

Institut Ekonomii Politycznej i Planowania UMCS

JANUSZ MERKEL

Sur le pavage de l'espace euclidien à 3 dimensions avec des cubes tronqués tordus, des icosaèdres et des tétraèdres

O wypełnieniu przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej szcścianami ściętymi skręconymi, dwudziostościanami i czworościanami

Упаковка эвклидового трехмерного пространства усеченными кубами Архимеда, икосаэдрами и тетраэдрами

1. Dans l'espace euclidien à 4 dimensions il existe une cellule semi-régulière limitée par 24 icosaèdres réguliers et 120 tétraèdres réguliers (groupés en 24 systèmes de 5 tétraèdres: un tétraèdre central et 4 tétraèdres construits sur ses faces). Cette cellule — "abgestumpftes 24-Zell", "snub 24-cell", $s(3, 4, 3)$ — a été découverte par un mathématicien-amateur anglais, le juriste Thorold Gosset. Elle a été décrite par Harold Scott Macmillan Coxeter dans son livre "Regular polytopes", publié en 1948 à Londres par la maison Methuen and Co. Cette cellule admet deux genres d'arêtes congruentes: les arêtes entourées par un tétraèdre et 2 icosaèdres et les arêtes entourées par 3 tétraèdres et un icosaèdre. Sa "figure circum-sommitale" est constituée par un polyèdre limité par 5 triangles équilatéraux congruents et 3 pentagones réguliers congruents ("Regular polytopes", pp. 152 et 163).

Il existe un "pavage de l'espace" ("Honeycomb" d'après la terminologie de Coxeter) rapproché de la cellule semi-régulière de E_4 en question. C'est un pavage de E_3 en même temps par des cubes tronqués tordus (d'orientations gauche et droite), des icosaèdres et des tétraèdres (groupés en systèmes de 5 tétraèdres).

2. Un réseau spatial composé de cubes tronqués tordus peut être inscrit dans le pavage de E_3 par des cubes congruents — (4, 3, 4).

Parmi les polyèdres archimédiens il existe un polyèdre limité par 6 carrés et 32 triangles équilatéraux. Coxeter l'appelle "snub cube"

(“Introduction to geometry”, New York 1961, Wiley and Sons, p. 276). Ce polyèdre admet 2 formes, d’orientations gauche et droite, symétriques l’une de l’autre.

La transformation d’un cube ordinaire en cube tronqué tordu peut être effectuée en 3 étapes (Jos. E. Hofmann “Über Archimedes’ halbre-gelmässige Körper” — article dans le périodique “Archiv der Mathematik”, vol. XIV, 1963, p. 214).

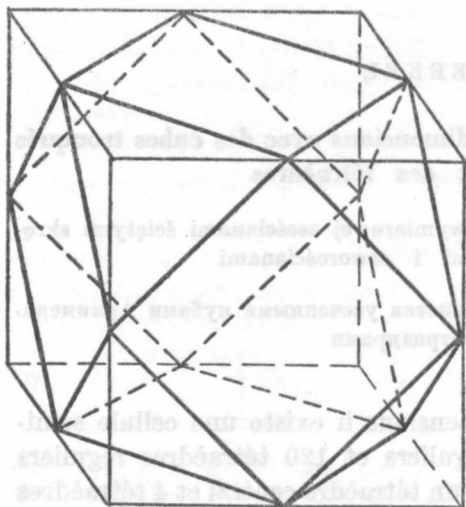


Fig. 1

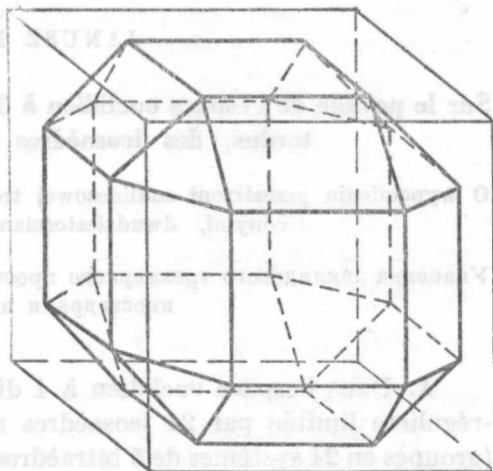


Fig. 2

On commence par prendre les milieux des arêtes du cube pour sommets d’un nouveau polyèdre, limité par 6 carrés et 8 triangles équilatéraux. En chaque sommet de ce nouveau polyèdre concourent quatre faces de celui-ci. C’est un “cubo-octaèdre” (fig. 1).

Ensuite on prend pour sommets d’un nouveau polyèdre les milieux des arêtes du cubo-octaèdre. Ce nouveau polyèdre est donc limité par 6 carrés, 8 triangles équilatéraux et 12 rectangles (fig. 2). (L’arête de chaque face carrée du nouveau polyèdre a une longueur égale à la moitié de l’arête du cube initial, tandis que l’arête de chaque face triangulaire équilatérale et, en même temps, l’arête plus courte d’une face rectangle est égale à $\sqrt{2}/4$ de l’arête du cube initial). Chaque sommet du polyèdre appartient à 4 faces. On peut transformer les rectangles en carrés en contractant leurs arêtes plus longues et en prolongeant les arêtes plus courtes. On obtient ainsi un polyèdre semi-régulier à 26 faces, limité par 18 carrés congruents et 8 triangles équilatéraux congruents.

En passant à la troisième étape, on divise chacune des faces du polyèdre à 26 faces par une diagonale en triangles rectangles. Puisque

ces faces triangulaires, obtenues en divisant une face rectangle, ne peuvent toutes deux être contenues en même temps dans son plan — sinon on n'aurait pas de nouveau polyèdre — on fait tourner d'un certain angle les faces carrées contenues dans les plans des faces du cube initial. On obtient ainsi un polyèdre qui a le même nombre de sommets que le polyèdre à 26 faces (24 sommets), mais tel qu'en chacun de ses sommets concourent non pas 4, mais 5 arêtes. Ce polyèdre est limité par 6 carrés congruents,

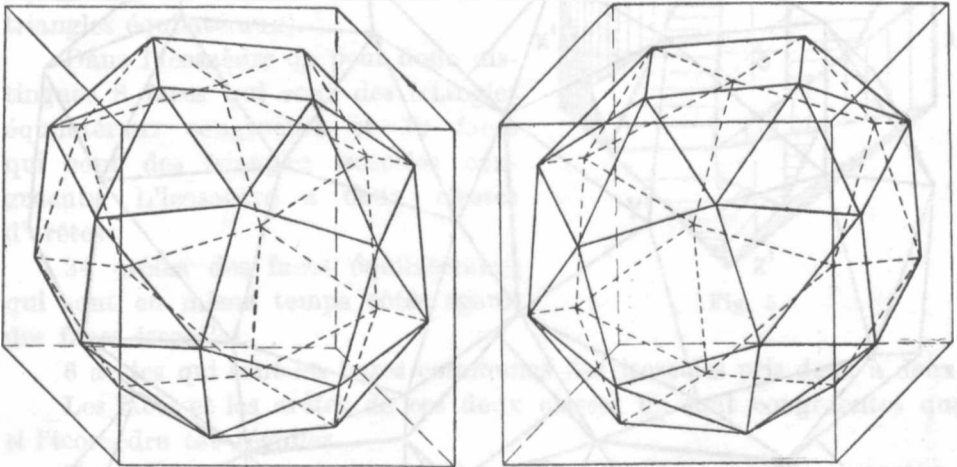


Fig. 3

8 triangles équilatéraux congruents et 24 triangles non équilatéraux congruents. Il a 3 genres d'arêtes :

- 24 arêtes des faces carrées,
- 24 arêtes des 6 faces triangulaires équilatérales,
- 24 arêtes qui forment les bases communes de 12 couples de triangles à 3 côtés inégaux.

Les faces rectangles du polyèdre à 26 faces peuvent être divisées par des diagonales en triangles rectangles de deux manières, puisque chaque rectangle a 2 diagonales. Cela mène à la construction de 2 formes du nouveau polyèdre d'orientations contraires, symétriques l'une de l'autre.

En prenant pour point de départ de la troisième étape le polyèdre semi-régulier à 26 faces et en transformant en triangles équilatéraux les triangles rectangles isocèles obtenus en divisant ses 12 faces rectangles, on arrive à un polyèdre à 38 faces, qui est un cube semi-régulier tronqué tordu (fig. 3).

Récapitulons : on commence par diviser E_3 en cubes congruents soit par (4, 3, 4). Dans ces cubes on inscrit ensuite des cubes tronqués tordus d'orientations alternativement contraires, de telle sorte qu'ils soient symétriques deux à deux, leurs faces carrées étant le plan de symétrie.

On obtient ainsi un squelette spatial composé de cubes tronqués tordus. Ils se touchent par leurs faces carrées, tandis que leurs faces triangulaires sont séparées par des cavités enchaînées deux à deux (fig. 4).

3. À un pavage de E_3 composé de cubes congruents on peut inscrire un réseau spatial composé d'icosaèdres et de tétraèdres.

