

Z Katedry Fizyki Teoretycznej Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS  
Kierownik: doc. dr Włodzimierz Urbański

Maksymilian PIŁAT

**Drgania wielowarstwowej ciekłej kuli z rdzeniem**

**Колесания многослойного жидкого шара с твердым сердечником**

**The Oscillations of the Many-Layered Liquid Sphere with a Core**

§ 1. Teorię małych drgań grawitacyjnych kropli nieściśliwej cieczy idealnej podał Lord Kelvin [1]. Lamb uogólnił te wyniki na przypadek jednej warstwy cieczy pokrywającej sztywny rdzeń sferyczny [1]. Lord Rayleigh opracował teorię drgań kapilarnych kropli takiej cieczy. W teorii jądra atomowego u podstaw modelu kropłowego [3], a także uogólnionego tzw. kolektywnego, rozpatruje się drgania kropli cieczy idealnej i nieściśliwej o stałym rozkładzie gęstości masy i gęstości ładunku tj.  $\rho = \text{const.}$ ,  $q = \text{const.}$ , gdzie  $\rho$  oznacza gęstość masy,  $q$  — gęstość objętościową ładunku elektrycznego. Uwzględnia się przy tym napięcie powierzchniowe kropli obliczone z energii wiązania jądra.

Celem mojej pracy jest uogólnienie wspomnianych wyżej wyników na następujące przypadki:

1) drgań  $n$  warstw różnych nieściśliwych cieczy idealnych, naładowanych elektrycznie z różnymi gęstościami objętościowymi, koncentrycznie pokrywających sztywny rdzeń sferyczny,

2) drgań kropli cieczy o ciągłym rozkładzie gęstości masy i gęstości ładunku.

W przypadku pierwszym częstości własne drgań dane są wzorem:

$$\omega_{\lambda}^2 = \frac{C_{\lambda}}{B_{\lambda}}$$

gdzie:

$$C_{\lambda} = C_{\lambda}^{(1)} + C_{\lambda}^{(2)}$$

$$C_{\lambda}^{(1)} = \sum_{k=0}^n \frac{4\pi R_o^{2\lambda+6} (R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}) (q_{k+1} - q_k)}{(2\lambda+1) (R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})^2} \left\{ \sum_{i=0}^k \left[ 1 - \left( \frac{R_n}{R_i} \right)^{2\lambda+1} \right] (q_{i+1} - q_i) + \frac{1}{R_k^{2\lambda+1}} \sum_{i=k+1}^n (q_{i+1} - q_i) (R_i^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}) \right\} + \\ - \sum_{k=0}^n \frac{4\pi (R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}) R_o^{2\lambda+6} (q_{k+1} - q_k)}{3 (R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}) R_k^{2\lambda+4}} \sum_{i=k}^n (R_i^3 - R_{i+1}^3) q_{i+1}$$

$$C_{\lambda}^{(2)} = (\lambda - 1) (\lambda + 2) \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k R_k^2 \left( \frac{R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}}{R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}} \right)^2 \left( \frac{R_o}{R_k} \right)^{2\lambda+6}$$

$$B_{\lambda} = \frac{R_o^{2\lambda+6}}{\lambda (R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})^2} \sum_{k=1}^n \rho_k \left[ R_{k-1}^{2\lambda+1} - R_k^{2\lambda+1} - \frac{\lambda}{\lambda+1} R_n^{4\lambda+2} \left( \frac{1}{R_{k-1}^{2\lambda+1}} - \frac{1}{R_k^{2\lambda+1}} \right) \right]$$

Ze wzorów tych otrzymuję jako przypadki szczególne wyniki podane przez Lorda Kelvina i Lamba [1] oraz wzór na częstości własne drgań kropli pokrytej warstwą innej cieczy.

W przypadku drugim wzór na częstości własne otrzymuję z wyżej wypisanych wzorów przez przejście graniczne, gdy liczba warstw rośnie nieograniczenie.

§ 2. Rozpatrzmy drgania swobodne  $n$  warstw cieczy idealnych i nieściśliwych, koncentrycznie pokrywających sztywny rdzeń sferyczny. Niech  $R_o, R_1, \dots, R_n$  oznaczają promienie powierzchni tych warstw przed odkształceniem w kolejności licząc od warstwy zewnętrznej do rdzenia. Po odkształceniu powierzchnie warstw dane będą równaniami  $r_k = r_k(\vartheta, \varphi)$ . Przyrosty  $\Delta r_k = r_k - R_k$  rozwijam w szereg funkcji kulistych  $Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi)$ :

$$r_k = R_k \left[ 1 + \sum \alpha_{\lambda\mu}^{(k)} Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi) \right] \quad (2,1)$$

gdzie  $\alpha_{\lambda\mu}^{(k)} = \alpha_{\lambda\mu}^{(k)}(t)$  są współczynnikami zależnymi od czasu, a sumowanie rozciąga się po  $\mu$  od  $-\lambda$  do  $+\lambda$ , i po  $\lambda$  od 0 do  $\infty$ ,  $k=0, 1, \dots, n$ . Oczywiście  $r_n = R_n$  i  $\alpha_{\lambda\mu}^{(n)} = 0$ .

