25), especially its independence of the friction. To investigate closer this important fact low pressure has been used (10^{-4} mm Hg included), but no influence of the friction could be observed. The accuracy reached by Kappler in calculating Boltzmann's constant was about 1 percent.

We shall use the data of Kappler (Ann. d. Phys. 31, 377, 1938) to estimate the rotation when the mirror is covered with a radioactive layer.

At a pressure of a few hundredth mm Hg the experimental value of β was $7{,}7 \cdot 10^{-8}$ cgs units. As the friction is proportional to the pressure, the value of β at a few 10^{-5} mm Hg will be $7{,}7 \cdot 10^{-11}$. The surface of the mirror was $0{,}7 \cdot 10^{-2}\,cm^2$, its side $2R = 0{,}084$ cm, the temperature about 20°C. Imagine the mirror covered with a layer of the polonium preparation used by Curie and Joliot. The number of emitted particles is then $2{,}2 \cdot 10^{-10}/cm^2 sec$. A half of the particles is directed inwards and does not leave the mirror; we can assume that one third of the other half is perpendicular to the mirror. Thus the number to be substituted for n in the formula (26) is $1/6 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{10}$

*) We assume for simplicity that n is equal to one sixth of the emitted particles.

multiplied by the surface of the mirror; the momentum of an α particle is 10^{-14} cm. g/sec. Substituting we get

$$\overline{s_r^2} = 1{,}5 \frac{1}{f} 10^{-14} .$$

According to (25) the ordinary Brownian displacement is under the same conditions (T = 300°K)

$$\overline{s_{Br}^2} = 4{,}1 \frac{1}{f} 10^{-14} .$$

The moment of torsion f had in the experiments of Kappler values from 10^{-6} to 10^{-9} c.g s. units.

If the temperature is, say, 100°K, then

$$\overline{s_{Br}^2} = 1{,}38 \frac{1}{f} 10^{-14} ,$$

whilst s_r^2 diminishes in a smaller degree ($\sqrt{3}$ times, if it is allowed to use the formula of Zeilinger derived for spherical bodies). As the accuracy of Kappler's experiments was about 1%, the radioactive effect should also be observable at 10^{-4} mm Hg — *i. e.*, under conditions under which Gerlach and Kappler were working.

Similar results we get for a small suspended ball. If e. g., the temperature is 100°K and the pressure 10^{-3} mm Hg, β has the value $7 \cdot 10^{-5}$ R^4 and (cf 27)

$$\overline{s_r^2} = \frac{4\pi}{9} \frac{m^2 v^2 R^4 n^*}{7 \cdot 10^{-5} f R^4} = \frac{4\pi}{9} \frac{m^2 v^2 n^*}{7 \cdot 10^{-5} f}$$

is independent of the size of the body. Introducing the numerical values we have (in the case of a Curie-Joliot preparation):

$$\overline{s_r^2} = 2{,}2 \cdot 10^{-14}/f ,$$

while

$$\overline{s_{Br}^2} = 1{,}38 \cdot 10^{-14}/f .$$

If the gas is rarefied to 10^{-4} mm Hg, $\overline{s_r^2}$ increases 10 times, $\overline{s_{Br}^2}$ remaining constant.

As mentioned above the use of low pressure is limited by the fact that the time of relaxation $t^* = M/\beta$ takes then considerable values, unless the decrease of β is acompanied by the a decrease of M.

In his second publication on the Brownian movemement Einstein[24] pointed out that the formula (7) and thus (6), (14) etc holds only, if we compare observations following at a time interval which is large in comparision with M/β. The solution for any time was given independently by Fürth[26] and Ornstein[25]. For the progressive motion it is the equation (4). As may be seen from this equation the displacement depends on the initial conditions. If for example the initial velocity is considerable, the particle runs over a greater distance than that given by Einstein's formula. This difference, however, vanishes, if the time of observation tends to infinity. Thus comparing two observations following at short time intervals we must apply the exact formula (4). The interval, however, should not be to small—unless we are not interested in the phenomena peculiar to the Brownian movement — as the terms containing ϑ become important only after some time, and ϑ represents just the action of the fluctuating forces.

In the example of the magnetically suspended grain $t^* = M/\beta$ is about 15 minutes (assuming that it is an iron grain). In the case of the mirror the momentum of inertia (measured by Kappler) was $M = 2{,}35 \cdot 10^{-7}$. At a few 10^{-4} mm Hg pressure we get for t^* a few hundred seconds; if the pressure amounts to a few 10^{-5} mm Hg — still about an hour (50 minutes).

III. The Radioactive Brownian Movement and the Search for the Neutrino

„Not everyone would be willing to say that he believes in the existence of the neutrino, but it is safe to say there is hardly one of us who is not served by the neutrino hypothesis as an aid in thinking about the beta-decay process" [27]).

It seems at present hopeless to search for a direct proof of the existence of the neutrino; only indirect experiments, as recoil investigations, are offering some chances. The recoil saught for being very small, Wilson's chamber cannot be used, unless it works in a particular way introduced by Crane and Halpern [29]). But the interpretation of this method is under dispute (cf. however [30]). After the discovery of the K-capture process A. I. Alichanow and A. I. Alichanian [31]) and then K.C. Wang[32]) pointed out that this process is suitable for recoil experiments. J. Allen[33]) performed such an experiment with positive result. However „this cannot be regarded as a decisive proof of the existence of the neutrino, because, as commented by some authors, the method is still subject to relatively large corrections" [34]).