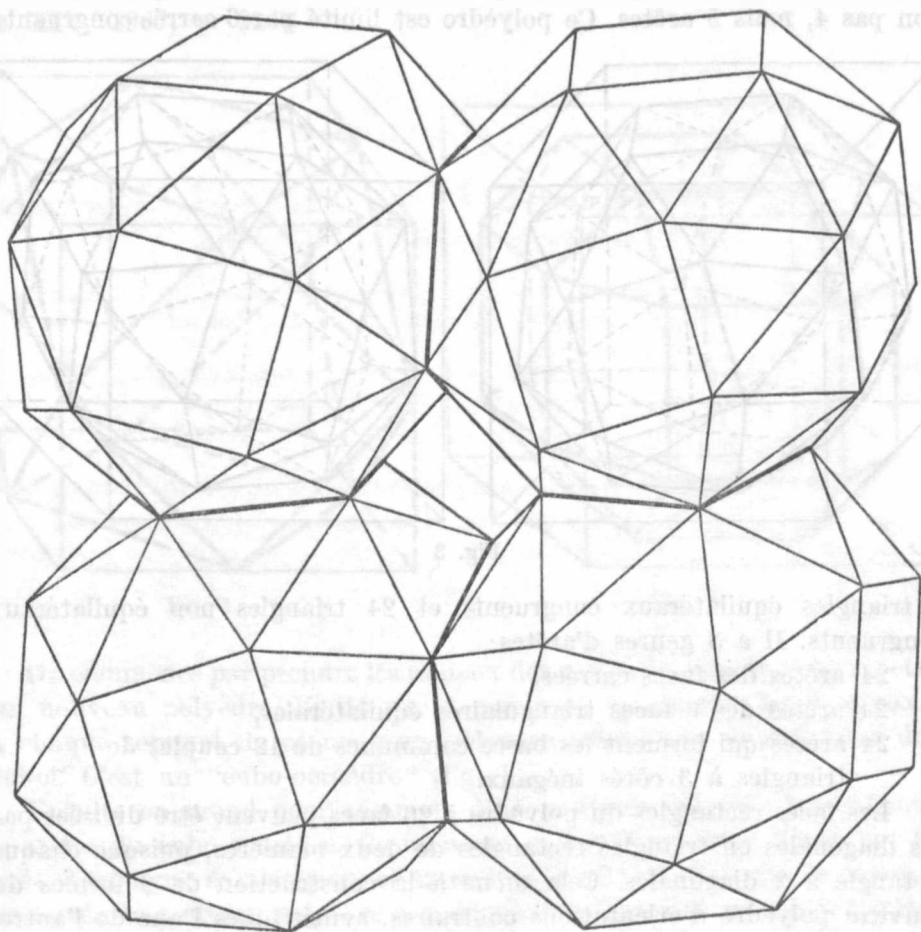


Fig. 4

On sait que la construction de l'icosaèdre (v. p. ex. D. I. Pieriepiełkin „Kurs elementarnoj geometrii”, vol. II, Moscou 1949, pp. 283–285, construction 142) consiste d'abord à choisir dans l'espace 3 segments de droite égaux perpendiculaires deux à deux XX' , YY' , ZZ' , dont le milieu est commun. Par les extrémités de chacun de ces segments on mène de nouveaux segments parallèles respectivement à chacun des segments consécutifs des 3 segments primitifs, égaux deux à deux. On

joint ensuite l'extrémité de chaque segment nouveau aux extrémités du segment opposé à cette extrémité et on obtient ainsi 12 triangles isocèles congruents, ayant deux à deux une base commune (fig. 5). Entre ces 12 triangles isocèles sont disposés 8 triangles équilatéraux se touchant par leurs sommets (chàque sommet d'un triangle équilatéral est sommet commun de 2 triangles équilatéraux).

Dans l'icosaèdre on peut donc distinguer 8 faces qui sont des triangles équilatéraux congruents et 12 faces qui sont des triangles isocèles congruents. L'icosaèdre a deux classes d'arêtes :

24 arêtes des faces équilatérales, qui sont en même temps côtés égaux des faces isocèles,

6 arêtes qui sont les bases communes des isocèles pris deux à deux.

Les faces et les arêtes de ces deux classes ne sont congruentes que si l'icosaèdre est régulier.

En plaçant les 6 segments — bases des triangles isocèles — mentionnés dans la description de la construction de l'icosaèdre sur les faces du

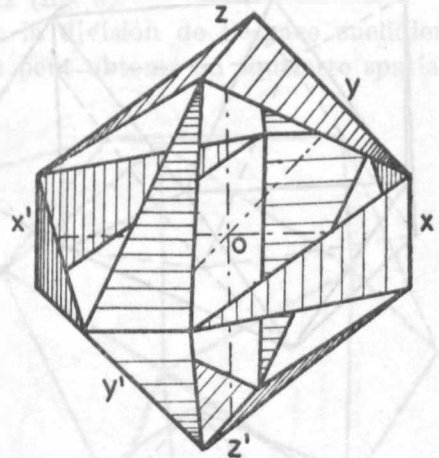


Fig. 5

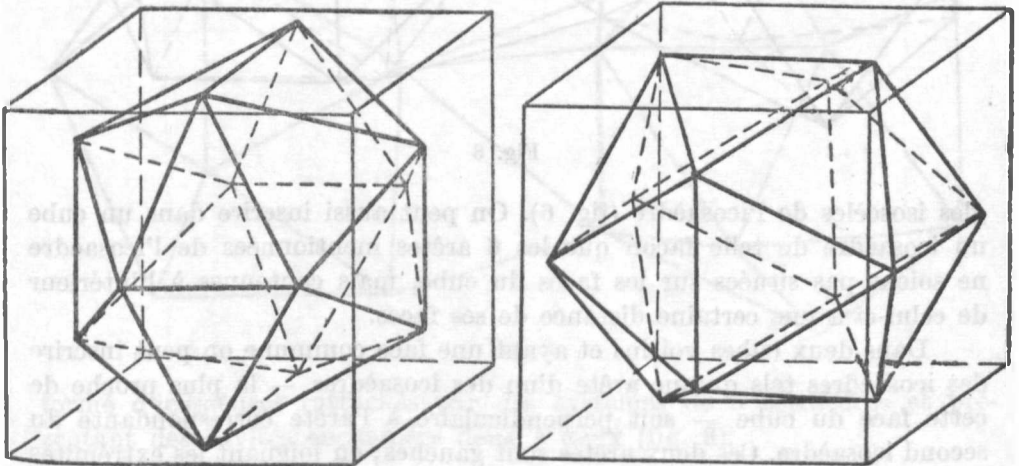


Fig. 6

cube, parallèlement à un couple d'arêtes de la face on obtient un icosaèdre inscrit au cube; on peut le faire de deux manières, suivant que l'on oriente parallèlement à l'un ou à l'autre couple d'arêtes du cube la base des trian-

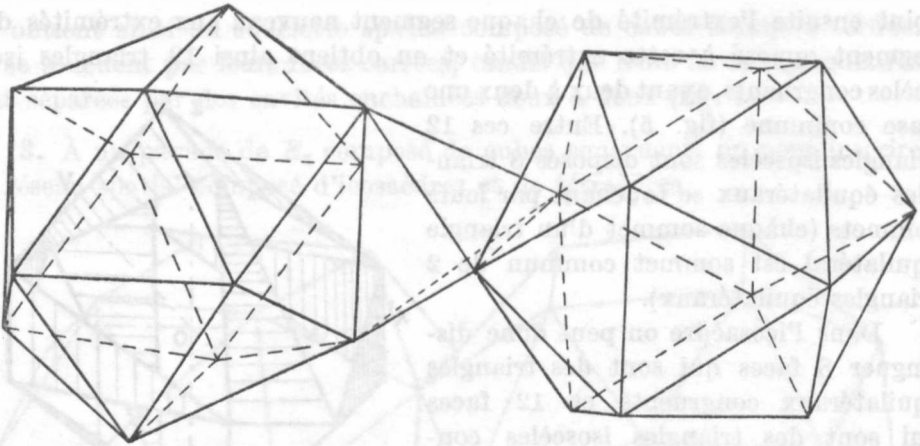


Fig. 7

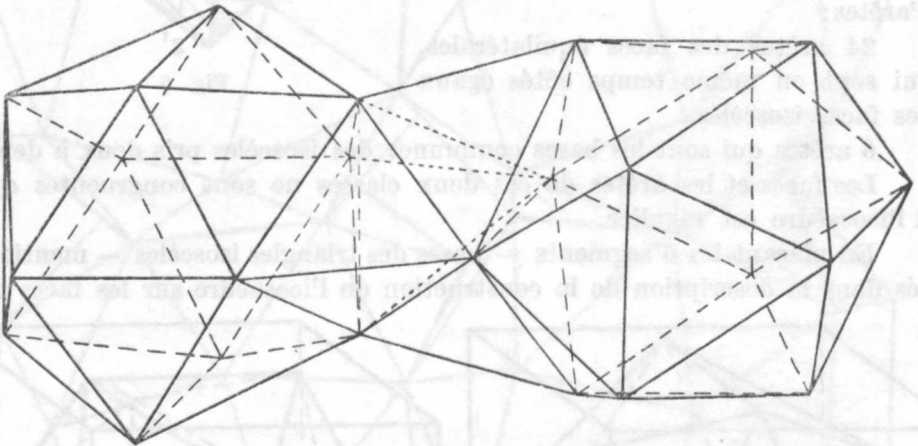


Fig. 8

gles isocèles de l'icosaèdre (fig. 6). On peut aussi inscrire dans un cube un icosaèdre de telle façon que les 6 arêtes mentionnées de l'icosaèdre ne soient pas situées sur les faces du cube, mais contenues à l'intérieur de celui-ci à une certaine distance de ses faces.