Zakładamy, że ruch cieczy jest bezwirowy, co łącznie z warunkiem nieściśliwości daje równanie dla potencjału prędkości  $\Phi_k$ :

$$\nabla^2 \Phi_k = 0, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$\Phi_k = \sum_{\lambda\mu} \left( A_{\lambda\mu}^{(k)} r_\lambda + \frac{B_{\lambda\mu}^{(k)}}{r^{\lambda+1}} \right) Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi) \text{ dla } R_k \leq r \leq R_{k-1} \quad (2, 2)$$

Potencjał  $\Phi_k$  musi spełniać następujące warunki:

W1)  $\Phi_k$  jest ciągły w cieczy.

W2)  $v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$  jest ciągła w cieczy.

W3)  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R_k} = \dot{r}_k$  dla  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

W3<sup>a</sup>)  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=R_n} = 0$ .

Z W1 i W2 wynika dla  $k = 1, 2, \dots, n-1$ :

$$(A_{\lambda\mu}^{(k)} - A_{\lambda\mu}^{(k+1)}) R_k^{2\lambda+1} = B_{\lambda\mu}^{(k+1)} - B_{\lambda\mu}^{(k)} \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2, 3)$$

oraz:

$$(A_{\lambda\mu}^{(k)} - A_{\lambda\mu}^{(k+1)}) \frac{\lambda}{\lambda+1} R_k^{2\lambda+1} = B_{\lambda\mu}^{(k)} - B_{\lambda\mu}^{(k+1)} \text{ dla } k = 1, \dots, n-1 \quad (2, 4)$$

i stąd:

$$A_{\lambda\mu}^{(k)} = A_{\lambda\mu}^{(k+1)} = A_{\lambda\mu}, \quad B_{\lambda\mu}^{(k)} = B_{\lambda\mu}^{(k+1)} = B_{\lambda\mu}.$$

Z warunku W3<sup>a</sup> wynika:

$$B_{\lambda\mu} = A_{\lambda\mu} \frac{\lambda}{\lambda+1} R_n^{2\lambda+1} \quad (2, 5)$$

Z W3 mamy dla  $k=0$ :

$$\lambda A_{\lambda\mu} R_o^{2\lambda+1} - (\lambda+1) B_{\lambda\mu} = R_o^{\lambda+3} \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^{(o)} \quad (2, 6)$$

Łącząc wzory (2, 5) i (2, 6) otrzymujemy:

$$A_{\lambda\mu} = \frac{R_o}{\lambda(R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})} \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^{(o)} \quad (2, 7)$$

$$B_{\lambda\mu} = \frac{R_o^{\lambda+3} R_n^{2\lambda+1}}{(\lambda+1)(R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})} \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^{(o)} \quad (2, 8)$$

Z W3 i wzory (2, 5) wynika:

$$A_{\lambda\mu} = \frac{R_k^{\lambda+3}}{\lambda(R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})} \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^{(k)} \text{ dla } k = 1, \dots, n \quad (2, 9)$$

następnie ze wzorów (2, 7) oraz (2, 9) otrzymujemy:

$$\dot{\alpha}_{\lambda\mu}^{(k)} = \frac{R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}}{R_0^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}} \left( \frac{R_0}{R_k} \right)^{\lambda+3} \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^{(0)} \quad (2, 10)$$

Po scałkowaniu wzoru (2, 10) otrzymujemy:

$$\alpha_{\lambda\mu}^{(k)} = \frac{R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}}{R_0^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}} \left( \frac{R_0}{R_k} \right)^{\lambda+3} \alpha_{\lambda\mu}^{(0)} + c^{(k)} \quad (2, 11)$$

gdzie  $c^{(k)}$  są stałymi określającymi początkowe odkształcenia powierzchni warstw. W rozpatrywanym przeze mnie przypadku  $c^{(k)} = 0$ .

§ 3. Energię kinetyczną obliczam ze wzoru:

$$T = \sum_{k=1}^n \rho_k \int \frac{R_{k-1}}{R_k} \frac{|\text{grad } \Phi|^2}{2} d\tau \quad (3, 1)$$

$\rho_k$  jest gęstością cieczy w warstwie  $k$ .