In all experiments of this kind the condition of success has been the detection of free recoil atoms. At this point, which was the most difficult part of the previous experiments, the method suggested here would differ from the usual procedure. We think of the detection of the Brownian movement caused by emitted neutrinos.

The best K-capture isotope available at present for recoil experiments is B_e^7. It has been investigated by Rumbaugh, Roberts and Hafstad[36]). They found that B_e^7 is formed according to the reaction

$$L_i^6 + D^2 \longrightarrow B_e^7 + n \qquad (3{,}3\ M_eV),$$

and that it decays in two ways, 90 percent according to

$$B_e^7 + e_k \longrightarrow L_i^7 + \eta \qquad (1\ M_eV)\ ;$$

and 10 percent according to

$$B_e^7 + e_k \longrightarrow (L_i^7)^* + \eta \qquad (0.55\ M_eV)\ ,$$

$$(L_i^7)^* \longrightarrow L_i^7 + \gamma \qquad (0{,}45\ M_eV)\ .$$

Haxby and collaborators later gave 0,87 M_eV for the difference between B_e^7 and L_i^7 instead of 1 M_eV.

The momentum of the neutrino is given by

$$p = \frac{1}{c}\,(E_k^2 + mc^2\,E_k)^{1/2}.$$

Assuming, as usual, that the rest mass of the neutrino is zero we get for the harder component

$$p = 0{,}47 \cdot 10^{-16} \text{ c. g. s. units.}$$

In the following we shall neglect the γ radiation which is only weak as well as the fact that $^1/_{10}$ of the neutrinos have a smaller momentum.

Let us assume that the mirror used by Gerlach and by Kappler contains some B_e^7. The displacement

$$\overline{s^2} = \frac{1}{8}\,\frac{m^2v^2R^2}{f\,\beta}\,n$$

depends on the number of emissions. The half value period of B_e^7 is according to Allen 43 days and the number of disintegrations per g and second is therefore $1{,}6 \cdot 10^{16}$.

If the mirror contains for example $4 \cdot 10^{-5}$ g B_e^7, we can assume for the number of neutrinos leaving the mirror per sec. perpendicularly to its surface, *i. e.*, for n, the value $n = 4 \cdot 1{,}6 \cdot 1/3 \cdot 10^{11}$. Substituting besides the numerical values used in part II, 2: $\beta = 7{,}7 \cdot 10^{-11}$, $2R = 0{,}84$ mm, and for the momentum of a neutrino $0{,}47 \cdot 10^{-16}$, we get at normal temperature and a few 10^{-5} mm Hg pressure

$$\overline{s_r^2} = 1{,}3 \cdot 10^{-15}/f\ .$$

If the temperature lowers to 100°K, this value diminishes probably $\sqrt{3}$ times; the ordinary Brownian movement is at 100°K

$$\overline{s_{Br}^2} = 1{,}38 \cdot 10^{-14}/f\ .$$

Varying the pressure we may obtain for $\overline{s_r^2}$ greater values whereas $\overline{s_{Br}^2}$ remains constant. But in the same proportion will increase the time of relaxation which in the given example is above 50 minutes.

In the case of a supended small ball we get an easier survey β being then determinated by the Zeilinger formula.

Let us assume that the ball is covered with a layer of B_e^7 having a thickness ΔR. If ΔR is small compared with R, the mass of this layer is $4\pi R^2 \Delta R d$ (d-density) and the number of disintegrations per second amounts to $n = 4\pi R^2 \Delta R d n_1$ where n_1 denotes the number of disintegrations per g per sec.

Instead of (27) we can write

$$\overline{s_r^2} = \frac{1}{9} \frac{m^2 v^2 R^2}{f\beta} n = \frac{4\pi}{9} \frac{m^2 v^2 R^4}{f\beta} \Delta R n_1 d .$$

This expression is independent of the radius, β being proportional to R^4.

If for example the thickness of the layer is $\Delta R = 10^{-4}$ cm, the temperature 100°K, the pressure 10^{-4} mm Hg, we get substituting for the density $d = 1{,}8$ g/cm^3

$$\overline{s_r^2} = 1{,}2 \cdot 10^{-15}/f .$$

The same value results for a layer of 10^{-5} cm thickness and a pressure 10^{-5} mm Hg.

In both cases for the ordinary Brownian movement is (at T = 100°K)

$$\overline{s_{Br}^2} = 1{,}38 \cdot 10^{-14}/f .$$

The time of relaxation can be written in the case of a spherical grain in the form

$$t^* = \frac{M}{\beta} = \frac{\frac{2}{5} R^2 \frac{4}{3} \pi R^3 d}{\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi m}{k}} \frac{p}{\sqrt{T}} R^4} = c \frac{R\sqrt{T}}{p} .$$

As may be seen from this formula, it is possible to vary t^* independently of $\overline{s_r^2}$, as the latter value does not depend on the radius. In the example given above we get for t^* about an hour at 10^{-4} mm Hg and $R = 1/10$ mm.

The influence of the temperature upon $\overline{s_r^2}$ is indirect in character β being dependent on the temperature: $\overline{s_r^2}$ is proportional to $\sqrt{T}$; the ordinary Brownian movement is proportional to T. The lower the temperature the clearer appears the radioactive displacement.

Annales U. M. C. S. Lublin 1950. Państw. Lub. Zakł. Graf., Oddz. 6 w Lublinie, Kościuszki 4, zam. 556, 21.III.50
900 egz. A-1-12577 Data otrzymania manuskryptu 21.III.50. Data ukończenia druku 12.VII.1950.