Dans deux cubes voisins et ayant une face commune on peut inscrire des icosaèdres tels qu'une arête d'un des icosaèdres — la plus proche de cette face du cube — soit perpendiculaire à l'arête correspondante du second icosaèdre. Ces deux arêtes sont gauches; en joignant les extrémités de chacune d'elles aux extrémités de l'autre on obtient un tétraèdre intercalé entre les icosaèdres (fig. 7).

En joignant encore un sommet de l'icosaèdre au sommet du tétraèdre par un segment qui n'est évidemment pas situé sur la surface de l'icosaèdre on obtient un nouveau tétraèdre, dont la base est une face du tétraèdre

précédent. D'une façon analogue on obtient encore 3 tétraèdres congruents au nouveau tétraèdre, et enfin on a, entre les 2 icosaèdres, un système de 5 tétraèdres, un central et 4 latéraux (fig. 8).

En prenant pour point de départ la division de l'espace euclidien à 3 dimensions en cubes congruents on peut obtenir un squelette spatial

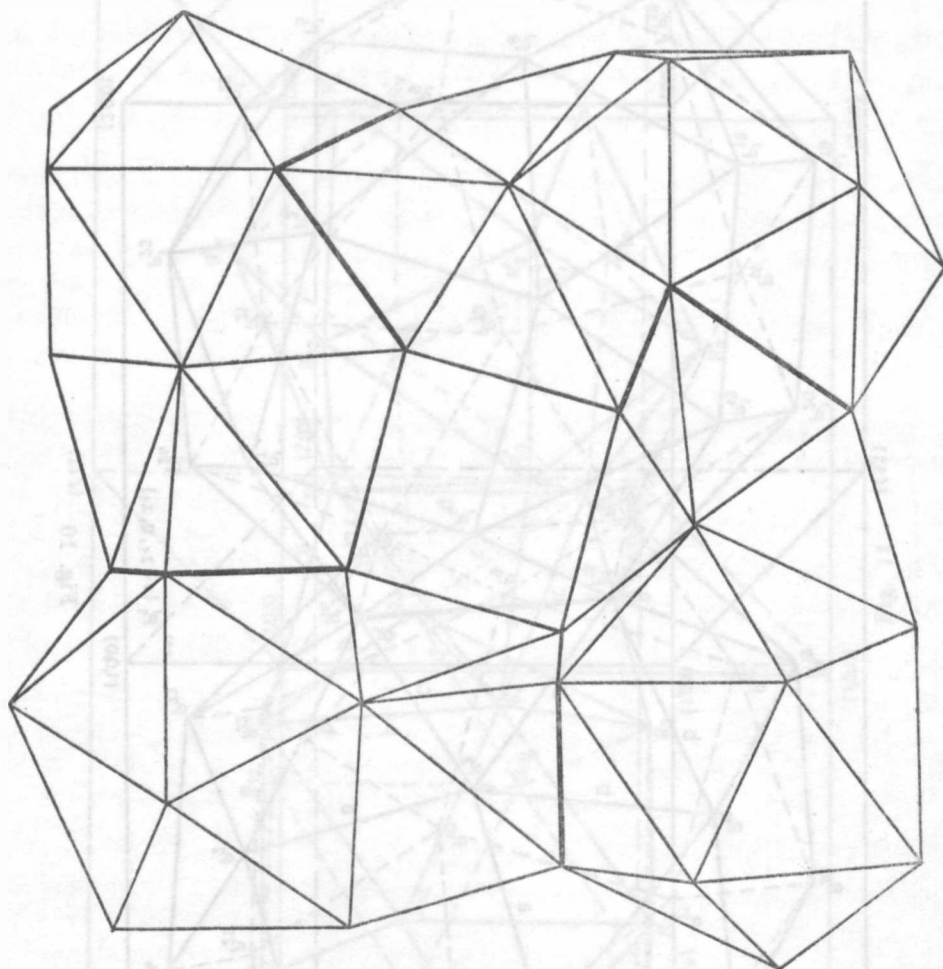


Fig. 9

formé d'icosaèdres rattachés par des systèmes de 5 tétraèdres et présentant des cavités enchaînées deux à deux (fig. 9).

4. Démonstration analytique du fait que les cavités dans le squelette spatial des cubes tronqués tordus peuvent être comblées par un squelette spatial d'icosaèdres et de tétraèdres et inversement.

Introduisons un système de coordonnées dont l'origine est le sommet antérieur, inférieur et gauche du cube fondamental d'arête unité (la face