Wyrażając grad  $\Phi$  we współrzędnych biegunowych otrzymuję wzór:

$$|\text{grad } \Phi|^2 = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \Phi^*}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \Phi^*}{\partial \varphi} \quad (3, 2)$$

Po obliczeniu  $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}$  i  $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$  ze wzoru (2, 2) i wstawianiu do (3, 2) otrzymuję:

$$\begin{aligned} |\text{grad } \Phi|^2 = \sum_{\substack{\lambda\lambda' \\ \mu\mu'}} \left\{ \left[ \lambda A_{\lambda\mu} r^{\lambda-1} - (\lambda+1) \frac{B_{\lambda\mu}}{r^{\lambda+2}} \right] \cdot \left[ \lambda' A_{\lambda'\mu'}^* r^{\lambda'-1} + \right. \right. \\ \left. \left. - (\lambda'+1) \frac{B_{\lambda'\mu'}^*}{r^{\lambda'+2}} Y_{\lambda\mu} Y_{\lambda'\mu'}^* + \left( A_{\lambda\mu} r^{\lambda-1} + \frac{B_{\lambda\mu}}{r^{\lambda+2}} \right) \left( A_{\lambda'\mu'}^* r^{\lambda'-1} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \frac{B_{\lambda'\mu'}^*}{r^{\lambda'+2}} \right) \left( \frac{\partial Y_{\lambda\mu}}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial Y_{\lambda'\mu'}^*}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial Y_{\lambda\mu}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial Y_{\lambda'\mu'}^*}{\partial \varphi} \right) \right] \right\} \quad (3, 3) \end{aligned}$$

Pamiętając, że  $\int Y_{\lambda\mu} Y_{\lambda'\mu'}^* d\Omega = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}$  oraz

$$\int \left( \frac{\partial Y_{\lambda\mu}}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial Y_{\lambda'\mu'}^*}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial Y_{\lambda\mu}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial Y_{\lambda'\mu'}^*}{\partial \varphi} \right) d\Omega = \lambda(\lambda+1) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'} \quad [2]$$

obliczam z (3, 1) i (3, 3):

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k}{2} \sum_{\lambda^{\mu}} \int_{R_k}^{R_{k-1}} \left\{ \lambda (2\lambda + 1) |A_{\lambda^{\mu}}|^2 r^{2\lambda} + (\lambda + 1) (2\lambda + 1) \frac{|B_{\lambda^{\mu}}|^2}{r^{2\lambda+2}} \right\} dr =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k}{2} \sum_{\lambda^{\mu}} \left\{ \lambda |A_{\lambda^{\mu}}|^2 (R_{k-1}^{2\lambda+1} - R_k^{2\lambda+1}) - (\lambda + 1) |B_{\lambda^{\mu}}|^2 \left( \frac{1}{R_{k-1}^{2\lambda+1}} - \frac{1}{R_k^{2\lambda+1}} \right) \right\}$$

Po wstawieniu do powyższego wzoru  $A_{\lambda^{\mu}}$  i  $B_{\lambda^{\mu}}$  ze wzorów (2, 7) i (2, 8) i po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\lambda^{\mu}} \mathcal{B}_{\lambda} |\alpha_{\lambda^{\mu}}^{(o)}|^2 \quad (3, 4)$$

gdzie  $\mathcal{B}_{\lambda} = \frac{R_o^{2\lambda+6}}{\lambda (R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})^2} \sum_{k=1}^n \rho_k \left[ R_{k-1}^{2\lambda+1} - R_k^{2\lambda+1} + \right.$

$$\left. - \frac{\lambda}{\lambda + 1} R_n^{2\lambda+2} \left( \frac{1}{R_{k-1}^{2\lambda+1}} - \frac{1}{R_k^{2\lambda+1}} \right) \right] \quad (3, 5)$$

§ 4. Zmianę potencjału elektrostatycznego  $\delta\varphi$  związanego z odkształceniem warstw naładowanej cieczy obliczam, traktując przemieszczenie ładunków w pobliżu powierzchni jako wytworzenie powierzchniowych równych  $(q_{k+1} - q_k) \Delta r_k$ .  $\delta\varphi$  spełnia równanie Laplace'a, można je więc zapisać w postaci:

$$\delta\varphi_k = \sum_{\lambda^{\mu}} \left( Q_{\lambda^{\mu}}^{(k)} r^{\lambda} + \bar{Q}_{\lambda^{\mu}}^{(k)} \frac{1}{r^{\lambda+1}} \right) Y_{\lambda^{\mu}} \quad (4, 1)$$

dla  $R_k \leq r \leq R_{k-1}$ , gdzie  $k = 0, 1, \dots, n+1$ ,  $R_{n+1} = 0$ ,  $R_1 = \infty$ ,  $Q_{\lambda^{\mu}}^{(k)}$ ,  $\bar{Q}_{\lambda^{\mu}}^{(k)}$  są współczynnikami zależnymi od czasu.

$\delta\varphi$  musi spełniać następujące warunki:

W4)  $\delta\varphi$  jest skończony dla  $r=0$  i  $\lim_{r \rightarrow \infty} \delta\varphi = 0$ .

W5)  $\delta\varphi$  jest ciągły w całej przestrzeni.