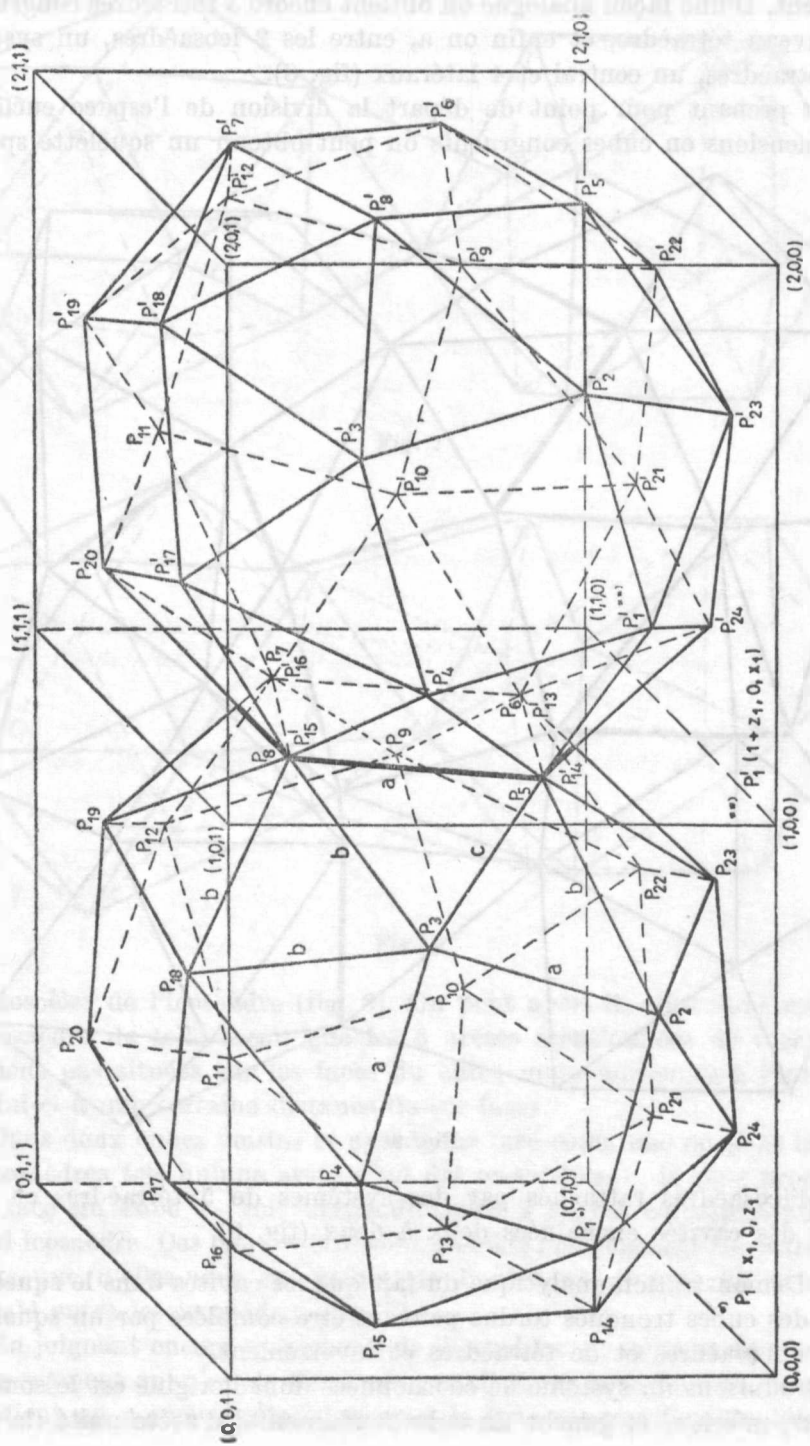


Fig. 10

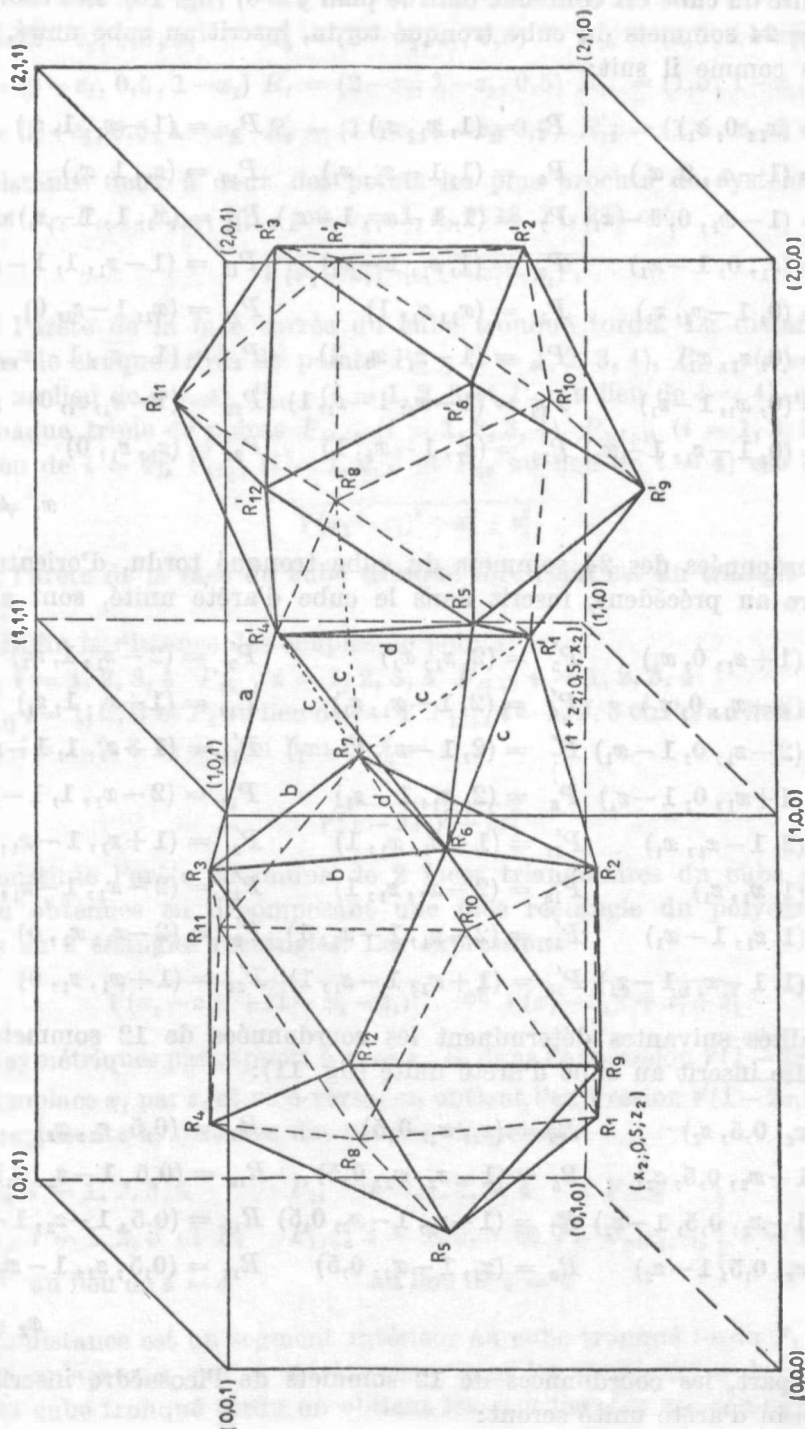


Fig. 11

antérieure du cube est contenue dans le plan $y = 0$ (fig. 10). Les coordonnées des 24 sommets du cube tronqué tordu, inscrit au cube unité, sont définies comme il suit:

$$\begin{array}{lll}
 P_1 = (x_1, 0, z_1) & P_5 = (1, x_1, z_1) & P_9 = (1 - x_1, 1, z_1) \\
 P_2 = (1 - z_1, 0, x_1) & P_6 = (1, 1 - z_1, x_1) & P_{10} = (z_1, 1, x_1) \\
 P_3 = (1 - x_1, 0, 1 - z_1) & P_7 = (1, 1 - x_1, 1 - z_1) & P_{11} = (x_1, 1, 1 - z_1) \\
 P_4 = (z_1, 0, 1 - x_1) & P_8 = (1, z_1, 1 - x_1) & P_{12} = (1 - z_1, 1, 1 - x_1) \\
 P_{13} = (0, 1 - x_1, z_1) & P_{17} = (x_1, z_1, 1) & P_{21} = (x_1, 1 - z_1, 0) \\
 P_{14} = (0, z_1, x_1) & P_{18} = (1 - z_1, x_1, 1) & P_{22} = (1 - z_1, 1 - x_1, 0) \\
 P_{15} = (0, x_1, 1 - z_1) & P_{19} = (1 - x_1, 1 - z_1, 1) & P_{23} = (1 - x_1, z_1, 0) \\
 P_{16} = (0, 1 - z_1, 1 - x_1) & P_{20} = (z_1, 1 - x_1, 1) & P_{24} = (z_1, z_1, 0)
 \end{array}$$

$$x_1 \neq z_1$$

Les coordonnées des 24 sommets du cube tronqué tordu, d'orientation contraire au précédent, inscrit dans le cube d'arête unité, sont alors:

$$\begin{array}{lll}
 P'_1 = (1 + z_1, 0, x_1) & P'_5 = (2, z_1, x_1) & P'_9 = (2 - z_1, 1, x_1) \\
 P'_2 = (2 - x_1, 0, z_1) & P'_6 = (2, 1 - x_1, z_1) & P'_{10} = (1 + x_1, 1, z_1) \\
 P'_3 = (2 - z_1, 0, 1 - x_1) & P'_7 = (2, 1 - z_1, 1 - x_1) & P'_{11} = (1 + z_1, 1, 1 - x_1) \\
 P'_4 = (1 + x_1, 0, 1 - z_1) & P'_8 = (2, x_1, 1 - z_1) & P'_{12} = (2 - x_1, 1, 1 - z_1) \\
 P'_{13} = (2, 1 - z_1, x_1) & P'_{17} = (1 + z_1, x_1, 1) & P'_{21} = (1 + z_1, 1 - x_1, 0) \\
 P'_{14} = (1, x_1, z_1) & P'_{18} = (2 - x_1, z_1, 1) & P'_{22} = (2 - x_1, 1 - z_1, 0) \\
 P'_{15} = (1, z_1, 1 - x_1) & P'_{19} = (2 - z_1, 1 - x_1, 1) & P'_{23} = (2 - z_1, x_1, 0) \\
 P'_{16} = (1, 1 - x_1, 1 - z_1) & P'_{20} = (1 + x_1, 1 - z_1, 1) & P'_{24} = (1 + x_1, z_1, 0)
 \end{array}$$

Les égalités suivantes déterminent les coordonnées de 12 sommets de l'icosaèdre inscrit au cube d'arête unité (fig. 11):

$$\begin{array}{lll}
 R_1 = (x_2, 0,5, z_2) & R_5 = (z_2, x_2, 0,5) & R_9 = (0,5, z_2, x_2) \\
 R_2 = (1 - x_2, 0,5, z_2) & R_6 = (1 - z_2, x_2, 0,5) & R_{10} = (0,5, 1 - z_2, x_2) \\
 R_3 = (1 - x_2, 0,5, 1 - z_2) & R_7 = (1 - z_2, 1 - x_2, 0,5) & R_{11} = (0,5, 1 - z_2, 1 - x_2) \\
 R_4 = (x_2, 0,5, 1 - z_2) & R_8 = (z_2, 1 - x_2, 0,5) & R_{12} = (0,5, z_2, 1 - x_2)
 \end{array}$$

$$x_2 \neq z_2$$

D'autre part, les coordonnées de 12 sommets de l'icosaèdre inscrit au cube voisin d'arête unité seront:

$$\begin{aligned}
 R'_1 &= (1 + z_2, 0, 5, x_2) & R'_5 &= (1 + x_2, z_2, 0, 5) & R'_9 &= (1, 5, x_2, z_2) \\
 R'_2 &= (2 - z_2, 0, 5, x_2) & R'_6 &= (2 - x_2, z_2, 0, 5) & R'_{10} &= (1, 5, 1 - x_2, z_2) \\
 R'_3 &= (2 - z_2, 0, 5, 1 - x_2) & R'_7 &= (2 - x_2, 1 - z_2, 0, 5) & R'_{11} &= (1, 5, 1 - x_2, 1 - z_2) \\
 R'_4 &= (1 + z_2, 0, 5, 1 - x_2) & R'_8 &= (1 + x_2, 1 - z_2, 0, 5) & R'_{12} &= (1, 5, x_2, 1 - z_2)
 \end{aligned}$$

La distance deux à deux des points les plus proches du système de 4 points $P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, P_{i+3}$ (où $i = 1, 5, 9, 13, 17, 21$) est

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (1 - x_1 - z_1)^2}.$$

C'est l'arête de la face carrée du cube tronqué tordu. La distance des points de chaque triple de points P_{4i-2} ($i = 1, 2, 3, 4$), P_{4i+1} ($i = 1, 2, 3$ et P_1 au lieu de $i = 4$), P_{24-i} ($i = 1, 2, 3$ et P_{24} au lieu de $i = 4$), et aussi de chaque triple de points P_{4i-1} ($i = 1, 2, 3, 4$), $P_{4(i+1)}$ ($i = 1, 2, 3$ et P_4 au lieu de $i = 4$), P_{17+i} ($i = 1, 2, 3$ et P_{17} au lieu de $i = 4$) est égale à

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + x_1^2 + z_1^2}.$$

C'est l'arête de la face du cube tronqué tordu qui est un triangle équilatéral.

Enfin la distance des couples de points :

P_{4i-2} $i = 1, 2, 3, 4$ P_{4i-1} $i = 1, 2, 3, 4$ P_{4i-3} $i = 1, 2, 3, 4$
 $P_{4(i+1)}$ $i = 1, 2, 3$ et P_4 au lieu de $i = 4$ P_{17+i} $i = 1, 2, 3$ et P_{17} au lieu de $i = 4$
 P_{24-i} $i = 1, 2, 3$ et P_{24} au lieu de $i = 4$
 est :

$$\sqrt{(1 - 2x_1)^2 + 2z_1^2}$$

et constitue l'arête commune de 2 faces triangulaires du cube tronqué tordu obtenues en décomposant une face rectangle du polyèdre à 26 faces en 2 triangles rectangles. Les expressions

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (1 - x_1 - z_1)^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + x_1^2 + z_1^2}$$

sont symétriques par rapport à x_1 et z_1 . Si dans l'expression $\sqrt{(1 - 2x_1)^2 + 2z_1^2}$ on remplace x_1 par z_1 et vice-versa, on obtient l'expression $\sqrt{(1 - 2z_1)^2 + 2x_1^2}$, qui représente la distance des couples de points :

$$\left. \begin{array}{lll}
 P_{4i-1} \quad i = 1, 2, 3, 4 & P_{4i} \quad i = 1, 2, 3, 4 & P_{4i-2} \\
 P_{4i+1} \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } P_1 & P_{17+i} \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } P_{17} & P_{24-(i-1)} \\
 \text{au lieu de } i = 4 & \text{au lieu de } i = 4 &
 \end{array} \right\} i = 1, 2, 3, 4$$

Cette distance est un segment intérieur au cube tronqué tordu $P_1 \dots P_{24}$. En remplaçant x_1 par z_1 et vice-versa dans les coordonnées des sommets P_i du cube tronqué tordu on obtient les coordonnées des sommets P'_i du

cube tronqué tordu d'orientation contraire, inscrit au même cube initial. Alors l'expression $\sqrt{(1-2z_1)^2 + 2x_1^2}$ devient $\sqrt{(1-2x_1)^2 + 2z_1^2}$ et la distance entre les couples de points mentionnés devient l'arête commune de 2 faces triangulaires du cube tronqué tordu.

En mettant le signe d'égalité entre les expressions

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (1 - x_1 - z_1)^2}, \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + x_1^2 + z_1^2}, \sqrt{(1 - 2x_1)^2 + 2z_1^2}$$

on déterminera les coordonnées des sommets du cube tronqué tordu semi-régulier. On les déduit de 2 équations du 3 degré à une inconnue:

$$2x_1^3 + 4x_1^2 + 4x_1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 4z_1^3 - 8z_1^2 + 6z_1 - 1 = 0.$$

Ces équations ont chacune une racine réelle:

$$x_1 = \frac{2}{3} - \sqrt[3]{\frac{1}{12} \left(\sqrt[3]{\frac{13}{9} - \sqrt{\frac{11}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{13}{9} + \sqrt{\frac{11}{3}}} \right)};$$

$$z_1 = \frac{2}{3} - \sqrt[3]{\frac{1}{24} \left(\sqrt[3]{\frac{17}{9} - \sqrt{\frac{11}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{17}{9} + \sqrt{\frac{11}{3}}} \right)}.$$

Considérons ensuite dans l'icosaèdre les triples de sommets: $R_1 R_5 R_9$, $R_1 R_6 R_{10}$, $R_2 R_6 R_9$, $R_2 R_7 R_{10}$, $R_3 R_6 R_{12}$, $R_3 R_7 R_{11}$, $R_4 R_5 R_{12}$, $R_4 R_8 R_{11}$. La distance entre deux points de chacun de ces triples est égale à

$$\sqrt{(x_2 - z_2)^2 + (0,5 - x_2)^2 + (0,5 - z_2)^2}$$

et représente l'arête de la face qui est un triangle équilatéral.

Pour les couples de points: $R_1 R_2$, $R_3 R_4$, $R_5 R_8$, $R_6 R_7$, $R_9 R_{12}$, $R_{10} R_{11}$ la distance est:

$$\sqrt{(1 - 2x_2)^2} = \sqrt{2(0,5 - x_2)^2}$$

et constitue la base commune de 2 faces qui sont des triangles isocèles. Dans le tétraèdre $R_6 R_7 R'_1 R'_4$, situé entre les icosaèdres $R_1 \dots R_{12}$ et $R'_1 \dots R'_{12}$, outre les arêtes $R_6 R_7$ et $R'_1 R'_4$ de longueur $\sqrt{2(0,5 - x_2)^2}$ il y a les arêtes congruentes $R_6 R'_1$, $R_6 R'_4$, $R_7 R'_1$, $R_7 R'_4$ de longueur

$$\sqrt{2(0,5 - x_2)^2 + (2z_2)^2}.$$

Dans le tétraèdre $R_3 R_6 R_7 R'_4$ - construit sur la face $R_6 R_7 R'_4$ du tétraèdre précédent, il y a, outre les arêtes $R_3 R_6$, $R_3 R_7$, $R_6 R_7$, $R_6 R'_4$, $R_7 R'_4$, une arête $R_3 R'_4$ de longueur

$$\sqrt{(x_2 + z_2)^2 + (x_2 - z_2)^2}.$$

En faisant égales les expressions $\sqrt{(x_2 - z_2)^2 + (0,5 - x_2)^2 + (0,5 - z_2)^2}$, $\sqrt{2(0,5 - x_2)^2 + (2z_2)^2}$, $\sqrt{(x_2 + z_2)^2 + (x_2 - z_2)^2}$ on déterminera les coordon-

nées des sommets de l'icosaèdre (non régulier). On les tire de 2 équations du 3^e degré à une inconnue :

$$8x_2^3 + 4x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0 \text{ et } 8z_2^3 + 4z_2^2 + 6z_2 - 1 = 0.$$

Ces équations admettent chacune une racine réelle :

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{24}} \left(\sqrt[3]{\frac{17}{9} - \sqrt{\frac{11}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{17}{9} + \sqrt{\frac{11}{3}}} \right) - \frac{1}{6};$$

$$z_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{12}} \left(\sqrt[3]{\frac{13}{9} - \sqrt{\frac{11}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{13}{9} + \sqrt{\frac{11}{3}}} \right) - \frac{1}{6}.$$

On voit aisément que $x_1 + z_2 = 0,5$ et $z_1 + x_2 = 0,5$, donc $x_2 = 0,5 - z_1$ et $z_2 = 0,5 - x_1$. En mettant ces valeurs de x_2 et z_2 dans les expressions

$$\sqrt{(x_2 - z_2)^2 + (0,5 - x_2)^2 + (0,5 - z_2)^2},$$

$$\sqrt{2(0,5 - x_2)^2}, \sqrt{2(0,5 - x_2)^2 + (2z_2)^2}, \sqrt{(x_2 + z_2)^2 + (x_2 - z_2)^2}$$

on obtient les expressions :

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + x_1^2 + z_1^2}, \sqrt{(2z_1)^2}, \sqrt{(1 - 2x_1)^2 + 2z_1^2}, \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (1 - x_1 - z_1)^2}.$$

On voit donc :

- 1^o que l'arête d'une face carrée du cube tronqué tordu est congruente à celle du tétraèdre latéral dans le système de 5 tétraèdres ($R_3R'_4$),
- 2^o que l'arête d'une face du cube tronqué tordu qui est un triangle équilatéral est congruente à celle de la face de l'icosaèdre qui est un triangle équilatéral, et aussi à l'arête du tétraèdre latéral dans le système de 5 tétraèdres,
- 3^o que l'arête du cube tronqué tordu qui est le côté commun de 2 faces triangulaires, obtenues en décomposant une face rectangle du polyèdre à 26 faces en 2 triangles rectangles, est congruents à l'arête du tétraèdre latéral dans le système de 5 tétraèdres,
- 4^o que l'arête qui est la base commune de 2 faces triangulaires isocèles dans l'icosaèdre n'admet pas d'arête correspondante dans le cube tronqué tordu.

De la conclusion 4^o et de la construction — décrite à la p. 47 — du système de 5 tétraèdres intercalé entre 2 icosaèdres il résulte que l'arête de longueur

$$\sqrt{2(0,5 - x_2)^2} = \sqrt{(2z_1)^2}$$

est commune à l'icosaèdre, au tétraèdre central dans le système et à 2 tétraèdres dans le système. On le constate aussi en évaluant la somme

des angles plans des dièdres suivant cette arête — pour l'icosaèdre régulier et pour 3 tétraèdres réguliers cette somme serait

$$138^\circ + 212^\circ = 350^\circ.$$

De la conclusion 1° et aussi de la construction du squelette spatial composé de cubes tronqués tordus il résulte que l'arête de longueur

$$\sqrt{(x_2 + z_2)^2 + (x_2 - z_2)^2} = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (1 - x_1 - z_1)^2}$$

est commune à 2 cubes tronqués tordus et à 1 tétraèdre latéral dans le système de 5 tétraèdres. En évaluant la somme des angles plans des dièdres suivant cette arête pour 2 cubes tronqués tordus semi-réguliers et 1 tétraèdre régulier on aurait:

$$2 \cdot 143^\circ + 71^\circ = 357^\circ. *)$$

De la conclusion 2° il résulte ensuite que l'arête de longueur

$$\sqrt{(x_2 - z_2)^2 + (0,5 - x_2)^2 + (0,5 - z_2)^2} = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + x_1^2 + z_1^2}$$

(p. ex. l'arête R_3R_6) est commune au cube tronqué tordu, à l'icosaèdre et à un tétraèdre latéral dans le système de 5 tétraèdres, et aussi que la face du cube tronqué tordu qui est un triangle équilatéral est congruente à la face de l'icosaèdre qui est un triangle équilatéral. En évaluant la somme des angles plans des dièdres suivant l'arête mentionnée pour le cube tronqué tordu semi-régulier, l'icosaèdre régulier et le tétraèdre régulier on aurait

$$153^\circ + 138^\circ + 71^\circ = 362^\circ. **)$$

Enfin, de la conclusion 3° il résulte que l'arête de longueur $\sqrt{2(0,5 - x_2)^2 + (2z_2)^2} = \sqrt{(1 - 2x_1)^2 + 2z_1^2}$ (p. ex. l'arête R_1R_6) est commune au cube tronqué tordu, au tétraèdre central et à 2 tétraèdres latéraux dans le système de 5 tétraèdres.