W6) Składowa normalna pola elektrycznego posiada skoki na granicach warstw:

$$\frac{\partial}{\partial r} (\delta\varphi_k) \Big|_{r=R_k} - \frac{\partial}{\partial r} (\delta\varphi_{k+1}) \Big|_{r=R_k} = -4\pi (q_{k+1} - q_k) \Delta r_k = -4\pi (q_{k+1} -$$

$$- q_k) R_k \sum_{\lambda^{\mu}} \alpha_{\lambda^{\mu}}^{(k)} Y_{\lambda^{\mu}}$$

Z warunku W4 wynika, że  $Q_{\lambda\mu}^{(o)} = \bar{Q}_{\lambda\mu}^{(n+1)} = 0$  (4, 2)

Z W5 wynika:

$$(Q_{\lambda\mu}^{(k+1)} - Q_{\lambda\mu}^{(k)}) R_k^{2\lambda+1} = \bar{Q}_{\lambda\mu}^{(k)} - \bar{Q}_{\lambda\mu}^{(k+1)} \quad (4, 3)$$

Warunek W6 daje:

$$\lambda (Q_{\lambda\mu}^{(k)} - Q_{\lambda\mu}^{(k+1)}) R_k^{2\lambda+1} - (\lambda + 1) (\bar{Q}_{\lambda\mu}^{(k)} - \bar{Q}_{\lambda\mu}^{(k+1)}) = -4\pi (q_{k+1} - q_k) R_k^{\lambda+3} \alpha_{\lambda\mu}^{(k)} \quad (4, 4)$$

Łącząc wzory (4, 3) i (4, 4) otrzymujemy:

$$Q_{\lambda\mu}^{(k)} - Q_{\lambda\mu}^{(k+1)} = \frac{-4\pi (q_{k+1} - q_k) R_k^{\lambda+3}}{(2\lambda + 1) R_k^{2\lambda+1}} \alpha_{\lambda\mu}^{(k)} \quad (4, 5)$$

Zauważwszy, że  $Q_{\lambda\mu}^{(o)} = 0$  otrzymujemy z (4, 5):

$$Q_{\lambda\mu}^{(k+1)} = \frac{4\pi}{2\lambda + 1} \sum_{i=0}^k \frac{q_{i+1} - q_i}{R_i^{\lambda-2}} \alpha_{\lambda\mu}^{(i)} \quad (4, 6)$$

Wstawiając  $\alpha_{\lambda\mu}^{(i)}$  z (2, 11) do (4, 6) otrzymujemy:

$$Q_{\lambda\mu}^{(k+1)} = \frac{4\pi R_o^{\lambda+3} \alpha_{\lambda\mu}^{(o)}}{(2\lambda + 1) (R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})} \sum_{i=0}^k \left[ 1 - \left( \frac{R_n}{R_i} \right)^{2\lambda+1} \right] (q_{i+1} - q_i) \quad (4, 7)$$

gdzie  $k = 0, 1, \dots, n-1, q_o = 0$ .

Warto zauważyć, że  $Q_{\lambda\mu}^{(n+1)} = Q_{\lambda\mu}^{(n)}$ .

Ze wzorów (4, 3) i (4, 4) wynika, że:

$$\bar{Q}_{\lambda\mu}^{(k)} - \bar{Q}_{\lambda\mu}^{(k+1)} = (Q_{\lambda\mu}^{(k+1)} - Q_{\lambda\mu}^{(k)}) R_k^{2\lambda+1} = \frac{4\pi (q_{k+1} - q_k) R_k^{\lambda+3}}{(2\lambda + 1)} \alpha_{\lambda\mu}^{(k)} \quad (4, 8)$$

i ponieważ  $\bar{Q}_{\lambda\mu}^{(n+1)} = 0$  otrzymujemy:

$$\bar{Q}_{\lambda\mu}^{(k)} = \frac{4\pi}{2\lambda + 1} \sum_{i=k}^n (q_{i+1} - q_i) R_i^{\lambda+3} \alpha_{\lambda\mu}^{(i)} \quad (4, 9)$$

Wstawiając do (4, 9)  $\alpha_{\lambda\mu}^{(i)}$  ze wzoru (2, 11) otrzymujemy:

$$\bar{Q}_{\lambda\mu}^{(k)} = \frac{4\pi R_o^{\lambda+3} R_n^{2\lambda+1}}{(2\lambda + 1) (R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})} \sum_{i=k}^n (q_{i+1} - q_i) \left[ \left( \frac{R_i}{R_n} \right)^{2\lambda+1} - 1 \right] \alpha_{\lambda\mu}^{(o)} \quad (4, 10)$$

§ 5. Zmianę elektrostatycznej energii kropli przy deformacji jej kształtu można przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \Delta E_{el} &= \frac{1}{2} \int q_k \Delta \varphi d\tau + \frac{1}{2} \int \varphi \cdot \Delta q_k^* d\tau + \frac{1}{2} \int \Delta \varphi \cdot \Delta q_k^* d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \int q_k \Delta \varphi_k d\tau + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int \varphi \cdot \Delta q_k^* d\tau + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta \varphi_{k+1} \cdot \Delta q_k^* d\tau \quad (5, 1) \end{aligned}$$

gdzie  $\Delta q_k = q_k \Delta r_k \delta(r - R_k)$ , przy czym  $\int \Delta q_k d\tau = 0$  (5, 2)

Korzystając ze wzorów (2, 1), (2, 11), (4, 1), (4, 7), (4, 10) i (5, 2) otrzymujemy w rozpatrywanym przybliżeniu, że:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \int q_k \cdot \Delta \varphi_k d\tau = 0 \quad (5, 3)$$

oraz  $\frac{1}{2} \int \Delta \varphi \cdot \Delta q d\tau = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{4\pi R_o^{2\lambda+6} (R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}) (q_{k+1} - q_k)}{(2\lambda+1) (R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})^2} \times \right.$   
 $\times \left[ \sum_{i=0}^k \left( 1 - \left( \frac{R_i}{R_n} \right)^{2\lambda+1} \right) (q_{i+1} - q_i) + \frac{1}{R_k^{2\lambda+1}} \sum_{i=k+1}^n (q_{i+1} - q_i) (R_i^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}) \right] |\alpha_{\lambda, \mu}^{(o)}|^2 \left. \right\}$

W celu obliczenia całki  $\frac{1}{2} \int \varphi \cdot \Delta q^* d\tau$  przedstawiam potencjał  $\varphi_{k+1}$  w cienkiej powierzchniowej warstwie (gdzie  $\Delta q_k \neq 0$ ) wzorem przybliżonym:

$$\varphi_{k+1} = \frac{\sum_{i=k}^n 4/3\pi (R_i^3 - R_{i+1}^3) q_{i+1}}{R_k + \Delta r_k} \approx \frac{\sum_{i=k}^n 4/3\pi q_{i+1} (R_i^3 - R_{i+1}^3)}{R_k} \left( 1 - \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda, \mu}^{(k)} Y_{\lambda, \mu} \right)$$

przy czym  $R_{n+1} = 0$ . Z powyższego wzoru oraz ze wzorów (2, 1), (21, 1) i (5, 2) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \varphi \Delta q^* d\tau &= - \sum_{\lambda, \mu} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{4\pi (R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})^2 R_o^{2\lambda+1} (q_{k+1} - q_k)}{3 (R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})^2 R_k^{2\lambda+4}} \sum_{i=k}^n (R_i^3 - \right. \\ &\left. - R_{i+1}^3) q_{i+1} \right] \cdot |\alpha_{\lambda, \mu}^{(o)}|^2 \quad (5, 5) \end{aligned}$$

Zatem zmiana energii elektrostatycznej wyraża się wzorem:

$$\Delta E_{e1} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} C_{\lambda}^{(1)} |\alpha_{\lambda\mu}^{(o)}|^2 \quad (5, 6)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} C_{\lambda}^{(1)} = & \sum_{k=0}^n \frac{4\pi R_o^{2\lambda+1} (R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}) (q_{k+1} - q_k)}{(2\lambda+1) (R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})^2} \left\{ \sum_{i=0}^k \left[ 1 - \left( \frac{R_n}{R_i} \right)^{2\lambda+1} \right] (q_{i+1} - q_i) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{R_k^{2\lambda+1}} \sum_{i=k+1}^n (q_{i+1} - q_i) (R_i^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}) \right\} + \\ & - \sum_{k=0}^n \frac{4\pi (R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1})^2 R_o^{2\lambda+6} (q_{k+1} - q_k)}{3 (R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}) R_k^{2\lambda+4}} \sum_{i=k}^n (R_i^3 - R_{i+1}^3) q_{i+1} \quad (5, 7) \end{aligned}$$

§ 6. Zmianę energii powierzchniowej przy odkształceniu kropli daje wzór [3]:

$$\Delta E_{pow} = \sum_{\lambda\mu} \frac{\sigma R^2}{2} (\lambda-1) (\lambda+2) |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \quad (6, 1)$$

gdzie  $\sigma$  oznacza stałą napięcia powierzchniowego, a  $R$  promień kropli nie odkształconej.

Dla  $n$  warstw analogiczny wzór będzie:

$$\Delta E_{pow} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\lambda\mu} \frac{\sigma_k R_k}{2} (\lambda-1) (\lambda+2) |\alpha_{\lambda\mu}^{(k)}|^2 \quad (6, 1)$$

wstawiając następnie  $\alpha_{\lambda\mu}^{(k)}$  ze wzoru (2, 11) do (6, 1) otrzymuje:

$$\Delta E_{pow} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} C_{\lambda}^{(2)} |\alpha_{\lambda\mu}^{(o)}|^2 \quad (6, 2)$$

gdzie:

$$C_{\lambda}^{(2)} = (\lambda-1) (\lambda+2) \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \cdot R_k^2 \left( \frac{R_k^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}}{R_o^{2\lambda+1} - R_n^{2\lambda+1}} \right)^2 \left( \frac{R_o}{R_k} \right)^{2\lambda+6} \quad (6, 3)$$