En évaluant la somme des angles plans des dièdres suivant l'arête mentionnée pour le cube tronqué tordu semi-régulier et 3 tétraèdres réguliers on aurait

$$153^\circ + 212^\circ = 365^\circ.$$

5. Variétés de pavage de E_3 avec des cubes tronqués tordus, des icosaèdres et des tétraèdres.

*) L'angle plan du dièdre dans le cube tronqué tordu semi-régulier suivant l'arête commune à une face carrée et une face triangulaire vaut 143° .

**) L'angle plan du dièdre dans le cube tronqué tordu semi-régulier suivant l'arête commune à 2 faces triangulaires vaut 153° .

Désignons les arêtes

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (1 - x_1 - z_1)^2} = \sqrt{(x_2 + z_2)^2 + (x_2 - z_2)^2} \quad \text{par } a,$$

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + x_1^2 + z_1^2} = \sqrt{(x_2 - z_2)^2 + (0,5 - x_2)^2 + (0,5 - z_2)^2} \quad \text{par } b,$$

$$\sqrt{2(0,5 - x_1)^2 + 2z_1^2} = \sqrt{2(0,5 - x_2)^2 + (2z_2)^2} \quad \text{par } c,$$

$$\sqrt{(2z_1)^2} = \sqrt{2(0,5 - x_2)^2} \quad \text{par } d.$$

On ne saurait avoir $a = b = c = d$. Supposons, en effet, que l'on ait $b = c = d$, c'est-à-dire qu'il y ait des icosaèdres réguliers et que les tétraèdres centraux dans les systèmes de 5 tétraèdres soient aussi réguliers. La somme des angles plans des dièdres autour de l'arête d doit être égale à 360° . L'angle plan du dièdre de l'icosaèdre régulier vaut 138° , celui du tétraèdre régulier $70^\circ 30'$. Par conséquent la somme des angles plans des dièdres de 2 tétraèdres latéraux dans les systèmes de 5 tétraèdres vaut $151^\circ 30'$. Un de ces angles plans vaut donc $75^\circ 45'$. À cet angle est opposée l'arête a . (On voit aisément que l'arête a est contenue dans un plan perpendiculaire à l'arête d — les arêtes a et d sont perpendiculaires). Comme dans tout triangle à un plus grand angle est opposé un plus grand côté, on a $a > b = c = d$. Il en résulte que les tétraèdres latéraux dans les systèmes de 5 tétraèdres ne peuvent être réguliers; par conséquent l'espace E_3 ne peut être pavé en même temps avec des icosaèdres réguliers, des tétraèdres uniquement réguliers et cubes tronqués tordus semi-réguliers.

Tous les cas possibles de pavage de E_3 avec des cubes tronqués tordus, des icosaèdres et des tétraèdres ont été représentés dans le tableau ci-joint.

Cherchons maintenant les conditions auxquelles doivent satisfaire les arêtes a, b, c, d dans la forme la plus générale du pavage de E_3 en question, c'est-à-dire tel que $a \neq b \neq c \neq d$.

La condition $a \neq b \neq c \neq d$ doit être renforcée par la condition de constructibilité des triangles abc, bdb, cdc , soit

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|a - c| < b < a + c \quad 0 < d < 2b$$

$$|a - b| < c < a + b \quad 0 < d < 2c.$$

Pour que ces triangles ne soient pas contenus dans un plan, il est nécessaire que soit remplie l'inégalité $\rho(a, d) > 0$. La distance des droites a et b est la hauteur d'un triangle dont les côtés sont respectivement égaux à a , à la hauteur du triangle bdb et à la hauteur du triangle cdc . Les hauteurs de ces triangles peuvent être calculées à partir de la formule donnant l'aire du triangle $S = ph/2$, celle-ci s'obtenant à l'aide de la formule de

Héron. Donc $h = 2S/p$. En appliquant la dernière formule au triangle bdb on obtient :

$$h = \frac{2\sqrt{\frac{2b+d}{2} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \frac{2b-d}{2}}}{d} = \frac{2 \cdot \frac{d}{2} \sqrt{\frac{4b^2-d^2}{2}}}{d} = \frac{\sqrt{4b^2-d^2}}{2}.$$

Pour le triangle cdc on obtient de même $\frac{\sqrt{4c^2-d^2}}{2}$. La distance des droites a et d est donc :

$$\rho(a, d) = \frac{2\sqrt{\frac{2a+\sqrt{4b^2-d^2}+\sqrt{4c^2-d^2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{4b^2-d^2}+\sqrt{4a^2-d^2}-2a}{4}}}{a} \times \\ \times \frac{2a+\sqrt{4b^2-d^2}-\sqrt{4c^2-d^2}}{4} \cdot \frac{2a+\sqrt{4c^2-d^2}-\sqrt{4b^2-d^2}}{4}.$$

Pour que $\rho(a, d) > 0$ on doit avoir $(\sqrt{4b^2-d^2}+\sqrt{4c^2-d^2}-2a)(2a+\sqrt{4b^2-d^2}-\sqrt{4c^2-d^2}) > 0$.

En chassant les radicaux des expressions positives figurant dans chacune des parenthèses on arrive au même résultat :

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 > a^4 + b^4 + c^4 + a^2d^2.$$

Cette inégalité peut être transformée :

$$b^4 + c^4 - 2b^2c^2 < a^2[2(b^2 + c^2) - (a^2 + d^2)] \\ 0 < (b^2 - c^2)^2 < a^2[2(b^2 + c^2) - (a^2 + d^2)].$$

Il en résulte que

$$0 < 2(b^2 + c^2) - (a^2 + d^2)$$

donc

$$a^2 + d^2 < 2(b^2 + c^2).$$

Des conditions de constructibilité des triangles on tire :

$$a^2 < b^2 + 2bc + c^2$$

$$d^2 < 4b^2$$

$$a^2 < b^2 + 2b + c^2$$

$$d^2 < 4c^2$$

$$2(a^2 + d^2) < 6b^2 + 4bc + 6c^2.$$

De là et de $b^2 - 2bc + c^2 < a^2$, $0 < d^2$ on tire

$$(b - c)^2 < a^2 + d^2 < 2(b^2 + c^2) + (b + c)^2.$$

On admet finalement pour condition de constructibilité du tétraèdre latéral dans le système de 5 tétraèdres

$$|b - c| < a$$

$$a^2 + d^2 < 2(b^2 + c^2).$$

Dans les 4 premiers cas mentionnés dans le tableau si l'on rend égales les longueurs de 3 d'entre 4 genres d'arêtes on obtient des systèmes de 2 équations à 2 inconnues, celles-ci étant les coordonnées des polyèdres qui remplissent E_3 . En éliminant l'une des variables on obtient encore 2 équations — chacune à une inconnue — de degré au moins 2 :

Le cas $a = b = c \neq d$ correspond au cube tronqué tordu. Pour les coordonnées x_2 et z_2 on obtient les équations (v. p. 53) :

$$8x_2^3 + 4x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0, \quad 8z_2^3 + 4z_2^2 + 6z_2 - 1 = 0.$$

Le cas $a = b = d \neq c$ correspond à l'icosaèdre régulier. Pour les coordonnées x_2 et z_2 on obtient les équations :

$$16x_2^4 - 16x_2^3 - 24x_2^2 + 4x_2 + 1 = 0, \quad 16z_2^4 + 16z_2^3 - 24z_2^2 - 4z_2 + 1 = 0.$$

Le cas $a = c = d \neq b$ correspond au tétraèdre régulier central dans le système de 5 tétraèdres. Les équations pour x_2 et z_2 sont :

$$4x_2^2 - 12x_2 + 3 = 0, \quad 16z_2^4 - 40z_2^2 + 1 = 0.$$

Le cas $b = c = d \neq a$ correspond à l'icosaèdre régulier et au tétraèdre régulier central dans le système de 5 tétraèdres. Pour x_2 et z_2 on obtient les relations suivantes :

$$4(\sqrt{2} - 1)x_2^2 + 8x_2 - (\sqrt{2} + 1) = 0,$$

$$4(\sqrt{2} - 1)z_2^2 - 2\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)z_2 + 1 = 0.$$

6. La figure "circum-sommitale" de la cellule à 4 dimensions est un polyèdre dont le centre est le sommet de la cellule. Les sommets de ce polyèdre sont les milieux des arêtes de la cellule issues de son sommet. En considérant le pavage de E_3 avec des cubes tronqués tordus, des icosaèdres et des tétraèdres comme une cellule dégénérée, impropre de E_4 — de

même que le pavage du plan est un polyèdre dégénéré impropre — on détermine sa “figure circum-sommitale” (fig. 12).

De chaque sommet de notre cellule sont issues 9 arêtes, soit:

- 2 arêtes du type a — les cubes tronqués tordus ont des faces carrées communes, chaque sommet d'un carré appartenant à 2 arêtes du carré,
- 4 arêtes du type b — de chaque sommet de l'icosaèdre sont issues 1 arête du type d 4 arêtes des faces qui sont des triangles équilatéraux et 1 arête qui est la base commune de 2 faces triangles isocèles,
- 2 arêtes du type c — chaque face du tétraèdre central dans le système de 5 tétraèdres est en même temps face d'un tétraèdre latéral de ce système.

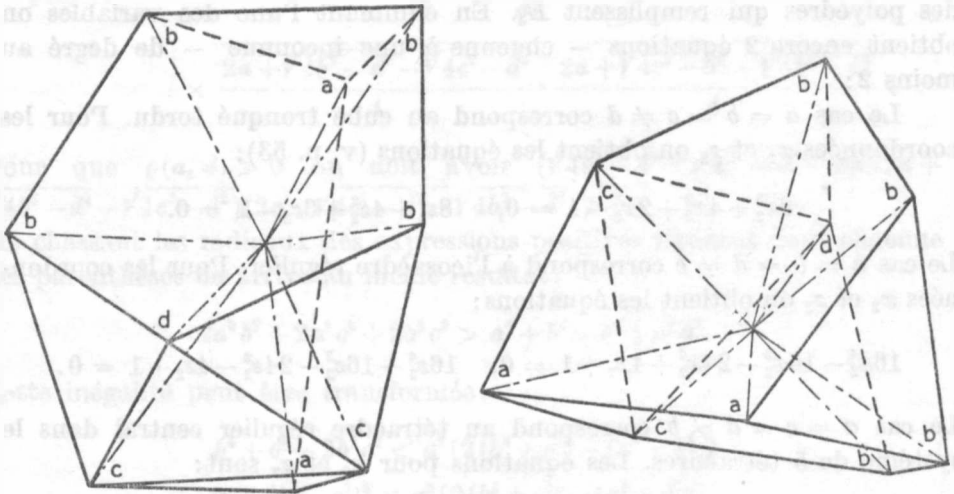


Fig. 12

La “figure circum-sommitale” a dont 9 sommets. Elle est limitée par 5 triangles, intersections de tétraèdres (3 tétraèdres latéraux, un tétraèdre central d'un système de 5 tétraèdres et un tétraèdre latéral d'un autre système de 5 tétraèdres) et par 5 pentagones, intersections d'un icosaèdre et de 2 cubes tronqués tordus. Sa forme et la disposition de ses faces (4 triangles, 3 pentagones et 1 triangle) rappelle la figure circum-sommitale de la cellule $s(3, 4, 3)$. Cependant, autrement que celle-ci, elle n'est pas un polyèdre convexe. On peut le constater par un raisonnement analytique, en étudiant le signe des expressions donnant la distance de ses différents sommets aux plans qui contiennent ses faces. On trouve que les intersections d'un cube tronqué tordu et d'un icosaèdre ne sont des pentagones (pentagones contenus dans un plan) que si le cube tronqué tordu est semi-régulier et l'icosaèdre est régulier. Comme nous

l'avons montré précédemment, ces conditions ne sauraient être remplies simultanément.

7. Récapitulant nous constatons qu'il existe un pavage de E_3 composé de cubes tronqués tordus (polyèdres à 38 faces) d'orientations gauche et droite, d'icosaèdres et de tétraèdres. Dans ce pavage il existe 4 genres d'arêtes. Les expressions algébriques donnant la longueur des arêtes, calculées en fonction des coordonnées des sommets communs des polyèdres qui forment le pavage, diffèrent entre elles. On peut distinguer 14 variétés de pavage suivant le rapport mutuel des longueurs des arêtes des différentes variétés. Il n'existe pas de pavage semi-régulier, dans lequel les icosaèdres et tous les tétraèdres seraient réguliers et les cubes tronqués tordus semi-réguliers. Le pavage de E_3 considéré ici présente une structure interne analogue à celle de la cellule $s(3, 4, 3)$ dans E_4 : systèmes composés de 5 tétraèdres, icosaèdres et cubes tronqués tordus comme polyèdres dont la figure circum-sommitale est du même type que les icosaèdres (pentagone).

Pour terminer remarquons encore que dans le squelette spatial composé d'icosaèdres et de tétraèdres (v. p. 47) on pourrait remplacer tous les icosaèdres par des dodécaèdres ou bien remplacer dans chaque système de 4 icosaèdres le premier et le troisième ou le second et le quatrième icosaèdre par un dodécaèdre. On aurait ainsi un nouveau pavage de E_3 . L'auteur n'a pas encore examiné ce cas de plus près. On peut cependant signaler que les systèmes composés de 5 tétraèdres — caractéristiques du pavage de E_3 étudié dans cet article — changeraient leur structure: le tétraèdre central serait entouré de pyramides de base pentagonale (le tétraèdre est une pyramide de base triangulaire).

Les coordonnées x et z des sommets des icosaèdres et de 12 d'entre les 20 sommets des dodécaèdres pour les réseaux spatiaux composés 1) uniquement d'icosaèdres (réguliers, le tétraèdre central dans le système de 5 tétraèdres étant aussi régulier), 2) d'icosaèdres (réguliers) et de dodécaèdres (réguliers), 3) uniquement de dodécaèdres (réguliers) sont respectivement (rapportées au cube initial d'arête 1):

	x	z
1)	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5} - 1}{2(\sqrt{2} + \sqrt{5} + 1)}$	$\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2} + \sqrt{5} + 1)}$
2)	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{2(\sqrt{2} + \sqrt{5} + 2)}$	$\frac{\sqrt{2} - 1}{2(\sqrt{2} + \sqrt{5} + 2)}$
3)	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5} + 1}{2(\sqrt{2} + \sqrt{5} + 3)}$	$\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2} + \sqrt{5} + 3)}$

Tableau synoptique des 14 variétés de pavage de E_3 avec

Hypothèses relatives aux arêtes	Genre de			
	tétraèdres			
	Situation dans le système de 5 tétraèdres			centraux
	latéraux			
	Genre de			
t r i a n				
	équilatéraux différents	isocèles différents	côtés inégaux	isocèles 4 c-c-d
1. $a = b = c \neq d$	$a = b = c$ 2	$(b = c) - (b = c) - d$ 2	—	+
2. $a = b = d \neq c$	$b = b = d$ 1	$(a = b) - (a = b) - c$ $c \frac{2}{1} c - d$	—	+
3. $a = c = d \neq b$	$c = c = d$ 1	$(a = c) - (a = c) - b$ $b \frac{2}{1} b - c$	—	réguliers
4. $b = c = d \neq a$	$(b=c) = (b=c) = d$ 2	$(b = c) - (b = c) - a$ 2	—	réguliers
5. $a = b \neq c = d$	$c = c = d$ 1	$(a = b) - (a = b) - c$ $b \frac{2}{1} b - d$	—	réguliers
6. $a = c \neq b = d$	$b = b = d$ 1	$(a = c) - (a = c) - b$ $c \frac{2}{1} c - d$	—	+
7. $a = d \neq b = c$	—	$(b = c) - (b = c) - (a = d)$ 4	—	+
8. $a = b \neq c \neq d$	—	$(a = b) - (a = b) - c$ $b - b - d \quad c - c - d$ 1 1	—	+
9. $a = c \neq b \neq d$	—	$(a = c) - (a = c) - b$ 2 $b - b - d \quad c - c - d$ 1 1	—	+
10. $a = d \neq b \neq c$	—	$b - b - d \quad c - c - d$ 1 1	$a - b - c$ 2	+
11. $b = c \neq a \neq d$	—	$(b = c) - (b = c) - a$ 2 $b - b - d \quad c - c - d$ 1 1	—	+
12. $b = d \neq a \neq c$	$b = b = d$ 1	$c - c - d$ 1	$a - b - c$ 2	+
13. $c = d \neq a \neq b$	$c = c = d$ 1	$b - b - d$ 1	$a - b - c$ 2	réguliers
14. $a \neq b \neq c \neq d$	—	$b - b - d \quad c - c - d$ 1 1	$a - b - c$ 2	+

p o l y è d r e s

icosaèdres		cubes tronqués tordus			
f a c e s					
g l e s					carrés
équilatéraux 8 b-b-b	isosèles 12 b-b-d	équilatéraux 8 b-b-b	isosèles différents 24	côtes inégales 24	6 a-a-a-a
+	+	+	$a = b = c$ semi-réguliers	-	+
réguliers		+	$(a = b) - (a = b) - c$	-	+
+	+	+	$(a = c) - (a = c) - b$	-	+
réguliers		+	$(b = c) - (b = c) - a$	-	+
+	+	+	$(a = b) - (a = b) - c$	-	+
réguliers		+	$(a = c) - (a = c) - b$	-	+
+	+	+	$(b = c) - (b = c) - a$	-	+
+	+	+	$(a = b) - (a = b) - c$	-	+
+	+	+	$(a = c) - (a = c) - b$	-	+
+	+	+	-	$a - b - c$	+
+	+	+	$(b = c) - (b = c) - a$	-	+
réguliers		+	-	$a - b - c$	+
+	+	+	-	$a - b - c$	+
+	+	+	-	$a - b - c$	+

STRESZCZENIE

Przyjmując pewne wyróżnione punkty krawędzi lub ścian wielościanów umiarowych jako wierzchołki nowych wielościanów, możemy otrzymać wpisane w nie wielościany półumiarowe a także wielościany umiarowe inne niż wielościan wyjściowy.

W niniejszej pracy główny przedmiot zainteresowania stanowi wpisany w sześcian trzydziestoościan, ograniczony 6 kwadratami, 8 trójkątami równobocznymi i 24 przystającymi trójkątami, które w przypadku ogólnym mają trzy boki różnej długości — w przypadku szczególnym wszystkie krawędzie trzydziestoościanu są przystające, przystają oczywiście także wszystkie jego 32 ściany trójkątne i otrzymujemy wielościan półumiarowy nazywany „sześcianem ściętym skreconym” („snub cube”, „abgeschrägter Würfel”). Nazwa „sześcian ścięty skrecony” odnosi się w pracy również do trzydziestoościanu, który nie jest półumiarowy. Niezależnie od stopnia regularności czy też nieregularności, trzydziestoościan posiada postacie: lewoskrętną i prawoskrętną, będące wzajemnymi odbiciami zwierciadlanymi.