§ 7. Całkowita energia drgań wyrazi się wzorem:

$$\Delta E = \sum_{\lambda\mu} \left( \frac{\mathcal{B}_{\lambda}}{2} |\alpha_{\lambda\mu}^{(o)}|^2 + \frac{C_{\lambda}}{2} |\alpha_{\lambda\mu}^{(o)}|^2 \right) \quad (7, 1)$$

gdzie  $C_{\lambda} = C_{\lambda}^{(1)} + C_{\lambda}^{(2)}$

$$(7, 2)$$



Częstości własne drgań tej wielowarstwowej kropli dane są wzorem:

$$\omega_\lambda^2 = \frac{C_\lambda}{\mathcal{B}_\lambda} \quad (7, 3)$$

§ 8. Przypadki szczególne:

1. Kropla cieczy jednorodnej. Kładąc  $n = 1$ ,  $R_n = R_1 = 0$  otrzymamy ze wzorów przeze mnie wyprowadzonych wzory na częstości własne drgań swobodnych kropli cieczy stosowany w teorii jądra atomowego (3):

$$C_\lambda = \sigma R_o^2 (\lambda - 1) (\lambda + 2) - \frac{8\pi q^2 (\lambda - 1)}{3R_o (2\lambda + 1)} \quad \mathcal{B}_\lambda = \frac{\rho R_o^5}{\lambda}$$

2. Jedna warstwa cieczy na rdzeniu stałym. Kładąc we wzorach wyprowadzonych w tej pracy  $n = 1$ ,  $R_o = a$ ,  $R_n = R_1 = b$ ,  $q^2 = -G\rho^2$  i oznaczając przez  $\rho_o$  średnią gęstość rdzenia i warstwy cieczy oraz  $g = 4/3 \pi G \rho_o a$ , otrzymujemy po prostych przekształceniach:

$$\omega_\lambda^2 = \frac{\lambda (\lambda + 1) \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^\lambda - \left( \frac{b}{a} \right)^{\lambda+1} \right]}{(\lambda + 1) \left( \frac{a}{b} \right)^\lambda + \lambda \left( \frac{b}{a} \right)^{\lambda+1}} \left( 1 - \frac{3}{2\lambda + 1} \cdot \frac{\rho}{\rho_o} \right) \frac{g}{a}$$

Wzór ten jest identyczny ze wzorem podanym przez Lamba [1].

3. Kropla pokryta warstwą innej cieczy. Kładąc we wzorach (3, 5), (6, 3) i (5, 7)  $n = 2$ ,  $R_n = R_2 = 0$  otrzymamy wzór na częstości drgań kropli pokrytej jedną warstwą innej cieczy:

$$\omega_\lambda^2 = \frac{C_\lambda}{\mathcal{B}_\lambda}, \quad \text{gdzie } C_\lambda = C_\lambda^{(1)} + C_\lambda^{(2)}$$

$$C_\lambda^{(1)} = -\frac{8\pi a^5 (\lambda - 1)}{3(2\lambda + 1)} (q_1^2 - q_1 q_2 + q_2^2) + 4\pi a^5 q_1 - q_2 \left[ \frac{1}{2\lambda + 1} \left( \frac{b}{a} \right)^{2\lambda+1} - \frac{1}{3} \left( \frac{b}{a} \right)^3 \right]$$

$$C_\lambda^{(2)} = (\lambda - 1) (\lambda + 2) a^2 \left[ \sigma_o + \sigma_1 \left( \frac{a}{b} \right)^3 \right]$$

$$\mathcal{B}_\lambda = \frac{a^5}{\lambda} \left[ \rho_1 - (\rho_2 - \rho_1) \left( \frac{b}{a} \right)^{2\lambda+1} \right]$$

$a$  i  $b$  są jak poprzednio promieniami warstw, tzn.  $R_o = a$ ,  $R_1 = b$ .

§ 9. W celu obliczenia częstości drgań ciekłej kuli o promieniu  $a$  z ciągłym rozkładem gęstości masy  $\rho = \rho(r)$  i gęstości ładunku  $q = q(r)$  zawierającej sztywny rdzeń sferyczny o promieniu  $b$  przechodzę we wzorach (3, 5) i (5, 7) z  $n$  do nieskończoności przy ustalonych  $R_o = a$  i  $R_n = b$ .

Uwzględniam przy tym skoki gęstości na powierzchniach cieczy  $r = a$  oraz  $r = b$ . Otrzymane wzory mają postać następującą:

$$C_{\lambda}^{(1)} = 4\pi a^5 q(a) \left( \frac{q(a)}{2\lambda + 1} - \bar{q} \right) - \frac{8\pi a^5 q(a)}{(2\lambda + 1)(a^{2\lambda+1} - b^{2\lambda+1})} \left\{ \int_b^a r^{2\lambda+1} \frac{dq}{dr} dr + \right. \\ \left. - b^{2\lambda+1} [q(a) - q(b)] \right\} + \frac{4\pi}{(2\lambda + 1)(a^{2\lambda+1} - b^{2\lambda+1})} \int_b^a \left\{ \int_r^a \left[ 1 - \left( \frac{b}{s} \right)^{2\lambda+1} \right] \frac{dq}{ds} ds + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^{2\lambda+1}} \int_b^r (s^{2\lambda+1} - b^{2\lambda+1}) \frac{dq}{ds} ds \right\} (r^{2\lambda+1} - b^{2\lambda+1}) \frac{dq}{dr} dr + \\ + \frac{4\pi a^{2\lambda+6}}{(a^{2\lambda+1} - b^{2\lambda+1})^2} \int_b^a \left[ \frac{(r^{2\lambda+1} - b^{2\lambda+1})^2}{r^{2\lambda+4}} \frac{dq}{dr} \int_b^r q s^2 ds \right] dr$$

$$B_{\lambda} = \frac{a^{2\lambda+6} (2\lambda + 1)}{\lambda (a^{2\lambda+1} - b^{2\lambda+1})^2} \int_b^a \rho \cdot r^{2\lambda} \left[ 1 + \frac{\lambda}{\lambda + 1} \left( \frac{b}{r} \right)^{4\lambda+2} \right] dr$$

$$\bar{q} = \frac{1}{a^3} \int_0^a q r^2 dr \text{ jest średnią gęstością ładunku w kuli.}$$

W rozpatrywanym przypadku napięcia powierzchniowe między warstwami znikają w granicy i pozostaje tylko napięcie powierzchni zewnętrznej  $\sigma$ . Wtedy ze wzoru (6, 1) otrzymuje:

$$C_{\lambda}^{(2)} = \frac{\sigma a^2}{2} (\lambda - 1)(\lambda + 2).$$

Wzór na częstości drgań będzie taki, jak we wszystkich poprzednich przypadkach:

$$\omega_{\lambda}^2 = \frac{C_{\lambda}}{B_{\lambda}}, \text{ gdzie } C_{\lambda} = C_{\lambda}^{(1)} + C_{\lambda}^{(2)}.$$

#### PIŚMIENICTWO

1. H. Lamb: Hydrodynamics. Cambridge 1906.
2. L. Landau i E. Lifszic: Mechanika ośrodków ciągłych. PWN Warszawa 1958.
3. A. S. Dawydow: Teoriya atomnogo jadra. Moskwa 1958.

## РЕЗЮМЕ

Рассмотрены колебания  $n$  слоев жидкости, покрывающих концентрический твердый сердечник. Предполагаем, что жидкость идеальна, несжимаема, не проводит электричества, и что плотности масс и зарядов в слоях постоянны.

Учтено также поверхностное натяжение. Вычислены частоты собственных колебаний. Посредством перехода к пределу получены формулы частот собственных колебаний для случая, когда плотности масс и зарядов являются непрерывными функциями расстояния точки от центра шара.

## SUMMARY

The author investigated the oscillations of a  $n$  layer liquid, covering a rigid core concentrically. The liquid is assumed ideal, non-compressible and non-conducting, the mass and electric charge densities being constant. The surface tensions have also been taken in account.

The aim of the paper is to calculate the frequency of the self-oscillations. By means of a limiting process one obtains formulas for the self-oscillations in the case when the mass and electric charge densities are continuous functions of the distance of the point from the centre of the sphere.

BIBLIOTEKA  
UMCS  
LUBLIN

SUMMARY

The author investigated the oxidation of a 1.5% iron solution in a 10% sodium hydroxide solution at 100°C. The results show that the rate of oxidation is proportional to the square root of the iron concentration and to the square root of the sodium hydroxide concentration. The reaction is first order with respect to iron and half order with respect to sodium hydroxide. The activation energy is 10.5 kcal/mole.

$$r = k [\text{Fe}^{2+}]^{1/2} [\text{OH}^-]^{1/2}$$

The author investigated the oxidation of a 1.5% iron solution in a 10% sodium hydroxide solution at 100°C. The results show that the rate of oxidation is proportional to the square root of the iron concentration and to the square root of the sodium hydroxide concentration. The reaction is first order with respect to iron and half order with respect to sodium hydroxide. The activation energy is 10.5 kcal/mole.



The author investigated the oxidation of a 1.5% iron solution in a 10% sodium hydroxide solution at 100°C. The results show that the rate of oxidation is proportional to the square root of the iron concentration and to the square root of the sodium hydroxide concentration. The reaction is first order with respect to iron and half order with respect to sodium hydroxide. The activation energy is 10.5 kcal/mole.

REFERENCES

- 1. J. H. Dineen, J. Res. Nat. Bur. Stand., 68, 101 (1964).
- 2. J. H. Dineen, J. Res. Nat. Bur. Stand., 68, 101 (1964).
- 3. J. H. Dineen, J. Res. Nat. Bur. Stand., 68, 101 (1964).