Powszechnie jest znany „parkietaż” przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej stanowiący wypełnienie jej przystającymi sześcianami. Wpisując w sześciany trzydziestoościany w taki sposób, aby w każdym dwu sąsiadujących ze sobą sześcianach były naprzemian lewoskrętna i prawoskrętna postać trzydziestoościanu, otrzymujemy szkielet przestrzenny z trzydziestoościanów, stykających się ze sobą ścianami kwadratowymi; ściany trójkątne stanowią ograniczenie pewnych jam przestrzennych.

W sześcian można również wpisać dwudziestościan umiarowy tak, aby 3 pary z pośród jego 30 krawędzi leżały w płaszczyznach ścian sześcianu przy czym środki tych krawędzi dwudziestościanu pokrywają się ze środkami ścian sześcianu zaś same krawędzie są równoległe do odpowiednich krawędzi sześcianu; środek dwudziestościanu pokrywa się ze środkiem sześcianu. Dwudziestościany wpisane w sześcian nie muszą być umiarowe — w przypadku ogólnym wystarcza założenie, iż mają 8 ścian w postaci przystających trójkątów równobocznych i 12 ścian w postaci przystających trójkątów równoramiennech. Z kolei kurczymy równomiernie dwudziestościan — środek jego pokrywa się nadal ze środkiem sześcianu, lecz wierzchołki jego nie leżą już na ścianach sześcianu tylko wewnątrz sześcianu. Przy ustawieniu dwudziestościanów wpisanych w dwa sąsiadujące ze sobą sześciany tak, aby najbliższe sobie ich krawędzie były prostopadłe (oczywiście krawędzie te są skośne), możemy umieścić pomiędzy dwoma dwudziestościanami czworościan i na ścianach tego czworościanu jeszcze cztery czworościany. Wobec tego w parkietaż E_3 utworzony

z przystających sześciątów można wpisać szkielet przestrzenny z dwudziestościanów połączonych pomiędzy sobą zespołami po 5 czworościanów (zespoły te stanowią w istocie najprostszy z wielościanów gwiaździstych). Szkielet ten posiada pewne jamy przestrzenne wokół wierzchołków parkietażu sześciennego.

Po wprowadzeniu współrzędnych kartezjańskich dla wierzchołków trzydziestościanu i dla wierzchołków dwudziestościanu, można wykazać analitycznie, że jamy przestrzenne w szkielecie zbudowanym z trzydziestościanów zostają całkowicie wypełnione przez szkielet zbudowany z dwudziestościanów i czworościanów i odwrotnie. Okazuje się zatem, iż otrzymaliśmy parkietaż E_3 w postaci wypełnienia sześciątami ściętymi skręconymi, dwudziestościanami i czworościanami. W parkietażu tym występują 4 klasy krawędzi dzięki czemu można rozróżnić 14 jego odmian. Odmiany te zostały zestawione w formie tabeli i przedyskutowane. Zostało wykazane, że nie może zachodzić przystawanie krawędzi z wszystkich 4 klas, możliwe jest natomiast przystawanie krawędzi z 3 klas. W przypadku najbardziej ogólnym, kiedy długości krawędzi ze wszystkich 4 klas są różne, zostały podane warunki jakie powinny spełniać długości krawędzi, aby parkietaż można było zrealizować. Zostało również wzmiankowane, iż w szkielecie przestrzennym z dwudziestościanów i czworościanów możliwa jest wymiana wszystkich bądź też połowy dwudziestościanów na dwunastościany i uzyskanie nowych rodzajów parkietażu E_3 , wymagających jednak dokonania szczegółowej analizy jaka jest ich postać.

Zasadniczy aspekt pracy stanowi podkreślenie faktu, że przy rozpatrywaniu omówionego parkietażu E_3 jako zdegenerowanej komórki E_4 parkietaż ten można zaliczyć do jednej „serii” z komórką E_4 o symbolu Schäfli $s(3, 4, 3)$ („snub 24-cell”, „abgestumpftes 24-Zell”), odkrytą w 1897 r. przez Thorolda Gosseta. Komórka $s(3, 4, 3)$ jest półregularna, ograniczona 24 dwudziestościanami umiarowymi i 120 czworościanami umiarowymi (występującymi jako 24 zespoły po 5 czworościanów — jeden środkowy i cztery boczne zbudowane na ścianach środkowego). Jej „figurę okołowierzchołkową” stanowi ośmiościan ograniczony 3 przystającymi pięciokątami foremnymi i 5 przystającymi trójkątami równobocznymi. W przypadku omawianego w pracy parkietażu E_3 „figura okołowierzchołkowa” jest ośmiościanem tego samego typu, ale wielościan ten nie jest wypukły.

РЕЗЮМЕ

Принимая некоторые выделенные точки ребер или граней правильных многогранников, как вершины новых многогранников, можем получить вписанные в них полуправильные многогранники, отличающиеся от исходных.

В данной работе рассматривается 38-гранник, ограниченный 6 квадратами, 8 равносторонними треугольниками и 24 конгруэнтными треугольниками, которые вообще имеют три разные по величине стороны. В особом случае все ребра являются конгруэнтными и тогда многогранник есть полуправильный и называется усеченным кубом Архимеда („snub cube”, „abgeschrägter Würfel”). Название усеченный куб Архимеда относится в работе и к 38-граннику, который не является полуправильным. Независимо от степени регулярности или нерегулярности 38-гранник имеет противоположно ориентированные разновидности: правую и левую, которые являются зеркально-симметричными.

Общеизвестной есть „трехмерная мозаика” эвклидова трехмерного пространства, составляющая его упаковку конгруэнтными кубами — „кубические соты”. Вписывая в кубы 38-гранники так, чтобы в каждом двух соприкасающихся между собой кубах были попеременно правоориентированная и левоориентированная разновидность 38-гранника, получаем пространственную конструкцию из этих 38-гранников. Они прикасаются между собой квадратными гранями; треугольные грани представляют ограничение пустот в пространстве.

В куб можно также вписать правильный икосаэдр так, чтобы из его 30 ребер 3 пары лежали в плоскостях граней куба. Середины ребер икосаэдра совпадают с серединами граней куба, зато сами ребра являются параллельными соответствующим ребрам куба и середина икосаэдра совпадает с серединой куба. Икосаэдры, вписанные в куб, не должны быть правильными — вообще, достаточно принять, что они имеют 8 граней как конгруэнтные равносторонние треугольники и 12 граней как конгруэнтные равнобедренные. В свою очередь уменьшаем равномерно икосаэдр, тогда середина его совпадает и далее с серединой куба, а вершины его уже не лежат на гранях куба, а только внутри куба. При установке икосаэдров, вписанных в два соприкасающихся куба так, чтобы наиболее близкие их ребра были перпендикулярны (конечно, эти ребра скрещивающиеся), можем поместить между двумя икосаэдрами тетраэдр и на гранях этого тетраэдра еще 4 тетраэдра. Поэтому в кубические соты можно вписать пространственную конструкцию из икосаэдров, соединенных между собой системами из 5 тетраэдров (эти системы по существу являются наиболее простыми из звездчатых многогранников). Эта конструкция имеет пространственные пустоты вокруг вершин трехмерной мозаики из кубов.

После введения декартовых координат для вершин 38-гранника и вершин икосаэдра можно аналитически доказать, что пространственные пустоты конструкции, построенной из 38-гранников, пол-

ностью упаковываются конструкцией, построенной из икосаэдров и тетраэдров и наоборот. Оказывается, что мы получили трехмерную мозаику эвклидового трехмерного пространства, служащую упаковкой усеченными кубами Архимеда, икосаэдрами и тетраэдрами. В упаковке выступает 4 класса ребер, благодаря чему ее можно разделить на 14 видов. Эти виды описаны и представлены в таблице. Невозможно, чтобы ребра из 4 классов могли быть конгруэнтными, зато возможно, чтобы были конгруэнтны ребра из 3 классов. В наиболее общем случае, когда длины ребер из всех 4 классов есть разные, даны условия, которые должны исполнять длины ребер, чтобы получить упаковку. Замечено, что в пространственной конструкции из икосаэдров и тетраэдров возможна замена всех икосаэдров или только половины их на додекаэдры и получение новых видов упаковки. Однако эти виды следует точно исследовать и определить их строение.

Главный аспект работы — это выделение факта, что упаковку эвклидового трехмерного пространства усеченными кубами Архимеда, икосаэдрами и тетраэдрами можно рассматривать как вырожденный политоп (ячейку) эвклидового четырехмерного пространства. Эту упаковку можно зачислить в одну „серию” с ячейкой E_4 с символом Шлефли $s(3, 4, 3)$ („усеченная 24-ячейка”) („snub 24 - cell”, „abgestumpftes 24 - Zell”), открытой в 1897 г. Торольдом Госсетом. „Усеченная ячейка” есть полуправильной, ограниченной 24 правильными икосаэдрами и 120 правильными тетраэдрами (выступающими как 24 системы по 5 тетраэдров — один центральный и 4 боковые, построенные на гранях центрального). Ее „вершинная фигура” — это октаэдр, ограниченный 3-мя конгруэнтными правильными пятиугольниками и 5 конгруэнтными равносторонними треугольниками. В случае упаковки, рассматриваемой в работе, „вершинная фигура” есть 8-гранником того же самого типа, однако, этот 8-гранник не является выпуклым.