ANNALES  
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA  
LUBLIN — POLONIA

VOL. XIII

SECTIO AA

1958

---

1. W. Hubicki: Chemische Analyse im XVI. Jahrhundert in Polen.  
Analiza chemiczna w XVI wieku w Polsce.
2. M. Dąbkowska: Ciekły amoniak  $\text{LiClO}_4$  jako roztwór podstawowy w polarografii.  
Liquid Ammoniate of Lithium Perchlorate as Solvent and Supporting Electrolyte in Polarography.
3. M. Dąbkowska: Polarograficzne oznaczanie  $\text{Zn}^{2+}$  w ciekłym amoniakacie  $\text{LiClO}_4$ .  
The Polarographic Determination of  $\text{Zn}^{2+}$  in Liquid Ammoniate of Lithium Perchlorate.
4. K. Sykut: Automatyczny analizator kulometryczny.  
Automatischer coulometrischer Analysator.
5. W. Hubicki, J. Kowalczyk: Elektrolityczne wydzielanie srebra, ołowiu i cynku z roztworów ich soli w cieczy Diversa.  
Electrolytic Deposition of Silver, Lead and Zinc in Divers' Liquid.
6. J. Matysik: Oscylograficzne i polarograficzne badania w ciekłym amoniakacie azotanu amonowego.  
Oszillographische und polarographische Untersuchungen im flüssigen  $\text{NH}_4\text{NO}_3$  — Ammoniakat (Teil I).
7. Z. Zychiewicz-Zajdel: Polarografia związków organicznych w ciekłym amoniakacie azotanu litu. Część I.  
Polarographie organischer Verbindungen im flüssigen  $\text{LiNO}_3 \cdot n\text{NH}_3$  Teil I.
8. W. Hubicki, S. Jusiak: Polarograficzne oznaczanie antymonu w roztworze ciekłego amoniakatu jodku amonu.  
Polarographische Bestimmung des Antimons im Flüssigen  $\text{NH}_4\text{J} \cdot n\text{NH}_3$ .
9. M. Subotowicz: Badanie potasowych i sodowych fotokatod złożonych metodą charakterystyk prądowo-napięciowych.  
The Investigation of the Kalium and Sodium Compound Photocathodes Using the Current-Voltage Curves Method.

ANNALES  
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE  
LUBLIN — POLONIA  
VOL. XIV  
SECTIO AA

Biblioteka Uniwersytetu  
M. CURIE - SKŁODOWSKIEJ  
w Lublinie

✓ 406015

CZASOPISMA

1. S. Szpikowski: Wyznaczenie stałych potencjału wodoru, dwutlenku węgla i mieszaniny  $H_2-CO_2$ .  
Determination of the Potential Parameters of  $H_2$   $CO_2$  and  $H_2-CO_2$  Mixture.
2. S. Szpikowski: Przebieg termodyfuzyjny mieszaniny  $H_2-CO_2$  w zależności od czasu, temperatury, ciśnienia oraz składu mieszaniny.  
Thermodiffusion Process of  $H_2 - CO_2$  Mixture as a Function of Time, Temperature, Pressure and Concentration.
3. A. Stasiewicz: Ciekły amoniak rodanku amonu jako rozpuszczalnik. Część I. Rozpuszczalność metali i niektórych związków nieorganicznych. Flüssiges  $NH_4SCN \cdot nNH_3$  als Lösungsmittel. Teil I. Löslichkeit der Metalle und einiger anorganischer Verbindungen.
4. K. Zagórski: Hydrolityczne badania śluzu lnu.  
Hydrolytische Untersuchungen des Leinsammenschleimes.
5. J. Czajka: Zmiana współczynników  $d\delta/dc$  i  $d\delta/dT$  koloidalnego roztworu białka w czasie termicznej denaturacji.  
Die Veränderung der Koeffizienten  $d\delta/dc$  und  $d\delta/dT$  der kolloidalen Eiweisslösung während der termischen Denaturation.
6. D. Stachórska: Szybkość kondensacji pary przesyconej. II Kondensacja na jonach.  
The Rate of Condensation of Supersaturated Vapour. II Condensation on Ions.
7. J. Skierczyńska: Kilka uwag na temat pomiarów oporu właściwego Ge.  
Some Remarks on Resistivity Measurements of Germanium.
8. J. Czajka: Studia nad wpływem stężenia, temperatury i czasu na napięcie powierzchniowe koloidów hydrofilnych.  
Studien über den Einfluss der Konzentration, Temperatur und Zeit auf die Oberflächenspannung der hydrophylen Kolloiden.
9. S. Wieluński: Gerät zur Demonstration und Untersuchung der Zentrifugal und Corioliskraft.  
Przyrząd do demonstracji i badań z siłami odśrodkową i Coriolisa.

UNIwersytet MARIi CURIE-SKŁODOWSKIEJ

BIURO WYDAWNICTW

LUBLIN

Plac Litewski 5

POLOGNE

Adresse: