

Z Zakładu Matematyki II. Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

JAN KISYŃSKI

**Sur l'existence des solutions d'un problème
de M^{lle} Z. Szmydt relatif à l'équation**

$$\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$$

O istnieniu rozwiązań pewnego problemu P. Zofii Szmydt dotyczącego równania

$$\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$$

O существовании решений одной проблемы С. Шмыдт, относящейся к уравнению

$$\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$$

I

La théorie classique de l'équation hyperbolique aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes de la forme

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

a fait, depuis quelques années, des progrès considérables, initiés par un travail de MM. P. Hartman et A. Wintner [8], qui y ont généralisé certains résultats, dus à J. Schauder [15], relatifs au problème de Darboux. Moyennant un procédé semblable à celui de Cauchy-Lipschitz dans la théorie des équations différentielles ordinaires, et en appliquant le théorème de Arzela, ils ont démontré que ce problème admet des solutions régulières dans l'hypothèse que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ est continue dans un domaine convenable et qu'elle satisfait

à la condition de Lipschitz par rapport aux variables p et q^*) ce qui, d'ailleurs, n'assure pas encore l'unicité des solutions, de même que la seule continuité de la fonction $f(x, y, z, p, q)$ n'est pas suffisante pour l'existence des solutions. Une autre méthode basée sur le théorème d'Arzela a été utilisée par MM. A. Alexiewicz et W. Orlicz [1].

Parmi les travaux qui ont suivi la note citée de MM. P. Hartman et A. Wintner, ceux de Mlle Z. Szmydt [18]—[23] sont, à n'en pas douter, de haute importance. Dans [18], [19], [21], [22] et [23] on trouve un problème nouveau — nous l'appellerons problème (S) — relatif à l'équation (1), énoncé d'une façon si générale qu'il englobe, comme cas particuliers, non seulement les problèmes classiques de Darboux, Cauchy, Picard, Goursat, et les problèmes mixtes, mais encore bien d'autres problèmes particuliers qui n'ont pas encore été envisagés dans la théorie de l'équation (1). Le problème (S) consiste à trouver une solution $z = z(x, y)$ de l'équation (1) qui admette une valeur donnée d'avance en un point (\bar{x}, \bar{y}) et vérifie le long de deux courbes $y = g(x)$ et $x = h(y)$ certaines équations, en général non linéaires, exprimant des relations entre les valeurs de la fonction $z(x, y)$ et de ses dérivées partielles du premier ordre*). En appliquant la méthode bien connue du point fixe, due à J. Schauder [15] et [16], où bien celle des approximations successives, Mlle Z. Szmydt a établi plusieurs théorèmes d'existence et d'unicité relatifs au problème (S), englobant, comme cas particuliers, de nombreux théorèmes déjà connus, se rapportant aux problèmes classiques, y compris ceux de MM. P. Hartman et A. Wintner.

*) J. Schauder voir [15], p. 56—58 a supposé, de plus que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ satisfait à la condition de Hölder par rapport à x, y et z . S. Mazur a remarqué que la méthode du point fixe, utilisée par J. Schauder, n'exige pas cette restriction (Séance du Groupe d'Analyse de l'Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences, Varsovie 1954).

) A vrai dire, Mlle Z. Szmydt a considéré non pas une seule équation, mais un système de n équations de la forme (1) et elle a distingué deux variantes dudit problème: problème I dans [18] et problème I dans [19]; cependant, cette distinction disparaît dans le cas d'une seule équation, auquel nous nous bornerons pour simplifier l'exposé. Bien plus, on peut considérer l'équation (1) comme un système de n équations mais sous la forme vectorielle et interpréter convenablement les notations et les formules de la présente note, car les raisonnements qui y sont contenus subsistent dans le cas plus général d'un système d'équations, pour ce qui concerne le problème I. Ce n'est que sa modification moins simple I* qui pourrait présenter des difficultés plus essentielles.

Si généraux qu'ils soient, les théorèmes contenus dans les travaux [18], [19], [21], [22] et [23] n'épuisent pas encore diverses questions qui s'imposent d'une manière bien naturelle à propos du problème (S). Les méthodes développées dans ces travaux s'appliquent facilement et sans modifications essentielles à l'étude de certains problèmes beaucoup plus généraux, envisagés dans les travaux de Mlle Z. S z m y d t [21] et de M. A. L a s o t a [13], [14].

Les recherches de M. A. B i e l e c k i et de moi-même [2], [4], [10] et [11] allaient dans une direction un peu différente. Nous avons étudié quelques problèmes relatifs aux équations du type (1) qui peuvent, bien entendu, être considérés comme des cas particuliers du problème (S), mais ceci ne signifie point qu'ils pourraient être résolus moyennant les méthodes élaborées par Mlle Z. S z m y d t si l'on voulait les appliquer directement. En particulier, M. A. B i e l e c k i a attiré mon attention sur un cas intéressant du problème (S), comprenant le problème de G o u r s a t, et il a suggéré une méthode qui a permis d'obtenir, dans ce cas, des résultats (cf. [4]) plus forts que ceux que l'on pourrait déduire des théorèmes établis par Mlle Z. S z m y d t. Dans la présente note, je me propose de présenter quelques résultats plus récents de recherches dans la même direction *). Je m'occuperai d'un cas où les courbes $y = g(x)$ et $x = h(y)$ sont assujetties à certaines conditions moins restrictives que les conditions correspondantes dans la note [4]. Quant à la fonction $f(x, y, z, p, q)$, j'admettrai, en général, qu'elle satisfait à la condition, analogue à la condition d'Osgood dans la théorie des équations différentielles ordinaires, qui est déjà intervenue dans [4] et [10] et qui est plus faible que celle de Lipschitz. Dans certains cas la fonction $f(x, y, z, p, q)$ sera assujettie à une condition K, encore plus faible, due à M. A. P l i ś et utilisée par Mlle Z. S z m y d t (cf. [18] et [22]).

Dans les chapitres II—IV j'établis un théorème principal qui est une généralisation du théorème démontré dans la note [4]. Certaines modifications de celui-ci et des corollaires sont étudiés dans les chapitres V et VI. Dans le chapitre VII je donne quelques contributions au problème de G o u r s a t. Les lemmes 1 et 2 du chapitre III jouent dans ce travail un rôle très important; les difficultés essentielles que j'ai eues à surmonter ont été les plus considérables dans l'étude des équations fonctionnelles auxiliaires dans ce chapitre.

*) Je ne m'occupe ici que de la question d'existence de solutions. Le problème de l'unicité des solutions sera traité dans la note [12].

II

Nous énoncerons le problème de Mlle Z. Szm y d t sous la forme suivante *) :

Problème (S). Soit R le rectangle défini par les inégalités

$$\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2, \quad \beta_1 \leq y \leq \beta_2$$

où $\alpha_2 > \alpha_1$, $\beta_2 > \beta_1$. Supposons la fonction $f(x, y, z, p, q)$ continue pour $(x, y) \in R$ et z, p, q quelconques, la fonction $G(x, z, q)$ continue pour $x \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ et z, q quelconques et la fonction $H(y, z, p)$ continue pour $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ et z, p quelconques. Supposons, de plus, que les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ soient continues pour $x \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ et $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ et qu'elles vérifient les conditions

$$\beta_1 \leq g(x) \leq \beta_2 \quad \text{pour } x \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle,$$

$$\alpha_1 \leq h(y) \leq \alpha_2 \quad \text{pour } y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$$

et enfin supposons données un point $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ et un nombre arbitraire \bar{z} .

On demande s'il existe une fonction $z(x, y)$, continue dans le rectangle R avec ses dérivées $\partial z / \partial x$, $\partial z / \partial y$ et $\partial^2 z / \partial x \partial y$, qui vérifie l'équation (1) dans le rectangle R et y satisfasse aux conditions supplémentaires

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x, g(x)) = G\left(x, z(x, g(x)), \frac{\partial z}{\partial y}(x, g(x))\right) \quad \text{pour } x \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle,$$

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial y}(h(y), y) = H\left(y, z(h(y), y), \frac{\partial z}{\partial x}(h(y), y)\right) \quad \text{pour } y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle,$$

$$z(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{z}.$$

Les problèmes classiques relatifs à l'équation (1) sont des cas particuliers du problème (S) :

Problème (C) — de C a u c h y :

$$g(\bar{x}) = \bar{y}, \quad g(x) = h^{-1}(x) \text{ est une fonction monotone,}$$

$$G(x, z, q) = G^*(x), \quad H(y, z, p) = H^*(y);$$

*) Mlle Z. Szm y d t a d'abord étudié son problème en admettant que les fonctions $f(x, y, z, p, q)$, $G(x, z, q)$, $H(y, z, p)$ étaient définies pour des valeurs bornées des variables z, p et q , mais de telle façon qu'il était possible de déduire des théorèmes établis par elle certaines conséquences aussi dans le cas où le domaine de ces variables n'est pas borné, cf., par exemple, [22] p. 56. Dans le travail [23], le problème (S) est posé comme nous le faisons ici.

Problème (D) — de Darboux:

$$g(x) = \text{const} = \bar{y}, \quad h(y) = \text{const} = \bar{x},$$

$$G(x, z, q) = G^*(x), \quad H(y, z, p) = H^*(y);$$

Problème (P) — de Picard:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (a_1, g(a_1)), \quad h(y) = \text{const} = a_1,$$

$$H(y, z, p) = H^*(y), \quad G(x, z, q) = \sigma(x) - g'(x) \cdot q$$

où $\sigma(x)$ est une fonction donnée d'avance;

Problème (G) — de Goursat:

(\bar{x}, \bar{y}) est le point commun unique des courbes $y = g(x)$ et $x = h(y)$,

$G(x, z, q) = \sigma(x) - g'(x) \cdot q$, $H(y, z, p) = \tau(y) - h'(y) \cdot p$, où les fonctions $\sigma(x)$ et $\tau(y)$ sont données d'avance.

Nous allons énoncer un théorème, concernant le problème (S), qui va jouer dans cette étude un rôle fondamental.

Théorème 1. *Le problème (S) admet une solution si l'ensemble des conditions suivantes est vérifié:*

$$1^0 \quad (4) \quad \sup_{a_1 \leq x \leq a_2} \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n(x) - \lambda^{n+1}(x)| < +\infty$$

et

$$(5) \quad \sup_{\beta_1 \leq y \leq \beta_2} \sum_{n=0}^{\infty} |\mu^n(y) - \mu^{n+1}(y)| < +\infty$$

où

$$\lambda^0(x) = x, \quad \lambda^{n+1}(x) = h(g(\lambda^n(x))),$$

$$\mu^0(y) = y, \quad \mu^{n+1}(y) = g(h(\mu^n(y)));$$

$$2^0 \quad (6) \quad |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})| \leq \omega(|p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|)$$

pour $(x, y) \in R$ et $z, p, q, \bar{p}, \bar{q}$ quelconques, où $\omega(\delta)$ est une fonction continue et non décroissante pour $\delta \geq 0$, telle que $\omega(0) = 0$ et $\omega(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$ et que

$$(7) \quad \int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \quad \text{pour } \delta > 0 \text{ *).$$

*) C'est précisément la condition dont il était question à la p. 69; elle est analogue à la condition d'Osgood, bien connue dans la théorie des équations différentielles ordinaires.

$$3^{\circ} \quad (8) \quad |G(x, z, q) - G(x, z, \bar{q})| \leq A \cdot |q - \bar{q}|$$

pour $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ et z, q, \bar{q} quelconques, et

$$(9) \quad |H(y, z, p) - H(y, z, \bar{p})| \leq B \cdot |p - \bar{p}|$$

pour $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ et z, p, \bar{p} quelconques, les constantes positives A et B vérifiant l'inégalité

$$(10) \quad A \cdot B < 1;$$

$$4^{\circ} \quad |f(x, y, z, p, q)| \leq \Phi(|z| + |p| + |q|),$$

$$|G(x, z, q)| \leq \Phi(|z|) + A^* \cdot |q|,$$

$$|H(y, z, p)| \leq \Phi(|z|) + B^* \cdot |p|,$$

pour $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ et z, p, q quelconques, les constantes positives A^* et B^* vérifiant l'inégalité

$$(11) \quad A^* \cdot B^* < 1$$

et $\Phi(t)$ étant une fonction non négative et non décroissante pour $t \in \langle 0, +\infty \rangle$ telle que l'on ait ou bien

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = 0$$

ou bien

$$(12) \quad \Phi(t) = M + N \cdot t \text{ et } \max(a_2 - a_1, \beta_2 - \beta_1) < \sqrt{1 + \frac{1 - A^* B^*}{N(A^* + B^* + 2)}} - 1.$$

Remarques. Avant de passer à la démonstration de ce théorème, nous ferons quelques remarques sur le rôle des conditions 1°—4° et nous indiquerons quelques simples cas où les conditions (4) et (5) sont remplies.

Considérons la ligne brisée C_x issue du point $(x, g(x))$, $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$, dont le parcours dans le rectangle R est déterminé par les règles suivantes:

1. à partir de chacun des points qu'elle a en commun avec la courbe $y = g(x)$, $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$, la ligne brisée C_x suit un segment de droite parallèle à l'axe Ox jusqu'à son intersection avec la courbe $x = h(y)$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$.

2. à partir de chacun des points qu'elle a en commun avec la courbe $x = h(y)$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, cette ligne brisée suit un segment de droite parallèle à l'axe Oy jusqu'à son intersection avec la courbe $y = g(x)$, $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$.

3. cette ligne brisée se termine si elle rencontre un point commun des courbes $y = g(x)$, $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ et $x = h(y)$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$.

L'expression $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n(x) - \lambda^{n+1}(x)|$ représente la somme des longueurs des segments de cette ligne brisée, parallèles à l'axe Ox . L'expression $\sum_{n=0}^{\infty} |\mu^n(y) - \mu^{n+1}(y)|$ a un sens géométrique analogue *).

Moyennant un exemple convenable, MM. P. Hartman et A. Wintner [8], p. 841, ont montré que pour le problème de Darboux, qui est un cas particulier du problème (S), la continuité de la fonction $f(x, y, z, p, q)$ n'assure pas encore l'existence d'une solution de l'équation (1) et ils ont démontré qu'une solution existe (mais peut ne pas être unique) si la fonction $f(x, y, z, p, q)$ est continue et si elle satisfait, en plus, à la condition de Lipschitz par rapport à p et q . Mlle Z. Szmydt a considérablement généralisé ce résultat en introduisant, au lieu de la condition de Lipschitz, les hypothèses K, dues à M. A. Plis, beaucoup plus générales, rappelant la condition de Kamke bien connue dans la théorie des équations différentielles ordinaires (cf. [18], p. 69, [22], p. 44, et le présent travail, p. 88) et en étudiant dans ces hypothèses le problème (S) dans les cas où $g(x) = \text{const}$ où $h(y) = \text{const}$, $G(x, z, q) = G(x, z)$ où $H(y, z, p) = H(y, z)$ *).

La condition 2°, admise dans ce travail, est un cas particulier des hypothèses K, mais elle est plus générale que celle de Lipschitz. J'ai été conduit à particulariser de telle manière les hypothèses K par des difficultés que présentait un système d'inégalités fonctionnelles (lemmes 1 et 2), ce qui ne signifie évidemment pas que dans le théorème 1 la condition 2° ne peut pas être remplacée par les hypothèses K. Si l'on admet que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à p et q , les difficultés dont il vient d'être question diminuent notablement; de plus, comme il résulte d'un théorème établi par Mlle Z. Szmydt ([23], théorème 1, p. 32, et [22], théorème 2, p. 50), les hypothèses 1° se montrent superflues, du moins lorsqu'il s'agit de la résolution du problème (S) dans un rectangle suffisamment petit **).

*) L'intérêt qu'il y a à considérer de telles lignes brisées dans l'étude du problème (S) m'a été signalé par M. A. Bielecki.

*) Il est remarquable, que, si $G(x, z, q) = G(x, z)$ où $H(y, z, p) = H(y, z)$, aucune condition relative au parcours des courbes $y = g(x)$ et $x = h(y)$ n'est nécessaire et les limitations éventuelles des dimensions du rectangle R ne dépendent que de la rapidité avec laquelle croissent les fonctions f, G et H (cf. [18], théorème 1, p. 69, [22], théorème 1, p. 45, et aussi le théorème 2 du présent travail, p. 000).

**) Pourtant on a alors affaire à des limitations des dimensions du rectangle R suivant la grandeur des constantes de Lipschitz des fonctions f, G et H par rapport à p et q .

L'inégalité (11) assure la compatibilité des équations (2) et (3), écartant par exemple le cas où $G(x, z, q) = a + bq$ et $H(y, z, p) = (1/b)p$ où $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Avec telles fonctions G et H , le problème (S) ne peut avoir de solution, car en un point commun des courbes $y = g(x)$, $x \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ et $x = h(y)$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ — un tel point doit évidemment exister dans le rectangle R — on aurait $\partial z / \partial x - b \cdot \partial z / \partial y = a$ et en même temps $\partial z / \partial y - (1/b) \cdot \partial z / \partial x = 0$, ce qui est impossible. Les exemples donnés dans le travail [10] (exemples 4 a et b, p. 000) montrent que la limitation des dimensions du rectangle R est nécessaire dans le cas où la fonction $\Phi(t)$ est linéaire. Il y a lieu de remarquer ici que, pour les problèmes classiques de Cauchy, Darboux, Picard et Goursat, des limitations de ce genre ne sont nécessaires que dans le cas où la fonction $f(x, y, z, p, q)$ n'a pas de majorante linéaire par rapport à $|z|$, $|p|$ et $|q|$; si une telle majorante linéaire existe, il n'est plus nécessaire de limiter les dimensions du rectangle dans lequel doit être déterminée la solution cherchée (ceci résulte des théorèmes du travail [10] et de l'exemple 2 qui y a été donné, p. 102, et aussi d'un autre exemple donné dans le travail [11], p. 9; cf, encore [5]). Cette différence entre le problème général (S) et les problèmes classiques est en relation avec le fait que dans le cas du problème (S) il n'est pas toujours possible d'appliquer la méthode du recollement de la solution globale au moyen des solutions locales. Il s'agit ici de la méthode suivante, bien connue et souvent appliquée dans les problèmes classiques: le domaine D , dans lequel doit être trouvée la solution, est représenté comme la somme de petits domaines non empiétant D_1, D_2, \dots , convenablement rangés. En profitant du théorème d'existence local on obtient la solution d'abord dans le domaine D_1 , puis on la prolonge successivement sur les domaines D_2, D_3 , etc. jusqu'à ce que le domaine D soit complètement épuisé, en ayant soin de conserver la régularité en rejoignant les solutions partielles (les remarques qui suivent le lemme 5, p. 91 de ce travail, l'expliquent suffisamment). Pour le problème (S) un tel partage du domaine D en domaines partiels n'est pas toujours possible. Par exemple, il est impossible, à cause de la situation du point (\hat{x}, \hat{y}) , dans les exemples donnés dans le travail [10] (exemples 4a et b, p. 103); dans le cas où $D = \{(x, y); 0 \leq x, y \leq 1\}$ et

$$(13) \quad g(x) = \begin{cases} 2^n x - k + 1 & \text{pour } x \in \left\langle \frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right\rangle, \quad k = 1, 3, \dots, 2^n - 1, \\ k - 2^n x & \text{pour } x \in \left\langle \frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right\rangle, \quad k = 2, 4, \dots, 2^n, \end{cases}$$

$$(14) \quad h(y) = g(y) \quad \text{pour } y \in \langle 0, 1 \rangle$$

($n = 1, 2, 3, \dots$ étant fixé), un tel partage est impossible indépendamment de la situation du point (\bar{x}, \bar{y}) . Par contre, dans les cas du problème (S), considérés aux chapitres V et VI de ce travail, la méthode du racollement de la solution globale au moyen des solutions locale est applicable et, dans les théorèmes correspondants où la fonction $\Phi(t)$ est linéaire, aucune limitation des dimensions du rectangle R n'a lieu.

Cas particuliers du théorème 1

A. L'une des fonctions $g(x)$ ou $h(y)$ est constante (cf. [22] p. 45). Soit, pour fixer les idées, $h(y) = c = \text{const}$. Alors

$$\lambda^0(x) = x, \quad \lambda^n(x) = c = \text{const} \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots,$$

et

$$\mu^0(y) = y \quad \text{et} \quad \mu^n(y) = g(c) = \text{const} \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots,$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n(x) - \lambda^{n+1}(x)| = |x - c| \leq a_2 - a_1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mu^n(y) - \mu^{n+1}(y)| = |y - g(c)| \leq \beta_2 - \beta_1.$$

Ce cas comprend les problèmes de Darboux et de Picard.

B. Les courbes d'équations $y = g(x)$, $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ et $x = h(y)$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ ont pour unique point commun un sommet du rectangle R .

Pour fixer les idées, supposons que ce soit le sommet (a_1, β_1) . Sans nuire à la généralité on peut admettre que $a_1 = \beta_1 = 0$, $a_2 = a$, $\beta_2 = \beta$. Alors on a (cf. [2], lemmes 2 et 3, p. 104)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n(x) - \lambda^{n+1}(x)| = x \leq a, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\mu^n(y) - \mu^{n+1}(y)| = y \leq \beta.$$

Les autres sous-cas se ramènent aisément au cas considéré, on a donc toujours dans le second:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n(x) - \lambda^{n+1}(x)| \leq a_2 - a_1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\mu^n(y) - \mu^{n+1}(y)| \leq \beta_2 - \beta_1.$$

Ce cas comprend le problème de Darboux, ainsi que ceux de Picard et de Goursat, sous la forme considéré dans le travail [2] (théorème 3, p. 112).

C. Les conditions suivantes sont remplies:

$$|g(x) - \hat{y}| \leq a \cdot |x - \hat{x}| \quad \text{et} \quad |h(y) - \hat{x}| \leq b \cdot |y - \hat{y}|, \quad \text{où } a \cdot b < 1.$$

Alors

$$|\lambda^{n+1}(x) - \hat{x}| = |h(g(\lambda^n(x))) - \hat{x}| \leq b \cdot |g(\lambda^n(x)) - \hat{y}| \leq a \cdot b \cdot |\lambda^n(x) - \hat{x}|,$$

donc

$$|\lambda^n(x) - \hat{x}| \leq (a \cdot b)^n \cdot |x - \hat{x}| \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots,$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n(x) - \lambda^{n+1}(x)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (|\lambda^n(x) - \hat{x}| + |\lambda^{n+1}(x) - \hat{x}|) \leq \\ &\leq (1 + a \cdot b) \cdot |x - \hat{x}| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot b)^n \leq (a_2 - a_1) \frac{1 + ab}{1 - ab}. \end{aligned}$$

De même

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mu^n(y) - \mu^{n+1}(y)| \leq (\beta_2 - \beta_1) \frac{1 + ab}{1 - ab}.$$

Deux cas particuliers du problème ainsi posé ont été étudiés dans le travail [4]. En particulier, ce cas comprend le problème de Goursat sous la forme considérée par Mlle Z. Szymdt dans le travail [20] (théorème 2, p. 574).

D. Les deux fonctions $g(x)$ et $h(y)$ sont en même temps ou non décroissantes, ou non croissantes.

Pour fixer les idées, supposons-les non décroissantes. (Lorsque les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ sont non croissantes, les calculs sont analogues). Si l'on a, pour un $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ fixé, $h(g(x)) \leq x$, alors

$$a_2 \geq x = \lambda^0(x) \geq \lambda^1(x) \geq \lambda^2(x) \geq \dots \geq a_1$$

et si, pour un $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ fixé, on a $h(g(x)) \geq x$, alors

$$a_1 \leq x = \lambda^0(x) \leq \lambda^1(x) \leq \lambda^2(x) \leq \dots \leq a_2$$

ce qu'on prouve aisément par induction en profitant de la remarque que la fonction $h(g(x))$ est non décroissante. Donc on a, pour tout $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n(x) - \lambda^{n+1}(x)| \leq a_2 - a_1.$$

De même

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mu^n(y) - \mu^{n+1}(y)| \leq \beta_2 - \beta_1.$$

Nous reviendrons sur les cas A, B et C aux chapitres V et VI. Nous indiquerons maintenant des cas où l'hypothèse 1° n'est pas vérifiée. Re-

marquons tout d'abord que, si (\bar{x}, \bar{y}) est un point d'intersection des courbes $y = g(x)$ et $x = h(y)$ et si les dérivées $g'(\bar{x})$ et $h'(\bar{y})$ existent et $|g'(\bar{x}) \cdot h'(\bar{y})| > 1$, la suite $\{\lambda^n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ telle que $\lambda^n(x) \neq \bar{x}$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$, ne peut converger vers \bar{x} , sinon on aurait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda^{n+1}(x) - \bar{x}}{\lambda^n(x) - \bar{x}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{h(g(\lambda^n(x))) - h(g(\bar{x}))}{\lambda^n(x) - \bar{x}} \right| = |g'(\bar{x}) \cdot h'(\bar{y})| > 1$$

et il existerait, par conséquent, un n tel que

$$0 < |\lambda^n(x) - \bar{x}| < |\lambda^{n+1}(x) - \bar{x}| < |\lambda^{n+2}(x) - \bar{x}| < \dots,$$

ce qui mène à une contradiction.

Supposons maintenant que les courbes $y = g(x)$ et $x = h(y)$ aient dans le rectangle R exactement m points d'intersection (x_k, y_k) , $k = 1, 2, \dots, m$, et qu'en chacun de ces points les dérivées $g'(x_k)$ et $h'(y_k)$ existent, avec $|g'(x_k) \cdot h'(y_k)| > 1$ pour $n = 1, 2, \dots, m$. Supposons, en plus (*) que toute valeur y soit admise par la fonction $g(x)$ tout au plus un nombre fini de fois, et (*) que toute valeur x soit admise par la fonction $h(y)$ tout au plus un nombre fini de fois.

Si, pour un x , la suite $\{\lambda^n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, converge vers \tilde{x} , on a $h(g(\tilde{x})) = \tilde{x}$, donc le point $(\tilde{x}, g(\tilde{x}))$ est un des points (x_k, y_k) et, par conséquent, la suite $\{\lambda^n(x)\}$ converge vers un x_k ; il doit donc exister un indice n tel que $\lambda^n(x) = x_k$. D'après (*) et (*), pour tout n fixé et tout k fixé ($n = 0, 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots, m$), le nombre des x tels que $\lambda^n(x) = x_k$ est fini, donc il existe un ensemble au plus dénombrable de nombres x pour lesquels la suite $\{\lambda^n(x)\}$ est convergente. L'ensemble des nombres x pour lesquels la série $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n(x) - \lambda^{n+1}(x)|$ est convergente est donc, a fortiori, au plus dénombrable et, par suite, la condition (4) ne peut être remplie. Il en est de même de la condition (5). C'est pourquoi, par exemple pour les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ définies par les formules (13) et (14), aucune des conditions (4) et (5) n'est remplie.

III

Avant de passer à la démonstration du théorème 1, nous allons établir quelques lemmes.

Lemme 1. Soient:

1° une fonction $\varphi(x)$ continue, non décroissante et bornée pour $x \in \langle 0, +\infty \rangle$, telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ pour $x > 0$ et

$$(15) \quad \int_0^x \frac{du}{\varphi(u)} = +\infty \quad \text{pour } x > 0;$$

2° une fonction $d(\delta)$ continue, non décroissante et bornée pour $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$, telle que $d(0) = 0$;

3° un nombre θ satisfaisant à l'inégalité

$$0 \leq \theta < 1.$$

Alors il existe une fonction non négative $x(t, \delta)$, définie pour $t \in \langle 0, +\infty \rangle$ et $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$, ayant les propriétés suivantes:

(i) pour tout δ fixé non négatif la fonction $x(t, \delta)$ est continue et non décroissante par rapport à t dans l'intervalle $\langle 0, +\infty \rangle$;

(ii) pour tout t fixé non négatif la fonction $x(t, \delta)$ est non décroissante par rapport à δ dans l'intervalle $\langle 0, +\infty \rangle$;

(iii) la fonction $x(t, \delta)$ satisfait, pour $t \in \langle 0, +\infty \rangle$ et $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$, à l'équation

$$(16) \quad x(t, \delta) = d(\delta) + \theta \cdot x(t, d(\delta)) + \int_0^t \varphi(x(\tau, \delta)) d\tau;$$

(iv) pour tout t non négatif

$$(17) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (\max_{0 \leq \tau \leq t} x(\tau, \delta)) = 0.$$

En effet, posons

$$M = \max(\sup_{x > 0} \varphi(x), \sup_{\delta > 0} d(\delta))$$

et, pour $t \in \langle 0, +\infty \rangle$ et $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$, définissons la suite de fonctions $\{x_n(t, \delta)\}$, $n = 1, 2, \dots$, par les formules récurrentes

$$(18) \quad x_0(t, \delta) = (1 - \theta)^{-1} M(1 + t),$$

$$x_n(t, \delta) = d(\delta) + \theta \cdot x_{n-1}(t, d(\delta)) + \int_0^t \varphi(x_{n-1}(\tau, \delta)) d\tau \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

En raisonnant par récurrence on constate que

$$(19) \quad 0 \leq x_n(t'', \delta) - x_n(t', \delta) \leq (1 - \theta)^{-1} M(t'' - t') \quad \text{pour } t'' \geq t' \geq 0,$$

$$\delta \in \langle 0, +\infty \rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(20) \quad x_n(t, \delta') \leq x_n(t, \delta'') \quad \text{pour } 0 \leq \delta' \leq \delta'', \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

On constate aussi, par récurrence, que la suite $\{x_n(t, \delta)\}$ est non croissante et que les fonctions $x_n(t, \delta)$ sont non négatives; par conséquent, pour tout t et tout δ non négatifs, la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t, \delta)$ existe et elle est non négative.

Admettons *)

$$x(t, \delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t, \delta) \quad \text{pour } t \in \langle 0, +\infty \rangle \text{ et } \delta \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Nous allons prouver que la fonction $x(t, \delta)$ ainsi définie a les propriétés (i) — (iv).

En vertu de (19) on a

$$(21) \quad 0 \leq x(t'', \delta) - x(t', \delta) \leq \frac{M}{1-\theta} (t'' - t') \quad \text{pour } t'' \geq t' \geq 0, \delta \in \langle 0, +\infty \rangle$$

d'où résulte la propriété (i). La propriété (ii) se déduit immédiatement de la formule (20).

Du théorème de Dini sur les suites monotones de fonctions continues, et aussi directement, du fait que les fonctions $x_n(t, \delta)$ sont équicontinues par rapport à t , il résulte que pour tout δ fixée non négatif la suite des fonctions $\{x_n(t, \delta)\}$ converge presque uniformément dans l'intervalle $0 \leq t < +\infty$ vers la fonction $x(t, \delta)$. Il résulte donc de la formule (18), en passant à la limite, que la fonction $x(t, \delta)$ définie par nous satisfait à l'équation (16).

En vertu de (16) la fonction $x(t, 0)$ satisfait dans l'intervalle $0 \leq t < +\infty$ à l'équation

$$x(t, 0) = \frac{1}{1-\theta} \int_0^t \varphi(x(\tau, 0)) d\tau,$$

d'où il vient, d'après (15),

$$(22) \quad x(t, 0) \equiv 0 \quad \text{pour } t \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

En raisonnant par récurrence on voit que toutes les fonctions $x_n(t, \delta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, sont continues, donc la fonction $x(t, \delta)$, comme limite d'une suite non croissante de fonctions continues, est semicontinue supérieurement et, par conséquent, on a, vu (22), pour tout t fixé non négatif

$$(23) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0+} x(t, \delta) = 0$$

La propriété (ii) étant établie, pour prouver la propriété (iv) il suffit donc de remarquer que la suite de fonctions continues

$$\{x(t, 1/n)\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

*) Cette définition de la fonction $x(t, \delta)$ est due à M. A. Bielecki. Le raisonnement que j'avais primitivement utilisé était un peu plus long et moins élémentaire.

tend vers zéro presque uniformément dans l'intervalle $0 \leq t < +\infty$. Ceci résulte aussi bien du théorème de Dini, car d'après (ii) cette suite est non croissante et d'après (23) sa limite est une fonction identiquement nulle, mais aussi directement de (23) et du fait que, en vertu de (21), les fonctions $x(t, 1/n)$ sont équicontinues. Le lemme 1 se trouve ainsi démontré.

Lemme 2*). Soient:

1° la fonction $\varphi(\delta)$ continue, non décroissante et bornée pour $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$, telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$ et

$$\int_0^\delta \frac{du}{\varphi(u)} = +\infty \text{ pour } \delta > 0,$$

2° la fonction $d(\delta)$ continue, non décroissante et bornée pour $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$, telle que $d(0) = 0$,

3° les constantes positives A et B vérifiant l'inégalité

$$A \cdot B < 1,$$

4° la fonction $g(x)$ continue dans l'intervalle $\langle a_1, a_2 \rangle$, et la fonction $h(y)$ continue dans l'intervalle $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, les conditions (4) et (5) étant vérifiés.

Dans ces conditions, il existe deux fonctions $\varepsilon_1(x, y, \delta)$ et $\varepsilon_2(x, y, \delta)$ définies pour $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ et $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$, non négatives, non décroissantes par rapport à δ , telles que pour tout $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ et tout $\delta \geq 0$ fixés la fonction $\varepsilon_1(x, y, \delta)$ soit continue par rapport à y dans l'intervalle $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, que pour tout $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ et tout $\delta \geq 0$ fixés la fonction $\varepsilon_2(x, y, \delta)$ soit continue par rapport à x dans l'intervalle $\langle a_1, a_2 \rangle$, que pour $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ et $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$ les inégalités.

$$(24) \quad d(\delta) + A \cdot \varepsilon_2(x, g(x), d(\delta)) + \left| \int_{g(x)}^y \varphi(\varepsilon_1(x, v, \delta)) dv \right| \leq \varepsilon_1(x, y, \delta)$$

et

$$(25) \quad d(\delta) + B \cdot \varepsilon_1(h(y), y, d(\delta)) + \left| \int_{h(y)}^x \varphi(\varepsilon_2(u, y, \delta)) du \right| \leq \varepsilon_2(x, y, \delta)$$

soient vérifiés et que l'on ait, de plus,

$$(26) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\sup_{\substack{a_1 \leq x \leq a_2 \\ \beta_1 \leq y \leq \beta_2}} \varepsilon_i(x, y, \delta) \right) = 0 \text{ pour } i = 1, 2.$$

* C'est une généralisation d'un lemme contenu dans [4], p. 322.

En effet, soit

$$s_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n(x) - \lambda^{n+1}(x)| + \sum_{n=0}^{\infty} |\mu^n(g(x)) - \mu^{n+1}(g(x))| \text{ pour } x \in \langle a_1, a_2 \rangle,$$

$$s_2(y) = \sum_{n=0}^{\infty} |\mu^n(y) - \mu^{n+1}(y)| + \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n(h(y)) - \lambda^{n+1}(h(y))| \text{ pour } y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle.$$

En vertu de l'hypothèse 4° de notre lemme, les fonctions $s_1(x)$ et $s_2(y)$ sont bornées. Soit $\eta(s, \delta)$ une fonction, dont l'existence est assurée par le lemme précédent, non négative, définie pour $s \in \langle 0, +\infty \rangle$ et $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$, ayant les propriétés suivantes:

1° pour tout $\delta \geq 0$ fixé elle est continue et non décroissante par rapport à s dans l'intervalle $\langle 0, +\infty \rangle$,

2° pour tout $s \geq 0$ fixé elle est non décroissante par rapport à δ dans l'intervalle $\langle 0, +\infty \rangle$,

3° elle vérifie la condition

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} (\max_{0 \leq \sigma \leq \delta} \eta(\sigma, \delta)) = 0 \text{ pour tout } s \in \langle 0, +\infty \rangle,$$

et

4° elle satisfait à l'équation

$$\begin{aligned} \eta(s, \delta) = & \left(\frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{B}} \right) \cdot d(\delta) + \sqrt{A \cdot B} \cdot \eta \left(s, \left(\frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{B}} \right) d(\delta) \right) + \\ & + \left(\frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{B}} \right) \cdot \int_0^s \varphi(\sqrt{A} + \sqrt{B}) \cdot \eta(\sigma, \delta) d\sigma. \end{aligned}$$

Admettons

$$\varepsilon_1(x, y, \delta) = \sqrt{A} \cdot \eta(|y - g(x)| + s_1(x), \delta),$$

$$\varepsilon_2(x, y, \delta) = \sqrt{B} \cdot \eta(|x - h(y)| + s_2(y), \delta).$$

Alors, il est évident que toutes les conditions énoncées dans la conclusion du lemme 2, sauf les inégalités (24) et (25), résultent du fait que les fonctions $s_1(x)$ et $s_2(y)$ sont bornées et des propriétés correspondantes de la fonction $\eta(s, \delta)$.

Pour vérifier que l'inégalité (24) a lieu, remarquons que

$$\frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{B}} > 1,$$

$$|x - h(g(x))| + s_2(g(x)) = s_1(x),$$

$$\left| \int_{g(x)}^y \varphi(\varepsilon_1(x, v, \delta)) dv \right| \leq \left| \int_{g(x)}^y \varphi((\sqrt{A} + \sqrt{B}) \cdot \eta(|v - g(x)| + s_1(x), \delta)) dv \right| =$$

$$= \int_{s_1(x)}^{|y-g(x)|+s_1(x)} \varphi((\sqrt{A} + \sqrt{B}) \cdot \eta(\sigma, \delta)) d\sigma \leq \int_0^{|y-g(x)|+s_1(x)} \varphi((\sqrt{A} + \sqrt{B}) \cdot \eta(\sigma, \delta)) d\sigma,$$

donc

$$d(\delta) + A \cdot \varepsilon_2(x, g(x), d(\delta)) + \left| \int_{g(x)}^y \varphi(\varepsilon_1(x, v, \delta)) dv \right| \leq$$

$$\leq d(\delta) + A \cdot \sqrt{B} \cdot \eta\left(|y - g(x)| + s_1(x), \left(\frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{B}}\right) \cdot d(\delta)\right) +$$

$$+ \left| \int_{g(x)}^y \varphi(\varepsilon_1(x, v, \delta)) dv \right| \leq \sqrt{A} \cdot \left(\left(\frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{B}}\right) \cdot d(\delta) + \right.$$

$$+ \sqrt{BA} \cdot \eta\left(|y - g(x)| + s_1(x), \left(\frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{B}}\right) d(\delta)\right) +$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{B}}\right) \cdot \int_0^{|y-g(x)|+s_1(x)} \varphi(\sqrt{A} + \sqrt{B} \cdot \eta(\sigma, \delta)) d\sigma\right) =$$

$$= \sqrt{A} \cdot \eta(|y - g(x)| + s_1(x), \delta) = \varepsilon_1(x, y, \delta).$$

On vérifie de la même façon que l'inégalité (25) a lieu.

Lemme 3. Supposons que $f(x, y, z, p, q)$ soit une fonction continue pour $(x, y) \in R$ (c'est-à-dire $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$) et z, p et q quelconques, et que l'hypothèse 4° du théorème 1 soit vérifiée. Considérons l'espace de tous les couples $(p(x, y), q(x, y))$ de fonctions continues dans le rectangle R et désignons par F la transformation de cet espace en lui-même*) définie par la formule

$$(27) \quad F(p, q) = (\tilde{p}, \tilde{q}),$$

où

$$(28) \quad \tilde{p}(x, y) = \int_{g(x)}^y f(x, v, z(x, v), p(x, v), q(x, v)) dv +$$

$$+ G(x, z(x, g(x)), q(x, g(x))),$$

$$(29) \quad \tilde{q}(x, y) = \int_{h(y)}^x f(u, y, z(u, y), p(u, y), q(u, y)) du +$$

$$+ H(y, z(h(y), y), p(h(y), y)),$$

*) Une telle transformation a été utilisée par Mlle Z. Szmydt dans le travail [20], p. 573.

$$(30) \quad z(x, y) = \tilde{z} + \int_x^x p(u, y) du + \int_y^y q(x, v) dv.$$

Dans ces conditions, il existe des constantes positives P et Q telles que, si

$$|p(x, y)| \leq P \quad \text{et} \quad |q(x, y)| \leq Q \quad \text{pour} \quad (x, y) \in R,$$

on ait

$$|\tilde{p}(x, y)| \leq P \quad \text{et} \quad |\tilde{q}(x, y)| \leq Q \quad \text{pour} \quad (x, y) \in R.$$

En effet, il suffit de montrer qu'il existe des constantes positives P et Q vérifiant les inégalités

$$(31) \quad l \cdot \Phi((l+1) \cdot (P+Q) + |\tilde{z}|) + \Phi(l \cdot (P+Q) + |\tilde{z}|) + A^* \cdot Q \leq P$$

et

$$(32) \quad l \cdot \Phi((l+1) \cdot (P+Q) + |\tilde{z}|) + \Phi(l \cdot (P+Q) + |\tilde{z}|) + B^* \cdot P \leq Q$$

où

$$l = \max(\alpha_2 - \alpha_1, \beta_2 - \beta_1).$$

a) Dans le cas où $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \cdot \Phi(t) = 0$, il existe un nombre positif n assez grand pour que l'on ait

$$\left(\frac{1}{\sqrt{A^*}} + \frac{1}{\sqrt{B^*}} \right) \cdot (l+1) \cdot \Phi((l+1) \cdot (\sqrt{A^*} + \sqrt{B^*}) \cdot n + |\tilde{z}|) + \sqrt{A^* B^*} n < n.$$

Les nombres positifs $P = n \sqrt{A^*}$ et $Q = n \sqrt{B^*}$ vérifient les inégalités (31) et (32).

b) Dans le cas où $\Phi(t) = M + N \cdot t$, un calcul bien simple montre que l'inégalité (12) est équivalente à l'inégalité

$$(1 - \lambda)^2 > (A^* + \lambda) \cdot (B^* + \lambda),$$

où

$$\lambda = N \cdot (l^2 + 2l) < \frac{1 - A^* B^*}{A^* + B^* + 2} < \frac{1}{2}.$$

Il existe donc des nombres positifs P^* et Q^* tels que

$$\frac{A^* + \lambda}{1 - \lambda} < \frac{P^*}{Q^*} < \frac{1 - \lambda}{B^* + \lambda}$$

c'est-à-dire

$$\lambda \cdot (P^* + Q^*) + A^* \cdot Q^* < P^*$$

$$\lambda \cdot (P^* + Q^*) + B^* \cdot P^* < Q^*.$$

En posant donc $P = nP^*$ et $Q = nQ^*$, où n est un nombre positif suffisamment grand, nous aurons

$$M \cdot (l+1) + N \cdot (l+1) \cdot |z| + N \cdot (l^2 + 2l) \cdot (P+Q) + A^* \cdot Q \leq P,$$

$$M \cdot (l+1) + N \cdot (l+1) \cdot |z| + N \cdot (l^2 + 2l) \cdot (P+Q) + B^* \cdot P \leq Q,$$

et les inégalités (31) et (32) seront ainsi vérifiées*).

IV

L'ensemble de couples de fonctions Z

Posons

$$l = \max(a_2 - a_1, \beta_2 - \beta_1),$$

$$\pi = \{(x, y, z, p, q); (x, y) \in R, |z| \leq |z| + l \cdot (P+Q), |p| \leq P, |q| \leq Q\}$$

où P et Q sont les nombres positifs qui vérifient la conclusion du lemme 3. En vertu de l'hypothèse 2° du théorème 1 il existe une fonction $\varphi(\delta)$ continue, non décroissante et bornée pour $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$, telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$ et

$$\int_0^\delta \frac{du}{\varphi(u)} = +\infty \quad \text{pour } \delta > 0,$$

et que l'on ait

$$|f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})| \leq \varphi(|p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|)$$

$$\text{pour } (x, y, z, p, q) \in \pi \text{ et } (x, y, z, \bar{p}, \bar{q}) \in \pi.$$

On peut admettre, par exemple,

$$\varphi(\delta) = \min(\omega(\delta), 2 \max_{\pi} |f(x, y, z, p, q)| + 1),$$

où $\omega(\delta)$ est la fonction qui intervient dans les hypothèses du théorème 1.

Désignons par $\Omega(\delta)$ le module de continuité commun des fonctions $f(x, y, z, p, q)$, $G(x, z, q)$, $H(y, v, p)$, $g(x)$ et $h(y)$ pour $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, $|z| \leq |z| + l \cdot (P+Q)$, $|p| \leq P$ et $|q| \leq Q$, c'est-à-dire soit $\Omega(\delta)$ une fonction continue et non décroissante pour $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$ telle que $\Omega(0) = 0$ et

$$|f(x, y, z, p, q) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| \leq \Omega(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}| + |z - \bar{z}| + |p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|),$$

$$|G(x, z, q) - G(\bar{x}, \bar{z}, \bar{q})| \leq \Omega(|x - \bar{x}| + |z - \bar{z}| + |q - \bar{q}|),$$

$$|H(y, z, p) - H(\bar{y}, \bar{z}, \bar{p})| \leq \Omega(|y - \bar{y}| + |z - \bar{z}| + |p - \bar{p}|),$$

$$|g(x) - g(\bar{x})| \leq \Omega(|x - \bar{x}|),$$

$$|h(y) - h(\bar{y})| \leq \Omega(|y - \bar{y}|),$$

* La marche que nous avons suivie dans le calcul est la même que dans la note [3].

pour $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$, $\bar{x} \in \langle a_1, a_2 \rangle$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, $\bar{y} \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, $|z| \leq |\bar{z}| + l \cdot (P + Q)$, $|\bar{z}| \leq |\bar{z}| + l \cdot (P + Q)$, $|p| \leq P$, $|\bar{p}| \leq P$, $|q| \leq Q$ et $|\bar{q}| \leq Q$. Supposons la fonction $\Omega(\delta)$ bornée dans l'intervalle $\langle 0, +\infty \rangle$, ce qu'on peut faire sans nuire à la généralité, de même que dans le cas de la fonction $\varphi(\delta)$.

Posons

$$d(\delta) = l \cdot \Omega((1 + P + Q + l \cdot L + L) \cdot \delta) + L \cdot \Omega(\delta) + \Omega((1 + P + Q + l \cdot L + L) \cdot \delta + (P + Q + l \cdot L) \cdot \Omega(\delta)),$$

où

$$L = \Phi(|\bar{z}| + (l + 1) \cdot (P + Q)).$$

Enfin, supposons que les fonctions $\varepsilon_1(x, y, \delta)$ et $\varepsilon_2(x, y, \delta)$ vérifient la conclusion du lemme 2 avec les constantes A et B figurant dans l'hypothèse 3° du théorème 1 et pour les fonctions $\varphi(\delta)$ et $d(\delta)$ qui viennent d'être définies.

Considérons l'espace de Banach des couples $(p(x, y), q(x, y))$ de fonctions continues dans le rectangle R avec la norme

$$\|(p, q)\| = \max_{(x, y) \in R} |p(x, y)| + \max_{(x, y) \in R} |q(x, y)|$$

et désignons par Z l'ensemble des couples $(p(x, y), q(x, y))$ de fonctions continues dans le rectangle R et satisfaisant aux conditions

$$|p(x, y)| \leq P, \quad |q(x, y)| \leq Q,$$

$$|p(x, y) - p(x, \bar{y})| \leq L \cdot |y - \bar{y}|, \quad |q(x, y) - q(\bar{x}, y)| \leq L \cdot |x - \bar{x}|,$$

$$|p(x, y) - p(\bar{x}, y)| \leq \varepsilon_1(x, y, |x - \bar{x}|), \quad |q(x, y) - q(x, \bar{y})| \leq \varepsilon_2(x, y, |y - \bar{y}|)$$

pour $(x, y), (\bar{x}, y)$ et $(x, \bar{y}) \in R$. L'ensemble Z est non vide, car il contient un couple de fonctions identiquement nulles dans le rectangle R , il est fermé et convexe, et, en vertu de la condition (26), il est aussi compact, puisqu'il contient des couples de fonctions bornées dans leur ensemble et équicontinues.

Transformation fonctionnelle F et fin de la démonstration du théorème 1

Considérons la transformation F définie par les formules (27)—(30). Si $(p, q) \in Z$, $F(p, q) = (\tilde{p}, \tilde{q})$ et si $z(x, y)$ est définie par la formule (30), on a

$$|f(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y))| \leq \Phi(|\bar{z}| + (l + 1) \cdot (P + Q)) = L$$

donc

$$|\tilde{p}(x, y) - \tilde{p}(x, \bar{y})| \leq L \cdot |y - \bar{y}|, \quad |\tilde{q}(x, y) - \tilde{q}(\bar{x}, y)| \leq L \cdot |x - \bar{x}|.$$

De plus, en vertu du lemme 3, on a

$$|\tilde{p}(x, y)| \leq P, \quad |\tilde{q}(x, y)| \leq Q.$$

En suite, on a

$$|z(x, y) - z(\bar{x}, \bar{y})| \leq (P + Q + l \cdot L) \cdot (|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|)$$

$$\text{pour } (x, y) \in R \text{ et } (\bar{x}, \bar{y}) \in R,$$

donc

$$\begin{aligned} & |\tilde{p}(x, y) - \tilde{p}(\bar{x}, y)| \leq \\ & \leq \left| \int_{g(x)}^y |f(x, v, z(x, v), p(x, v), q(x, v)) - f(x, v, z(x, v), p(\bar{x}, v), q(x, v))| dv \right| + \\ & + \left| \int_{g(x)}^y |f(x, v, z(x, v), p(\bar{x}, v), q(x, v)) - f(\bar{x}, v, z(\bar{x}, v), p(\bar{x}, v), q(\bar{x}, v))| dv \right| + \\ & + \left| \int_{g(x)}^{g(\bar{x})} |f(\bar{x}, v, z(\bar{x}, v), p(\bar{x}, v), q(\bar{x}, v))| dv \right| + \\ & + |G(x, z(x, g(x)), q(x, g(x))) - G(x, z(x, g(x)), q(x, g(\bar{x})))| + \\ & + |G(x, z(x, g(x)), q(x, g(\bar{x}))) - G(\bar{x}, z(\bar{x}, g(\bar{x})), q(\bar{x}, g(\bar{x})))| \leq \\ & \leq \left| \int_{g(x)}^y \varphi(\varepsilon_1(x, v, |x - \bar{x}|)) dv \right| + l \cdot \Omega(|x - \bar{x}| + (P + Q + l \cdot L) \cdot |x - \bar{x}| + \\ & + L \cdot |x - \bar{x}|) + L \cdot |g(x) - g(\bar{x})| + A \cdot \varepsilon_2(x, g(x), |g(x) - g(\bar{x})|) + \\ & + \Omega(|x - \bar{x}| + (P + Q + l \cdot L) \cdot (|x - \bar{x}| + |g(x) - g(\bar{x})|) + L \cdot |x - \bar{x}|) \leq \\ & \leq d(|x - \bar{x}|) + A \cdot \varepsilon_2(x, g(x), d(|x - \bar{x}|)) + \\ & + \left| \int_{g(x)}^y \varphi(\varepsilon_1(x, v, |x - \bar{x}|)) dv \right| \leq \varepsilon_1(x, y, |x - \bar{x}|) \end{aligned}$$

pour $(x, y) \in R$ et $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$, et de même

$$|\tilde{q}(x, y) - \tilde{q}(x, \bar{y})| \leq \varepsilon_2(x, y, |y - \bar{y}|) \text{ pour } (x, y) \in R \text{ et } (x, \bar{y}) \in R,$$

par conséquent

$$F(Z) \subset Z.$$

Si $(p_1, q_1) \in Z$, $(p_2, q_2) \in Z$, $(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1) = F(p_1, q_1)$ et $(\tilde{p}_2, \tilde{q}_2) = F(p_2, q_2)$, il vient

$$|\tilde{p}_1(x, y) - \tilde{p}_2(x, y)| \leq (l + 1) \cdot \Omega((l + 1) \cdot \|(p_1 - p_2, q_1 - q_2)\|)$$

et

$$|\tilde{q}_1(x, y) - \tilde{q}_2(x, y)| \leq (l + 1) \cdot \Omega((l + 1) \cdot \|(p_1 - p_2, q_1 - q_2)\|)$$

pour $(x, y) \in R$, donc

$$\|(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2, \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2)\| \leq 2 \cdot (l + 1) \cdot \Omega((l + 1) \cdot \|(p_1 - p_2, q_1 - q_2)\|),$$

d'où il résulte que la transformation F est continue sur l'ensemble Z .

En vertu du théorème du point fixe de Schauder [16], il existe donc un couple de fonctions $(p, q) \in Z$ tel que $F(p, q) = (p, q)$, c'est-à-dire un couple $(p(x, y), q(x, y))$ de fonctions continues dans le rectangle R , pour lequel sont vérifiées les équations

$$p(x, y) = \int_{g(x)}^y f(x, v, z(x, v), p(x, v), q(x, v)) dv + G(x, z(x, g(x)), q(x, g(x)))$$

et

$$q(x, y) = \int_{h(y)}^x f(u, y, z(u, y), p(u, y), q(u, y)) du + H(y, z(h(y), y), p(h(y), y))$$

où

$$(30) \quad z(x, y) = z + \int_x^y p(u, y) du + \int_y^x q(x, v) dv.$$

On vérifie aisément que la fonction (30) est une solution du problème (S). En effet, on a

$$(33) \quad \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} = f(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y))$$

et

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = q(x, y)$$

et enfin, d'après (33),

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = p(x, y) + \int_y^x \frac{\partial q(x, v)}{\partial x} dv = p(x, y) + \int_y^x \frac{\partial p}{\partial y}(x, v) dv = p(x, y)$$

d'où il résulte que la fonction définie par la formule (30) est continue dans le rectangle R avec ses dérivées $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ et $\partial^2 z/\partial x \partial y$ et qu'elle satisfait à l'équation (1). Enfin, on a

$$z(x, y) = z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, g(x)) = p(x, g(x)) = G(x, z(x, g(x)), q(x, g(x))) =$$

$$= G(x, z(x, g(x)), \frac{\partial z}{\partial y}(x, g(x)))$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial y}(h(y), y) = q(h(y), y) = H(y, z(h(y), y), p(h(y), y)) =$$

$$= H(y, z(h(y), y), \frac{\partial z}{\partial x}(h(y), y)),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.

V

Dans les cas particuliers A, B et C, signalés au chapitre I, quelques unes des hypothèses du théorème 1 peuvent être affaiblies; ces cas seront étudiés dans ce chapitre et dans le suivant. Nous appliquerons la méthode qui consiste à construire les solutions intégrales en accouplant successivement les solutions locales, ce qui est pénible à exposer, mais ne présente aucune difficulté essentielle. Les théorèmes 3, 4 et 5, qui seront établis dans ce chapitre, peuvent être considérés comme des conséquences assez simples du théorème 1 et du théorème 2, celui-ci étant une modification d'un théorème dû à Mlle Z. Szmydt ([22], théorème 1, p. 45). Dans la mesure du possible nous tâcherons de mettre à profit l'hypothèse K, due à M. A. Pliś et appliquée par Mlle Z. Szmydt (cf. [22], p. 44); nous la rappelons ici sous une forme qui ne présente pas de modifications essentielles.

Hypothèse K.

(34) $|f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})| \leq \omega_1(x, y, |p - \bar{p}|) + \omega_2(x, y, |q - \bar{q}|)$,
pour $(x, y) \in R$ et z, p, q, \bar{p} et \bar{q} quelconques, où $\omega_1(x, y, \delta)$ et $\omega_2(x, y, \delta)$ sont des fonctions continues pour $(x, y) \in R$ et $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$, non décroissantes par rapport à δ ; de plus,

1) pour tout $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ fixé la fonction $v(y) \equiv 0$ est la seule fonction de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $\langle \beta_1, g(x) \rangle$ telle que $v(g(x)) = 0$ et $v'(y) = -\omega_1(x, y, v(y))$ pour $y \in \langle \beta_1, g(x) \rangle$,

2) pour tout $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ fixé la fonction $v(y) \equiv 0$ est la seule fonction de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $\langle g(x), \beta_2 \rangle$ telle que $v(g(x)) = 0$ et $v'(y) = \omega_1(x, y, v(y))$ pour $y \in \langle g(x), \beta_2 \rangle$,

3) pour tout $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ fixé la fonction $u(x) \equiv 0$ est la seule fonction de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $\langle a_1, h(y) \rangle$ telle que $u(h(y)) = 0$ et $u'(x) = -\omega_2(x, y, u(x))$ pour $x \in \langle a_1, h(y) \rangle$,

4) pour tout $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ fixé la fonction $u(x) \equiv 0$ est la seule fonction de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $\langle h(y), a_2 \rangle$ telle que $u(h(y)) = 0$ et $u'(x) = \omega_2(x, y, u(x))$ pour $x \in \langle h(y), a_2 \rangle$.

L'hypothèse 2° du théorème 1 est un cas particulier de l'hypothèse K.

Théorème 2*). *Le problème (S) admet une solution si l'ensemble des conditions suivantes est vérifié:*

*) Bien que ce théorème présente une grande analogie formelle avec le théorème 1 du travail [22], p. 45, il ne saurait en être déduit à cause des limitations imposées aux constantes qui interviennent dans celui-ci. Dans le cas où $\Phi(t) = M + Nt$, si les hypothèses du théorème 2 sont vérifiées, le théorème cité de Mlle Z. Szmydt n'assure l'existence d'une solution du problème (S) que lorsque sont vérifiées les inégalités $N + A < 1$ et $N + B < 1$.

1° $g(x) = \text{const}$ pour $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ ou $h(y) = \text{const}$ pour $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$,
 ou $G(x, z, q) = G(x, z)$, ou enfin $H(y, z, p) = H(y, z)$,

2° les hypothèses K sont vérifiées,

$$3^\circ \quad \begin{cases} |f(x, y, z, p, q)| \leq \Phi(|z| + |p| + |q|), \\ |G(x, z, q)| \leq \Phi(|z|) + A \cdot |q|, \\ |H(y, z, p)| \leq \Phi(|z|) + B \cdot |p|, \end{cases}$$

pour $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ et z, p, q quelconques, les constantes positives A et B satisfaisant à l'inégalité

$$A \cdot B < 1$$

et $\Phi(t)$ étant une fonction non négative et non décroissante pour $t \in \langle 0, +\infty \rangle$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = 0$$

ou bien

$$(35) \quad \Phi(t) = M + N \cdot t \text{ et } \max(a_2 - a_1, \beta_2 - \beta_1) < \sqrt{1 + \frac{1 - AB}{N \cdot (A + B + 2)}} - 1.$$

Nous nous bornerons à esquisser la démonstration de ce théorème. Le lemme 3 subsiste à cause de l'hypothèse 3°. De même que dans le cas du théorème 1, nous appuierons sur le théorème du point fixe de Schauder: nous considérons la transformation F définie par les formules (27)–(30) et l'ensemble convexe et compact Z , contenant tous les couples $(p(x, y), q(x, y))$ de fonctions continues dans le rectangle R qui remplissent les conditions

$$|p(x, y)| \leq P, \quad |q(x, y)| \leq Q,$$

$$|p(x, y) - p(x, \bar{y})| \leq L \cdot |y - \bar{y}|, \quad |q(x, y) - q(x, \bar{y})| \leq L \cdot |x - \bar{x}|,$$

$$|p(x, y) - p(\bar{x}, y)| \leq \bar{\varepsilon}_1(x, y, |x - \bar{x}|), \quad |q(x, y) - q(x, \bar{y})| \leq \bar{\varepsilon}_2(x, y, |y - \bar{y}|),$$

où les nombres positifs P et Q satisfont à la conclusion du lemme 3, $L = \Phi(|z| + (l + 1) \cdot (P + Q))$, $l = \max(a_2 - a_1, \beta_2 - \beta_1)$, et les fonctions $\bar{\varepsilon}_1(x, y, \delta)$ et $\bar{\varepsilon}_2(x, y, \delta)$ sont définies d'une façon analogue à celle qu'a utilisée Mlle Z. Szymdyt [22]. Si, par exemple, $g(x) = \text{const}$ ou $G(x, z, q) = G(x, z)$ on demande que l'on ait

$$(36) \quad \bar{\varepsilon}_1(x, y, \delta) = d(\delta) + \left| \int_{g(x)}^y \tilde{\omega}_1(x, v, \bar{\varepsilon}_1(x, v, \delta)) dv \right|$$

et

$$(37) \quad \bar{\varepsilon}_2(x, y, \delta) = d(\delta) + \Omega(\sup_{(x, y) \in R} \bar{\varepsilon}_1(x, y, \Omega(\delta))) + \left| \int_{g(y)}^x \tilde{\omega}_2(u, y, \varepsilon_2(u, y, \delta)) du \right|$$

pour $(x, y) \in R$ et $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$, $d(\delta)$ et $\Omega(\delta)$ ayant la même signification que dans la démonstration du théorème 1 et

$$\tilde{\omega}_i(x, y, \delta) = \min(2K, \omega_i(x, y, \delta)) \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

où

$$K = \max |f(x, y, z, p, q)|$$

$$\text{pour } (x, y) \in R, |z| \leq |z| + l \cdot (P + Q), |p| \leq P \text{ et } |q| \leq Q.$$

(L'introduction des fonctions bornées $\tilde{\omega}_i$ assure, pour tout $\delta \geq 0$, l'existence des solutions $\tilde{\varepsilon}_i$, définies dans tout le rectangle R , des équations (36) et (37)).

Théorème 3. *Le problème (S) admet une solution si l'ensemble des conditions suivantes est vérifié:*

1° $\dot{y} = g(\dot{x}), x = h(\dot{y});$

2° $g(x) = \text{const}$ pour $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$, ou $h(y) = \text{const}$ pour $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$;

3° l'hypothèse K est vérifiée;

4° il existe des constantes positives C et D et des fonctions $A(x)$ et $B(y)$, continues et positives pour $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ et $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, telles que

$$(38) \quad A(\dot{x}) \cdot B(\dot{y}) < 1,$$

et

$$|f(x, y, z, 0, 0)| \leq C + D \cdot |z|,$$

$$|G(x, z, q)| \leq C + D \cdot |z| + A(x) \cdot |q|,$$

$$|H(y, z, p)| \leq C + D \cdot |z| + B(y) \cdot |p|,$$

pour $(x, y) \in R$ et z, p, q quelconques.

La démonstration de ce théorème sera facilitée par les deux lemmes suivants.

Lemme 4. *Dans les conditions du théorème 3, il existe des constantes positives M et N telles que*

$$|f(x, y, z, p, q)| \leq M + N \cdot (|z| + |p| + |q|),$$

$$|G(x, z, q)| \leq M + N \cdot |z| + A(x) \cdot |q|,$$

$$|H(y, z, p)| \leq M + N \cdot |z| + B(y) \cdot |p|,$$

pour $(x, y) \in R$ et z, p, q quelconques.

En effet, d'après (34) pour tout $\delta \geq 0$ existe

$$\omega^*(\delta) = \sup |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})| < +\infty$$

où $(x, y) \in R$, z est arbitraire et p, \bar{p}, q et \bar{q} vérifient l'inégalité $|p - \bar{p}| +$

$+|q - \bar{q}| \leq \delta$, étant d'ailleurs arbitraires. La fonction $\omega^*(\delta)$ est non décroissante. Il est aisé de montrer que

$$\omega^*(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega^*(\delta_1) + \omega^*(\delta_2) \text{ pour } \delta_1 \geq 0 \text{ et } \delta_2 \geq 0,$$

d'où

$$\omega^*(n \cdot \delta) \leq n \cdot \omega^*(\delta) \text{ pour } \delta \geq 0 \text{ et } n = 1, 2, 3, \dots$$

donc

$$\omega^*(\delta) \leq \omega^*(|\delta| + 1) \leq (|\delta| + 1) \cdot \omega^*(1) \leq \omega^*(1) \cdot (1 + \delta),$$

où $|\delta|$ désigne la partie entière du nombre δ . Par conséquent

$$|f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, 0, 0)| \leq \omega^*(|p| + |q|) \leq \omega^*(1) \cdot (1 + |p| + |q|)$$

et il suffit d'admettre $M = C + \omega^*(1)$ et $N = \max(D, \omega^*(1))$.

Si la fonction $z(x, y)$ et ses dérivées $\partial z / \partial x$, $\partial z / \partial y$ et $\partial^2 z / \partial x \partial y$ sont continues dans un ensemble Z , nous dirons qu'elle est de classe $C^{(1*)}$ dans cet ensemble.

Lemme 5. *Supposons que l'hypothèse K soit vérifiée, que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ soit continue pour $(x, y) \in R$ et z, p, q quelconques et que la fonction $z(x, y)$, de classe $C^{(1*)}$ dans le rectangle R , vérifie l'équation (1). Considérons le segment de droite*

$$x = \text{const} = \tilde{x} \in \langle a_1, a_2 \rangle, \quad y \in \langle y', y'' \rangle, \quad \text{où } \beta_1 \leq y' < y'' \leq \beta_2.$$

Les valeurs de la dérivée $\partial z / \partial x$ le long de ce segment sont univoquement déterminées si l'on donne les valeurs de la fonction $z(x, y)$ le long de ce segment et la valeur de la dérivée $\partial z / \partial x$ en un point quelconque de celui-ci.

En effet, soient (\tilde{x}, \tilde{y}) les coordonnées du point du segment où la valeur de la dérivée $\partial z / \partial x$ est donnée et soit \tilde{p} cette valeur. Désignons par $p(y)$ la valeur de la dérivée $\partial z / \partial x$ le long du segment considéré. Alors

$$\frac{dp(y)}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=\tilde{x}} \right) = f \left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right) \Big|_{x=\tilde{x}}$$

Désignons par $\psi(y, p)$ une fonction continue, déterminée univoquement par la fonction $f(x, y, z, p, q)$ et par les valeurs $z(\tilde{x}, y)$ au moyen de la formule

$$\psi(y, p) = f \left(\tilde{x}, y, z(\tilde{x}, y), p, \frac{\partial z(\tilde{x}, y)}{\partial y} \right).$$

Nous aurons alors

$$(39) \quad \begin{cases} \frac{dp(y)}{dy} = \psi(y, p(y)), \\ p(\tilde{y}) = \tilde{p}. \end{cases}$$

Comme

$$|\psi(y, p) - \psi(y, \bar{p})| \leq \omega_1(\tilde{x}, y, |p - \bar{p}|)$$

où ω_1 est la fonction qui intervient dans l'hypothèse K, la fonction $p(y)$ est univoquement déterminée par les conditions (39) en vertu du théorème d'unicité de Kamke (cf. [9], p. 99) et le lemme est ainsi démontré.

Les rôles des variables x et y peuvent évidemment être échangés dans ce lemme. Il résulte de ce lemme que si l'on a, dans d'hypothèse K, deux rectangles fermés dont les intérieurs sont disjoints et le côté commun est parallèle à l'un des axes coordonnées, tous les deux contenus dans le rectangle R , et si dans chacun de ces rectangles une solution de classe $C^{(1*)}$ de l'équation (1) est donnée, enfin si sur le côté commun des deux rectangles les valeurs sont les mêmes et en un point de ce côté les dérivées (unilatères) dans la direction perpendiculaire à ce côté sont les mêmes pour les deux solutions, alors ces solutions prises ensemble fournissent une solution de l'équation (1) de classe $C^{(1*)}$ dans la somme de deux rectangles.

Démonstration du théorème 3

Pour fixer les idées, nous admettrons que $h(y) = \text{const.}$ En vertu du lemme 5 on peut admettre, sans nuire à la généralité, que le graphique de la fonction $x = h(y)$ est un des côté du rectangle R . Pour fixer les idées, nous supposerons encore que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha$, $\beta_2 = -\beta_1 = \beta$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ et $h(y) = 0$ pour $|y| \leq \beta$.

Soit $R_{0,0}$ le rectangle défini par les inégalités

$$0 \leq x \leq \alpha_0, \quad |y| \leq \beta_0; \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha, \quad 0 < \beta_0 \leq \beta,$$

tel que

$$|g(x)| \leq \beta_0 \quad \text{pour } x \in \langle 0, \alpha_0 \rangle$$

et

$$(40) \quad l_0 < \sqrt{1 + \frac{1 - A_0 B_0}{N \cdot (A_0 + B_0 + 2)}} - 1$$

et

$$(41) \quad l_0 < \sqrt{1 + \frac{1}{N \cdot (B + 2)}} - 1$$

où N est le nombre défini dans le lemme 4,

$$l_0 = \max(\alpha_0, 2\beta_0),$$

$$A_0 = \max_{0 \leq x \leq \alpha_0} A(x),$$

$$B_0 = \max_{|y| \leq \beta_0} B(y),$$

$$\bar{B} = \max_{|y| \leq \beta} B(y).$$

Un tel rectangle existe en vertu de l'hypothèse 1° et de la condition (38).

D'après l'inégalité (40) il existe, en vertu du théorème 2 et du lemme 4, une fonction $z_{0,0}(x, y)$ qui constitue la solution du problème (S) pour le rectangle $R_{0,0}$.

Désignons par R_0 le rectangle déterminé par les inégalités

$$0 \leq x \leq a_0, \quad |y| \leq \beta.$$

Partageons le rectangle R_0 en les rectangles

$$R_{0,i} = \{(x, y); 0 \leq x \leq a_0, \max(-\beta, (2i-1)\beta_0) \leq y \leq \min(\beta, (2i+1)\beta_0)\},$$

$$i = m_0, m_0 + 1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, n_0.$$

D'après l'inégalité (41) il existe, en vertu du théorème 2, une fonction $z_{0,1}(x, y)$ de classe $C^{(1*)}$ dans le rectangle $R_{0,1}$, satisfaisant à l'équation (1) et telle que

$$\frac{\partial z_{0,1}(0, y)}{\partial y} = H\left(y, z_{0,1}(0, y), \frac{\partial z_{0,1}}{\partial x}(0, y)\right) \text{ pour } \beta_0 \leq y \leq \min(\beta, 3\beta_0)$$

et

$$z_{0,1}(x, \beta_0) = z_{0,0}(x, \beta_0) \text{ pour } x \in \langle 0, a_0 \rangle.$$

Pour constater qu'une telle fonction existe, il suffit d'appliquer le théorème 2 en posant $R = R_{0,1}$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \beta_0)$, $g(x) \equiv \beta_0$, $h(y) \equiv 0$, $\bar{z} = z_{0,0}(0, \beta_0)$ et $G(x, z, q) \equiv dz_{0,0}(x, \beta_0)/dx$ pour $x \in \langle 0, a_0 \rangle$. On peut alors admettre $B = \bar{B}$ et $A > 0$ assez petit pour que l'inégalité (35) soit satisfaite pour $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = a_0$, $\beta_1 = \beta_0$, $\beta_2 = 3\beta_0$, ce qui est possible grâce à l'inégalité (41). En vertu du lemme 5 nous obtenons ainsi une solution du problème (S) dans le rectangle $R_{0,0} + R_{0,1}$. En procédant pareillement nous obtenons, après un nombre fini de pas, la solution du problème (S) dans le rectangle R_0 .

Soit

$$\bar{A} = \max_{0 \leq x \leq a} A(x),$$

et désignons par l_1 un nombre positif tel que

$$l_1 < \sqrt{1 + \frac{1}{N \cdot (\bar{A} + 2)}} - 1,$$

et

$$\max_{\substack{0 \leq x', x'' \leq a \\ |x' - x''| \leq l_1}} |g(x') - g(x'')| < \sqrt{1 + \frac{1}{N \cdot (\bar{A} + 2)}} - 1.$$

Alors il existe un rectangle

$$R_{1,0} = \{(x, y); a_0 \leq x \leq \min(a, a_0 + l_1), \beta_1^* \leq y \leq \beta_2^*\},$$

tel que

$$-\beta \leq \beta_1^* < \beta_2^* \leq \beta, \quad \beta_2^* - \beta_1^* < \sqrt{1 + \frac{1}{N \cdot (A+2)}} - 1,$$

et

$$\beta_1^* \leq g(x) \leq \beta_2^* \text{ pour } a_0 \leq x \leq \min(a, a_0 + l_1).$$

Soit $z_{1,0}(x, y)$ une fonction de classe $C^{(1*)}$ dans le rectangle $R_{1,0}$, satisfaisant à l'équation (1) et telle que

$$\frac{\partial z_{1,0}}{\partial x}(x, g(x)) = G(x, z_{1,0}(x, g(x))), \quad \frac{\partial z_{1,0}}{\partial y}(x, g(x))$$

$$\text{pour } a_0 \leq x \leq \min(a, a_0 + l_1)$$

et

$$z_{1,0}(a_0, y) = z_0(a_0, y) \text{ pour } y \in \langle \beta_1^*, \beta_2^* \rangle.$$

De même que la fonction $z_{0,1}(x, y)$, cette fonction existe en vertu du théorème 2. Soit ensuite $z_{1,1}(x, y)$ une fonction de classe $C^{(1*)}$ dans le rectangle

$$R_{1,1} = \{(x, y); a_0 \leq x \leq \min(a, a_0 + l_1), \beta_2^* \leq y \leq \beta\},$$

satisfaisant à l'équation (1) et telle que

$$z_{1,1}(x, \beta_2^*) = z_{1,0}(x, \beta_2^*) \text{ pour } a_0 \leq x \leq \min(a, a_0 + l_1),$$

$$z_{1,1}(a_0, y) = z_0(a_0, y) \text{ pour } y \in \langle \beta_2^*, \beta \rangle.$$

Cette fonction, qui constitue une solution du problème de Darboux, existe en vertu du théorème 2 du travail [10] (p. 78; nous avons signalé dans la note au bas de la p. 78 que ce théorème est valable dans l'hypothèse K). De la même façon nous définissons la fonction $z_{1,-1}(x, y)$ dans le rectangle

$$R_{1,-1} = \{(x, y); a_0 \leq x \leq \min(a, a_0 + l_1), -\beta \leq y \leq \beta_1^*\}.$$

Nous obtenons ainsi, en vertu du lemme 5, une solution du problème (S) dans le rectangle

$$R_1 = \{(x, y); 0 \leq x \leq \min(a, a_0 + l_1), |y| \leq \beta\}.$$

En prolongeant cette solution, d'une façon analogue, sur les rectangles

$$R_n = \{(x, y); 0 \leq x \leq \min(a, a_0 + nl_1), |y| \leq \beta\}, n = 2, 3, \dots,$$

nous obtenons, après un nombre fini de pas, une solution du problème (S) dans tout le rectangle R . Le théorème 3 se trouve ainsi démontré.

VI

Hypothèses H. 1° Il existe des constantes positives C et D telles que

$$\begin{aligned} |f(x, y, z, 0, 0)| &\leq C + D \cdot |z|, \\ |G(x, z, q)| &\leq C + D \cdot (|z| + |q|), \\ |H(y, z, p)| &\leq C + D \cdot (|z| + |q|), \end{aligned}$$

pour $(x, y) \in R$ et z, p, q , quelconques;

2° si $(x, y) \in R$, $y = g(x)$ et $x = h(y)$, on a $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$ (c'est-à-dire le point (\bar{x}, \bar{y}) est le seul point commun des courbes $y = g(x)$, $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ et $x = h(y)$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$);

3° Il existe un $\eta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})| &\leq \omega(|p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|), \\ |G(x, z, q) - G(x, z, \bar{q})| &\leq A \cdot |q - \bar{q}|, \\ |H(y, z, p) - H(y, z, \bar{p})| &\leq B \cdot |p - \bar{p}|, \end{aligned}$$

pour $(x, y) \in R$ tels que $|x - \bar{x}| \leq \eta$ et $|y - \bar{y}| \leq \eta$ et pour $z, p, q, \bar{p}, \bar{q}$, quelconques; les constantes positives A et B remplissent la condition

$$A \cdot B < 1$$

et $\omega(\delta)$ est une fonction continue et non décroissante pour $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$, telle que $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$, et

$$\int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \text{ pour } \delta > 0.$$

Théorème 4. *Le problème (S) admet une solution si les hypothèses K et H sont vérifiées et si le seul point commun des courbes $y = g(x)$, $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ et $x = h(y)$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ (d'après H, 2° c'est en même temps le point (\bar{x}, \bar{y})) est un des sommets du rectangle R^* .*

Démonstration. Pour fixer les idées, supposons que l'on $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle 0, a \rangle$, $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$, et que le seul point commun des courbes $y = g(x)$, $x \in \langle 0, a \rangle$ et $x = h(y)$, $y \in \langle 0, \beta \rangle$ soit le point $(0, 0)$.

Soit

$$\begin{aligned} \bar{g}(x) &= \max_{0 \leq t \leq x} g(t) \text{ pour } x \in \langle 0, a \rangle, \\ \bar{h}(y) &= \max_{0 \leq t \leq y} h(t) \text{ pour } y \in \langle 0, \beta \rangle. \end{aligned}$$

*) Il serait désirable de remplacer, dans ce théorème et dans le suivant, les hypothèses H par les hypothèses 4° du théorème 3. Pour le moment, nous n'y avons pas réussi, car dans les démonstrations nous nous appuyons sur le théorème 1.

Si $x > 0$, on a $h(g(x)) < x$. En effet, si pour un $\bar{x} \in \langle 0, a \rangle$ on avait $h(g(\bar{x})) \geq \bar{x}$, comme $h(g(a)) \leq a$, il existerait un $\bar{x} \in \langle \bar{x}, a \rangle$ tel que $h(g(\bar{x})) = \bar{x}$. Mais, le point (\bar{x}, \bar{y}) , où $\bar{y} = g(\bar{x})$, serait alors un point commun, différent de l'origine, des courbes $y = g(x)$, $x \in \langle 0, a \rangle$ et $x = h(y)$, $y \in \langle 0, \beta \rangle$.

Si pour un point $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ on a $\bar{y} = g(\bar{x})$ et $\bar{x} = h(\bar{y})$, il existe un $\bar{x} \in \langle 0, \bar{x} \rangle$ tel que $\bar{y} = g(\bar{x}) = g(\bar{x})$ et $h(\bar{y}) = \bar{x} \geq \bar{x}$, d'où, en vertu de ce qui précède, $\bar{x} = 0$ et par suite $\bar{y} = g(\bar{x}) = g(0) = 0$ et $\bar{x} = h(\bar{y}) = h(0) = 0$, donc $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. Par conséquent, le seul point commun des courbes $y = g(x)$, $x \in \langle 0, a \rangle$ et $x = h(y)$, $y \in \langle 0, \beta \rangle$ est l'origine. Ceci établi, on démontre d'une façon analogue que l'origine est aussi le seul point commun des courbes $y = g(x)$, $x \in \langle 0, a \rangle$ et $x = h(y)$, $y \in \langle 0, \beta \rangle$ d'où il résulte que $h(g(x)) < x$ pour $x > 0$ et $g(h(y)) < y$ pour $y > 0$.

Soit N le nombre positif défini dans le lemme 4 et l_0 un nombre positif tel que

$$l_0 < \eta, \quad l_0 \leq \min(a, \beta)$$

et

$$(42) \quad l_0 < \sqrt{1 + \frac{1 - AB}{N \cdot (A + B + 2)}} - 1.$$

Si l'on avait $g(l_0) \geq l_0$ et $h(l_0) \geq l_0$, on aurait aussi $h(g(l_0)) \geq l_0$, puisque la fonction $h(y)$ est non décroissante. C'est pourtant impossible, car $l_0 > 0$, donc

$$\min(g(l_0), h(l_0)) < l_0.$$

Pour fixer les idées, supposons que $g(l_0) < l_0$. Désignons par l^* le plus grand nombre de l'intervalle $0 \leq y \leq \beta$ tel que $h(y) \leq l_0$. On a $l^* \geq g(l_0)$, sinon il existerait un $\bar{y} < g(l_0)$ tel que $h(\bar{y}) > l_0$, et on aurait alors $h(g(l_0)) \geq h(\bar{y}) > l_0$, ce qui est impossible. Evidemment on a aussi $l^* > 0$, puisque $l_0 > 0$. Désignons par R_0^* le rectangle déterminé par les inégalités

$$0 \leq x \leq l_0, \quad 0 \leq y \leq \min(l_0, l^*).$$

Si $x \in \langle 0, l_0 \rangle$, on a $0 \leq g(x) \leq \bar{g}(x) \leq g(l_0) \leq \min(l_0, l^*)$, si $y \in \langle 0, \min(l_0, l^*) \rangle$, il vient $0 \leq h(y) \leq \bar{h}(y) \leq h(l^*) \leq l_0$. Dans le cas où $h(l_0) < l_0$, le rectangle R_0^* est défini d'une façon analogue. On peut donc affirmer qu'il existe un rectangle

$$R_0^* = \{(x, y); 0 \leq x \leq \alpha^*, 0 \leq y \leq \beta^*; 0 < \alpha^* \leq a, 0 < \beta^* \leq \beta,$$

tel que

$$0 \leq g(x) \leq \beta^* \quad \text{pour } x \in \langle 0, \alpha^* \rangle,$$

$$0 \leq h(y) \leq \alpha^* \quad \text{pour } y \in \langle 0, \beta^* \rangle,$$

$$\alpha^* \leq l_0, \quad \beta^* \leq l_0.$$

D'après l'inégalité (42) et les hypothèses H, 3° il existe, en vertu du lemme 4 et du théorème 1, une solution du problème (S) pour le rectangle R_0^* . En procédant comme dans la démonstration du théorème 3, on peut prolonger cette solution de manière à obtenir une solution du problème (S) pour le rectangle

$$R_0 = \{(x, y); 0 \leq x \leq a_0, 0 \leq y \leq \beta_0\},$$

où $\beta_0 = \beta^*$ et a_0 est le plus grand nombre x de l'intervalle $\langle 0, a \rangle$ tel que $g(x) \leq \beta_0$ (donc $a_0 \geq a^*$).

Il existe un nombre positif δ_0 tel que

$$(43) \quad \text{si } x \in \langle a_0, a \rangle \text{ et } \bar{h}(y) = x, \text{ on a } y \geq \bar{g}(x) + \delta_0,$$

$$(44) \quad \text{si } y \in \langle \beta_0, \beta \rangle \text{ et } \bar{g}(x) = y, \text{ on a } x \geq \bar{h}(y) + \delta_0.$$

Sinon, il existerait une suite de points $(x_n, y_n) \in R$ telle que

$$(a) \quad x_n \in \langle a_0, a \rangle, x_n = \bar{h}(y_n), y_n < \bar{g}(x_n) + \frac{1}{n},$$

ou bien

$$(b) \quad y_n \in \langle \beta_0, \beta \rangle, y_n = \bar{g}(x_n), x_n < \bar{h}(y_n) + \frac{1}{n},$$

et on pourrait admettre dans les deux cas que la suite (x_n, y_n) est convergente. Soit $(x_0, y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$. Alors

$$(a) \quad x_0 \in \langle a_0, a \rangle, \quad x_0 = \bar{h}(y_0), \quad y_0 \leq \bar{g}(x_0),$$

ou bien

$$(b) \quad y_0 \in \langle \beta_0, \beta \rangle, \quad y_0 = \bar{g}(x_0), \quad x_0 \leq \bar{h}(y_0).$$

Dans le cas (a) on a $y_0 > 0$, puisque $\bar{h}(y_0) = x_0 > 0$ et en même temps $y_0 \leq \bar{g}(x_0) = \bar{g}(\bar{h}(y_0))$, dans le cas (b) on a $x_0 > 0$ et en même temps $x_0 \leq \bar{h}(\bar{g}(x_0))$; mais l'un et l'autre sont impossibles, puisque $\bar{h}(\bar{g}(x)) < x$ pour $x > 0$ et $\bar{g}(\bar{h}(y)) < y$ pour $y > 0$.

En appliquant ensuite le procédé utilisé dans la démonstration du théorème 3, nous prolongerons la solution du problème (S) pour le rectangle R_0 successivement sur les rectangles

$$R_1^* = \{(x, y); 0 \leq x \leq a_0, 0 \leq y \leq \beta_1\}$$

et

$$R_1 = \{(x, y); 0 \leq x \leq a_1, 0 \leq y \leq \beta_1\},$$

où β_1 est le plus grand nombre y de l'intervalle $\langle 0, \beta \rangle$ tel que $h(y) \leq a_0$ et a_1 est le plus grand nombre x de l'intervalle $\langle 0, a \rangle$ tel que $\bar{g}(x) \leq \beta_1$.

Comme $\bar{h}(\beta_1) = a_0$ ou bien $a_0 = a$, on a d'après (43) $\beta_1 \geq \min(\beta, \bar{g}(a_0) + \delta_0)$.
 Mais on a de même $\bar{g}(a_0) = \beta_0$ ou bien $a_0 = a$, et $a_0 = a$ entraîne $\beta_1 = \beta$, donc

$$\beta_1 \geq \min(\beta, \beta_0 + \delta_0).$$

Comme $g(a_1) = \beta_1$ ou bien $a_1 = a$, on a d'après (44) $a_1 \geq \min(a, h(\beta_1) + \delta_0)$.
 Mais $h(\beta_1) = a_0$ ou bien $\beta_1 = \beta$, et $\beta_1 = \beta$ entraîne $a_1 = a$, donc

$$a_1 \geq \min(a, a_0 + \delta_0).$$

La solution du problème (S) pour le rectangle R_1 sera prolongée d'une façon analogue sur le rectangle

$$R_2 = \{(x, y); 0 \leq x \leq a_2, 0 \leq y \leq \beta_2\},$$

où

β_2 est le plus grand nombre y de l'intervalle $\langle 0, \beta \rangle$ tel que $\bar{h}(y) \leq a_1$,
 a_2 est le plus grand nombre x de l'intervalle $\langle 0, a \rangle$ tel que $\bar{g}(x) \leq \beta_2$.

Alors nous avons

$$a_2 \geq \min(a, a_0 + 2\delta_0), \quad \beta_2 \geq \min(\beta, \beta_0 + 2\delta_0).$$

En procédant de même on obtiendra, après un nombre fini de pas, la solution du problème (S) dans tout le rectangle R .

Théorème 5*). *Le problème (S) admet une solution si les hypothèses K et H sont vérifiées et si les inégalités suivantes ont lieu (de là résulte H , 2°):*

$$|g(x) - \bar{y}| \leq a \cdot |x - \bar{x}| \quad \text{pour } x \in \langle a_1, a_2 \rangle,$$

$$|h(y) - \bar{x}| \leq b \cdot |y - \bar{y}| \quad \text{pour } y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle,$$

où a et b sont des constantes positives telles que

$$a \cdot b < 1.$$

Démonstration **). Pour simplifier, admettons $a_2 = -a_1 = a$, $\beta_2 = -\beta_1 = \beta$ et $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. Soit N le nombre défini dans le lemme 4 et désignons par R_0 le rectangle déterminé par les inégalités

$$|x| \leq a_0, \quad |y| \leq \beta_0; \quad 0 < a_0 \leq a, \quad 0 < \beta_0 \leq \beta, \quad \beta_0 = a a_0$$

tel que

$$a_0 < \eta, \quad \beta_0 < \eta,$$

$$2 \max(a_0, \beta_0) < \sqrt{1 + \frac{1 - AB}{N \cdot (A + B + 2)}} - 1$$

*) Généralisant un théorème donné dans le travail [4], ce théorème va plus loin que celui qu'on obtient directement du théorème 1 (cf. p. 76).

**) Comparer [17].

Nous avons alors

$$|g(x)| \leq a_0 \cdot a = \beta_0 \quad \text{pour } |x| \leq a_0,$$

$$|h(y)| \leq b \cdot \beta_0 < \frac{1}{a} \beta_0 = a_0 \quad \text{pour } |y| \leq \beta_0.$$

En vertu du théorème 1 il existe une solution du problème (S) pour le rectangle R_0 .

Soit

$$\beta_n = \begin{cases} \min\left(\beta, \frac{a_{n-1}}{b}\right), & \text{si } a_{n-1} < a, \\ \beta, & \text{si } a_{n-1} = a, \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} \min\left(a, \frac{\beta_n}{a}\right), & \text{si } \beta_n < \beta, \\ a, & \text{si } \beta_n = \beta, \end{cases}$$

pour $n = 1, 2, 3, \dots$. On prouve aisément par récurrence que l'on a, pour tout $n = 1, 2, 3, \dots$

$$(45) \quad \beta_n \geq \min\left(\beta, \frac{\beta_0}{(a \cdot b)^n}\right), \quad a_n \geq \min\left(a, \frac{a_0}{(a \cdot b)^n}\right).$$

En effet, les relations (45) ont lieu pour $n = 0$; supposons-les vraies pour un n donné, alors

si $a_n = a$, on a $\beta_{n+1} = \beta \geq \min\left(\beta, \frac{\beta_0}{(a \cdot b)^{n+1}}\right)$,

si $a_n < a$, on a $\beta_{n+1} = \min\left(\beta, \frac{a_n}{b}\right)$ et $a_n = \frac{\beta_n}{a}$, donc

$$\beta_{n+1} = \min\left(\beta, \frac{\beta_n}{a \cdot b}\right) \geq \min\left(\beta, \frac{\beta}{a \cdot b}, \frac{\beta_0}{(a \cdot b)^{n+1}}\right) = \min\left(\beta, \frac{\beta_0}{(a \cdot b)^{n+1}}\right),$$

si $\beta_{n+1} = \beta$, on a $a_{n+1} = a \geq \min\left(a, \frac{a_0}{(a \cdot b)^{n+1}}\right)$,

si $\beta_{n+1} < \beta$, on a $a_{n+1} = \min\left(a, \frac{\beta_{n+1}}{a}\right)$ et $\beta_{n+1} = \frac{a_n}{b}$, donc

$$a_{n+1} = \min\left(a, \frac{a_n}{a \cdot b}\right) \geq \min\left(a, \frac{a}{a \cdot b}, \frac{a_0}{(a \cdot b)^{n+1}}\right) = \min\left(a, \frac{a_0}{(a \cdot b)^{n+1}}\right).$$

D'autre part

$$\min(\beta, a a_n) = \begin{cases} \min(\beta, a a_n) \leq \beta_n, & \text{si } \beta_n < \beta, \\ \min(\beta, a a_n) \leq \beta = \beta_n, & \text{si } \beta_n = \beta, \end{cases}$$

$$\min(a, b \beta_n) = \begin{cases} \min(a, b \beta_n) \leq a_{n-1}, & \text{si } a_{n-1} < a, \\ \min(a, b \beta_n) \leq a = a_{n-1}, & \text{si } a_{n-1} = a; \end{cases}$$

par conséquent on a, pour tout $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$(46) \quad \min(\beta, a a_n) \leq \beta_n, \quad \min(a, b \beta_n) \leq a_{n-1}.$$

Désignons par R_n^* et R , $n = 1, 2, 3, \dots$, les rectangles

$$R_n^* = \{(x, y); |x| \leq a_{n-1}, |y| \leq \beta_n\},$$

$$R_n = \{(x, y); |x| \leq a_n, |y| \leq \beta_n\}.$$

D'après (46), on a

$$|g(x)| \leq \beta_n \quad \text{pour} \quad |x| \leq a_n,$$

$$|h(y)| \leq a_{n-1} \quad \text{pour} \quad |y| \leq \beta_n,$$

donc, en appliquant le procédé utilisé dans la démonstration du théorème 3, on peut prolonger la solution du problème (S) pour le rectangle R_0 successivement sur les rectangles

$$R_1^*, R_1, R_2^*, R_2, R_3^*, R_3, \dots$$

Puisque $a \cdot b < 1$, on obtient d'après (45), en répétant un nombre fini de fois l'application de ce procédé, la solution du problème (S) dans tout le rectangle R .

VII

Le problème de Goursat (cf. [6] et [7]) pour l'équation (1) concerne l'existence et l'unicité de la solution de cette équation qui admet des valeurs données à l'avance le long de deux courbes représentées par les équations $y = g(x)$ et $x = h(y)$, où $g(x)$ et $h(y)$ sont de classe $C^{(1)}$, ayant exactement un point commun. Ce problème peut être formulé de deux manières.

Problème (G₁). On suppose que les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ sont non décroissantes pour $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ et $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ et que l'on a $g(a_1) = \beta_1$, $h(\beta_1) = a_1$, $h(g(x)) < x$ pour $x > a_1$, $g(h(y)) < y$ pour $y > \beta_1$, et on cherche une solution de l'équation (1), déterminée dans l'ensemble

$$\Delta = \{(x, y); h(y) \leq x \leq a_2, g(x) \leq y \leq \beta_2\},$$

qui admette des valeurs données à l'avance le long des courbes $y = g(x)$, $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ et $x = h(y)$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle^*$.

* On peut énoncer le problème de Goursat d'une façon analogue si les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ sont non décroissantes et $g(a_2) = \beta_2$, $h(\beta_2) = a_2$, si les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ sont non croissantes et $g(a_1) = \beta_2$, $h(\beta_2) = a_1$, et enfin, si les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ sont non croissantes et $g(a_2) = \beta_1$, $h(\beta_1) = a_2$. L'hypothèse relative à l'allure monotone des fonctions $g(x)$ et $h(y)$ n'est pas, comme il résultera du théorème 8 de ce chapitre, nécessaire pour l'existence d'une solution du problème (G₁). Elle est pourtant essentielle pour l'unicité de cette solution, même pour l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = 0$ ce qui résulte d'un exemple donné dans le travail „Sur l'unicité des solutions de certains problèmes relatifs à l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$ “ qui fera suite au présent.

Problème (G₂). On suppose que les courbes $y = g(x)$, $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ et $x = h(y)$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ sont contenues dans le rectangle

$$R = \{(x, y); a_1 \leq x \leq a_2, \beta_1 \leq y \leq \beta_2\}$$

et ont exactement un point commun. On cherche une solution de l'équation (1), déterminée dans le rectangle R , qui admette le long de ces courbes des valeurs données à l'avance.

Dans le travail [10] j'ai énoncé un théorème sur l'existence d'une solution pour le problème (G₁) moyennant des hypothèses assez faibles. Il s'agira maintenant de théorèmes analogues pour le problème (G₂). Ils seront des conséquences des théorèmes du chapitre précédent et du théorème 1 du travail [10] (p. 78).

Hypothèses H. Désignons par R le rectangle déterminé par les inégalités

$$a_1 \leq x \leq a_2, \beta_1 \leq y \leq \beta_2; a_2 > a_1, \beta_2 > \beta_1.$$

Nous supposons que:

1° la fonction $g(x)$ est de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $\langle a_1, a_2 \rangle$, la fonction $h(y)$ est de classe $C^{(1)}$ dans l'intervalle $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, et on a

$$\beta_1 \leq g(x) \leq \beta_2 \quad \text{pour } x \in \langle a_1, a_2 \rangle,$$

$$a_1 \leq h(y) \leq a_2 \quad \text{pour } y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle,$$

les courbes représentées par les équations $y = g(x)$, $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ et $x = h(y)$, $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ ayant exactement un point commun, que nous désignerons par (\bar{x}, \bar{y}) ,

2° les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont de classe $C^{(1)}$ pour $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ et $y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, et on a $\varphi(\bar{x}) = \psi(\bar{y})$,

3° la fonction $f(x, y, z, p, q)$ est continue pour $(x, y) \in R$ et z, p, q quelconques, les hypothèses K sont vérifiées et il existe des constantes positives C et D telles que $|f(x, y, z, 0, 0)| \leq C + D \cdot |z|$ pour $(x, y) \in R$ et z quelconques,

4° il existe un $\eta > 0$ tel que

$$|f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})| \leq \omega(|p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|)$$

pour $(x, y) \in R$ tels que $|x - \bar{x}| < \eta$ et $|y - \bar{y}| < \eta$ et pour $z, p, \bar{p}, q, \bar{q}$ quelconques, où $\omega(\delta)$ est une fonction continue et non décroissante pour $\delta \in \langle 0, +\infty \rangle$, telle que $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ pour $\delta > 0$ et

$$\int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \quad \text{pour } \delta > 0.$$

Théorème 6. Si

1° les hypothèses H^* sont vérifiées,

$$2^\circ \quad \begin{cases} |g(x) - \bar{y}| \leq a \cdot |x - \bar{x}| & \text{pour } x \in \langle a_1, a_2 \rangle, \\ |h(y) - \bar{x}| \leq b \cdot |y - \bar{y}| & \text{pour } y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle, \end{cases}$$

où $a > 0$, $b > 0$ et $a \cdot b < 1$,

il existe une fonction $z(x, y)$ de classe $C^{(1*)}$ dans le rectangle R qui satisfait à l'équation (1) et aux conditions

$$(47) \quad \begin{cases} z(x, g(x)) = \varphi(x) & \text{pour } x \in \langle a_1, a_2 \rangle, \\ z(h(y), y) = \psi(y) & \text{pour } y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle. \end{cases}$$

Ce théorème généralise le théorème 2, [20], de Mlle Z. S z m y d t.

Démonstration. Les conditions (41) sont équivalentes aux suivantes:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, g(x)) = -x'(x) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(x, g(x)) + \varphi'(x) \quad \text{pour } x \in \langle a_1, a_2 \rangle,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(h(y), y) = -h'(y) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(h(y), y) + \psi'(y) \quad \text{pour } y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle,$$

$$z(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\bar{x}) = \psi(\bar{y}).$$

Posons

$$G(x, z, q) = -g'(x) \cdot q + \varphi'(x),$$

$$H(y, z, p) = -h'(y) \cdot p + \psi'(y),$$

$$\bar{z} = \varphi(\bar{x}) = \psi(\bar{y}).$$

En vertu de 2°, on a $|g'(\bar{x})| \leq a$, $|h'(\bar{y})| \leq b$ on peut donc trouver un $\eta^* > 0$ tel que pour $(x, y) \in R$ satisfaisant à $|x - \bar{x}| \leq \eta^*$ et $|y - \bar{y}| \leq \eta^*$ on ait $|g'(x) \cdot h'(y)| < 1$. Par conséquent, pour les fonctions G et H définies ci-dessus les hypothèses H sont vérifiées et le théorème 6 résulte du théorème 5 du chapitre précédent.

Théorème 7. Si

1° les hypothèses H^* sont vérifiées

2° (\bar{p}, \bar{y}) est un des sommets du rectangle R et

3° $|g'(\bar{x}) \cdot h'(\bar{y})| < 1$,

il existe une fonction $z(x, y)$ de classe $C^{(1*)}$ dans le rectangle R qui satisfait à l'équation (1) et aux conditions (47).

Ce théorème résulte du théorème 4 de même que le théorème 6 découle du théorème 5.

Théorème 8. Si

1° les hypothèses H^* sont vérifiées,

2° (\bar{x}, \bar{y}) est un des sommets du rectangle R ,

3° il existe une fonction $\chi(x, y)$ de classe $C^{(1)}$ dans le rectangle R dont les dérivées satisfont aux conditions de Lipschitz

$$|\chi'_x(x, y) - \chi'_x(x, \bar{y})| \leq K \cdot |y - \bar{y}|,$$

$$|\chi'_y(x, y) - \chi'_y(\bar{x}, y)| \leq K \cdot |x - \bar{x}|,$$

où K est une constante positive, telle que

$$\varphi(x) = \chi(x, g(x)) \quad \text{pour } x \in \langle a_1, a_2 \rangle,$$

$$\psi(y) = \chi(h(y), y) \quad \text{pour } y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle,$$

4° toutes les fonctions $d\lambda^n(x)/dx, n = 0, 1, 2, \dots$, où $\lambda^0(x) = x, \lambda^{n+1}(x) = h(g(\lambda^n(x)))$, sont bornées dans leur ensemble dans l'intervalle $\langle a_1, a_2 \rangle$, il existe une fonction $z(x, y)$ de classe $C^{(1*)}$ dans le rectangle R satisfaisant à l'équation (1) et aux conditions (47).

Démonstration. Pour fixer les idées, admettons $(\bar{x}, \bar{y}) = (a_1, \beta_1) = (0, 0)$, $a_2 = a, \beta_2 = \beta$. Comme nous l'avons montré dans la démonstration du théorème 4 on a $h(g(x)) < x$ pour $x > 0$, donc $0 \leq h(g(x)) \leq x$; de la on tire $0 \leq dh(g(x))/dx|_{x=0} \leq 1$, c'est-à-dire $0 \leq h'(0) \cdot g'(0) \leq 1$. Si $g'(0) \cdot h'(0) < 1$, le théorème résulte du théorème 7. Supposons donc que $g'(0) \cdot h'(0) = 1$. Comme $g(x) \geq 0 = g(0), h(y) \geq 0 = h(0)$, on a alors $g'(0) > 0$ et $h'(0) > 0$. Il existe donc un $\delta \in (0, \min(a, \beta, \eta))$ tel que

$$g'(x) \geq 0 \quad \text{pour } x \in \langle 0, \delta \rangle, \quad h'(y) \geq 0 \quad \text{pour } y \in \langle 0, \delta \rangle.$$

Désignons par Δ_0 l'ensemble déterminé par les inégalités

$$h(y) \leq x \leq \delta, \quad g(x) \leq y \leq \delta.$$

En vertu du théorème 1 du travail [10] il existe une fonction $z_0(x, y)$ de classe $C^{(1*)}$ dans un ensemble ouvert $D_0 \supset \Delta_0$, qui satisfait dans l'ensemble Δ_0 à l'équation (1) et aux conditions

$$z_0(x, g(x)) = \varphi(x) \quad \text{pour } x \in \langle 0, \delta \rangle, \quad z_0(h(y), y) = \psi(y) \quad \text{pour } y \in \langle 0, \delta \rangle.$$

Soit

$$\Delta_1 = \{(x, y); 0 \leq x \leq \delta, 0 \leq y \leq g(x)\},$$

et

$$\Delta_2 = \{(x, y); 0 \leq x \leq h(y), 0 \leq y \leq \delta\}.$$

En vertu du théorème 2 du travail [10] il existe une fonction $z_1(x, y)$ de

classe $C^{(1*)}$ dans un ensemble ouvert $D_1 \supset \Delta$ qui satisfait dans l'ensemble Δ_1 à l'équation (1) et aux conditions

$$z_1(0, 0) = z_0(0, 0),$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x}(x, g(x)) = \frac{\partial z_0}{\partial x}(x, g(x)) \quad \text{pour } x \in \langle 0, \delta \rangle,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial y}(x, g(x)) = \frac{\partial z_0}{\partial y}(x, g(x)) \quad \text{pour } x \in \langle 0, \delta \rangle.$$

De ces conditions résulte que

$$z_1(x, g(x)) = z_0(x, g(x)) \quad \text{pour } x \in \langle 0, \delta \rangle.$$

Une fonction semblable $z_2(x, y)$ existe pour l'ensemble Δ_2 . Les fonctions $z_0(x, y)$, $z_1(x, y)$ et $z_2(x, y)$ donnent ensemble une fonction $z^*(x, y)$ de classe $C^{(1*)}$ dans le carré déterminé par les inégalités $0 \leq x \leq \delta$, $0 \leq y \leq \delta$, qui satisfait à l'équation (1) et aux conditions

$$z^*(x, g(x)) = \varphi(x) \quad \text{pour } x \in \langle 0, \delta \rangle,$$

$$z^*(h(y), y) = \psi(y) \quad \text{pour } y \in \langle 0, \delta \rangle.$$

L'ensemble des conditions

$$z(x, \delta) = z^*(x, \delta) \quad \text{pour } x \in \langle 0, \delta \rangle,$$

$$z(\delta, y) = z^*(\delta, y) \quad \text{pour } y \in \langle 0, \delta \rangle,$$

$$z(x, g(x)) = \varphi(x) \quad \text{pour } x \in \langle \delta, a \rangle,$$

$$z(h(y), y) = \psi(y) \quad \text{pour } y \in \langle \delta, \beta \rangle,$$

étant équivalent à celui des conditions

$$z(x, \delta) = z^*(x, \delta) \quad \text{pour } x \in \langle 0, \delta \rangle,$$

$$z(\delta, y) = z^*(\delta, y) \quad \text{pour } y \in \langle 0, \delta \rangle,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, g(x)) = -g'(x) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(x, g(x)) + \varphi'(x) \quad \text{pour } x \in \langle \delta, a \rangle,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(h(y), y) = -h'(y) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(h(y), y) + \psi'(y) \quad \text{pour } y \in \langle \delta, \beta \rangle,$$

on peut, en procédant comme dans la démonstration du théorème 4, prolonger la fonction $z^*(x, y)$ en une fonction $z(x, y)$ de classe $C^{(1*)}$ dans tout le rectangle R , qui satisfait à l'équation (1) et aux conditions (47). Le théorème 8 est ainsi démontré.

Les théorèmes 7 et 8 étendent à l'équation (1) les résultats établis pour l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y)$ dans le travail [2]. Les exemples donnés dans le travail [2] montrent que les hypothèses 3° et 4° sont essentielles pour l'existence d'une solution et, sans elles, le théorème serait faux, même pour l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Alexiewicz, A. and Orlicz, W., *Some remarks on existence and uniqueness of solutions of the hyperbolic equation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$* . Studia Math. 15, 2 (1956), p. 201—215.
- [2] Bielecki, A. et Kiszyński, J., *Sur le problème de E. Goursat relatif à l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y)$* . Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 10, 10 (1956), p. 99—126.
- [3] Bielecki, A. et Kiszyński, J., *Une remarque à propos de deux notes de Z. Szmydt*. Bull. Acad. Polon. Sci. Série des sci. math., astr. et phys., 6, 1 (1958), p. 15—16.
- [4] Bielecki, A. et Kiszyński, J., *Sur le problème de Mlle Z. Szmydt relatif à l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$* . Bull. Acad. Polon. Sci. Série des sci. math., astr. et phys., 6, 5 (1958), p. 321—325.
- [5] Ciliberto, C., *Sul problema di Darboux per l'equazione $s = f(x, y, z, p, q)$* . Rend. dell' Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere et Arti di Napoli, Serie 4, 22 (1955), p. 1—5.
- [6] Goursat, E., *Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre*. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, 6 (1904), p. 117—144.
- [7] Goursat, E., *Cours d'Analyse Mathématique*. 5^{ème} éd. Tome III, Paris (1942), p. 123—125.
- [8] Hartman, P. and Wintner, A., *On hyperbolic partial differential equations*. Amer. J. Math., 74 (1952), p. 832—864.
- [9] Kamke, E., *Differentialgleichungen reeller Funktionen*. Leipzig (1930).
- [10] Kiszyński, J., *Sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes classiques relatifs à l'équation $s = F(x, y, z, p, q)$* . Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 11 (1957), p. 73—112.
- [11] Kiszyński, J., *Sur le problème de Picard relatif à l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$* . Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 13 (1959), sous presse.
- [12] Kiszyński, J., *Sur l'unicité, des solutions de certains problèmes pour l'équation $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$* . Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 12, 8 (1958), p. 111—129.
- [13] Lasota, A., *Sur une généralisation d'un problème de Z. Szmydt concernant l'équation $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$* . Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 5, 1 (1957), p. 15—18.
- [14] Lasota, A., *Sur un nouveau problème aux limites relatif à l'équation de la corde vibrante*. Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 5, 9 (1957), p. 843—846.
- [15] Schauder, J., *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*. Math. Zeitschrift, 26 (1927), p. 47—65.
- [16] Schauder, J., *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*. Studia Math., 2 (1930), p. 171—180.
- [17] Stampacchia, G., *Il problema di Goursat per un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico*. Giornale di Matematiche di Battaglini, s. IV, 79 (1949/1950), p. 66—85.
- [18] Szmydt, Z., *Sur un nouveau type des problèmes pour un système d'équations différentielles hyperbolique du second ordre à deux variables indépendantes*. Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 4, 2 (1956), p. 67—72.

- [19] Szmydt, Z., *Sur une généralisation des problèmes classiques concernant un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*. Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 4, 9 (1956), p. 579—584.
- [20] Szmydt, Z., *Sur le problème de Goursat concernant les équations différentielles hyperboliques du second ordre*. Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 5, 6 (1957), p. 571—575.
- [21] Szmydt, Z., *Sur un problème concernant un système d'équations différentielles hyperboliques d'ordre arbitraire à deux variables indépendantes*. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5, 6 (1957), p. 577—582.
- [22] Szmydt, Z., *Sur l'existence de solutions de certains nouveaux problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*. Annales Polonici Mathematici, 4, 1 (1957), p. 40—60.
- [23] Szmydt, Z., *L'existence de solutions de certains problèmes aux limites relatifs à un système d'équations différentielles hyperboliques*. Bull. Acad. Polon. Sci. Série des Sci. math. astr. et phys., 6, 1 (1958), p. 31—36.

Streszczenie

Praca zawiera twierdzenia o istnieniu rozwiązań dla następującego ogólnego problemu, dotyczącego równania

$$(1) \quad z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y),$$

postawionego przez Panią Z. Szmydt.

Problem (S). Niech R oznacza prostokąt

$$a_1 \leq x \leq a_2, \quad \beta_1 \leq y \leq \beta_2.$$

Dane są funkcje $f(x, y, z, p, q)$, $G(x, z, q)$ i $H(y, z, p)$, ciągłe dla $(x, y) \in R$ i z, p, q dowolnych. Ponadto dane są funkcje $g(x)$ i $h(y)$ ciągłe odpowiednio w przedziałach $\langle a_1, a_2 \rangle$ i $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ spełniające nierówności $\beta_1 \leq g(x) \leq \beta_2$ i $\alpha_1 \leq h(y) \leq \alpha_2$. Wreszcie dany jest punkt $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ oraz liczba \bar{z} . Poszukiwane jest rozwiązanie $z(x, y)$ równania (1), określone i ciągle wraz z pochodnymi z_x , z_y i z_{xy} w prostokącie R , spełniające warunki

$$z_x(x, g(x)) = G(x, z(x, g(x)), z_y(x, g(x))) \quad \text{dla } x \in \langle a_1, a_2 \rangle,$$

$$z_y(h(y), y) = H(y, z(h(y), y), z_x(h(y), y)) \quad \text{dla } y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle,$$

$$z(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{z}.$$

Główny wynik, uzyskany w pracy jest następujący.

Twierdzenie. Załóżmy, że

$$1^\circ \quad \sup_{a_1 \leq x \leq a_2} \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n(x) - \lambda^{n+1}(x)| < +\infty$$

$$\sup_{\beta_1 \leq y \leq \beta_2} \sum_{n=0}^{\infty} |\mu^n(y) - \mu^{n+1}(y)| < +\infty,$$

gdzie

$$\lambda^0(x) = x, \quad \lambda^{n+1}(x) = h(g(\lambda^n(x))), \quad \mu^0(y) = y, \quad \mu^{n+1}(y) = g(h(\mu^n(y))),$$

$$2^\circ \quad |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})| \leq \omega(|p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|),$$

gdzie funkcja $\omega(\delta)$ jest ciągła i niemalejąca dla $\delta \leq 0$, $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ dla $\delta > 0$, oraz

$$\int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \quad \text{dla } \delta > 0,$$

$$3^\circ \quad |G(x, z, q) - G(x, z, \bar{q})| \leq A \cdot |q - \bar{q}|,$$

$$|H(y, z, p) - H(y, z, \bar{p})| \leq B \cdot |p - \bar{p}|,$$

gdzie stałe dodatnie A i B spełniają nierówność

$$A \cdot B < 1,$$

$$4^\circ \quad |f(x, y, z, p, q)| \leq \Phi(|z| + |p| + |q|),$$

$$|G(x, z, q)| \leq \Phi(|z|) + A^* |q|,$$

$$|H(y, z, p)| \leq \Phi(|z|) + B^* |p|,$$

gdzie stałe dodatnie A^* i B^* spełniają nierówność

$$A^* \cdot B^* < 1,$$

a $\Phi(t)$ jest funkcją nieujemną i niemalejącą dla $t \in \langle 0, +\infty \rangle$, taką, że bądź

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = 0,$$

bądź też

$$\Phi(t) = M + N \cdot t,$$

przy czym

$$\max(\alpha_2 - \alpha_1, \beta_2 - \beta_1) < \sqrt{1 + \frac{1 - A^* B^*}{N(A^* + B^* + 2)}} - 1.$$

Przy powyższych założeniach problem (S) posiada rozwiązanie.

Dowód tego twierdzenia opiera się na twierdzeniu Schaudera o punkcie stałym.

W dalszym ciągu pracy dowodzi się kilku twierdzeń o istnieniu rozwiązania problemu (S) przy specjalnych założeniach o funkcjach $g(x)$ i $h(y)$, osłabiając natomiast założenia 4° i częściowo zastępując waru-

nek 2° przez ogólniejszy warunek (warunek K, rozdział V), pochodzący od A. Plisia. W dowodach tych twierdzeń stosuje się metodę, pozwalającą wyznaczyć rozwiązanie problemu w całym prostokącie R przez sklejanie rozwiązań, określonych w mniejszych prostokątach.

W ostatnim rozdziale podane są, łatwo wynikające z powyższych twierdzeń, twierdzenia o istnieniu rozwiązania zadania Goursata dla równania (1).

Резюме

Эта работа содержит теоремы о существовании решений для следующей общей проблемы, относящейся к уравнению

$$(1) \quad z_{x,y} = f(x, y, z, z_x, z_y),$$

поставленной мадам С. Шмыдт.

Проблема (S). Пусть R обозначает прямоугольник

$$a_1 \leq x \leq a_2, \quad \beta_1 \leq y \leq \beta_2$$

Даны функции $f(x, y, z, p, q)$, $G(x, z, q)$ и $H(y, z, p)$ непрерывные для $(x, y) \in R$ и произвольных z, p, q . Сверх того даны функции $g(x)$ и $h(y)$ непрерывные в сегментах соответственно $\langle a_1, a_2 \rangle$ и $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, исполняющие неравенства $\beta_1 \leq g(x) \leq \beta_2$ и $a_1 \leq h(y) \leq a_2$. К тому дана точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ и число \bar{z} . Ищется решение $z(x, y)$ уравнения (1), определённое и непрерывное вместе с производными z_x, z_y и z_{xy} в прямоугольнике R , исполняющие условия

$$\begin{aligned} z_x(x, g(x)) &= G(x, z(x, g(x)), z_y(x, g(x))) \quad \text{для } x \in \langle a_1, a_2 \rangle, \\ z_y(h(y), y) &= H(y, z(h(y), y), z_x(h(y), y)) \quad \text{для } y \in \langle \beta_1, \beta_2 \rangle, \\ z(\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{z}. \end{aligned}$$

Главный результат, полученный в этой работе, состоит в следующем.

Теорема. Положим, что

$$1^\circ \quad \sup_{a_1 \leq x \leq a_2} \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n(x) - \lambda^{n+1}(x)| < +\infty$$

и

$$\sup_{\beta_1 \leq y \leq \beta_2} \sum_{n=0}^{\infty} |\mu^n(y) - \mu^{n+1}(y)| < +\infty$$

где

$$\lambda^0(x) = x, \quad \lambda^{n+1}(x) = h(g(x^n(x))), \quad \mu^0(y) = y, \quad \mu^{n+1}(y) = g(h(\mu^n(y))),$$

$$2^\circ \quad |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})| \leq \omega(|p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|),$$

где функция $\omega(\delta)$ непрерывна и неубывающая для $\delta \geq 0$, $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ для $\delta < 0$, а также

$$\int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \quad \text{для } \delta > 0,$$

$$3^\circ \quad |G(x, z, q) - G(x, z, \bar{q})| \leq A \cdot |q - \bar{q}|,$$

$$|H(y, z, p) - H(y, z, \bar{p})| \leq B \cdot |p - \bar{p}|,$$

где положительные A и B исполняют неравенство

$$A \cdot B > 1,$$

$$4^\circ \quad |f(x, y, p, q)| \leq \Phi(|z| + |p| + |q|),$$

$$|G(x, z, q)| \leq \Phi(|z|) + A^* |q|,$$

$$|H(y, z, p)| \leq \Phi(|z|) + B^* |p|,$$

где положительные постоянные A^* и B^* исполняют неравенство

$$A^* \cdot B^* < 1,$$

а $\Phi(t)$ есть функция неотрицательная и неубывающая для $t \in (0, +\infty)$, такая, что или

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = 0,$$

или же

$$\Phi(t) = M + N \cdot t,$$

причём

$$\max(\alpha_2 - \alpha_1, \beta_2 - \beta_1) < \sqrt{1 + \frac{1 - A^* B^*}{N(A^* + B^* + 2)}} - 1.$$

При вышеприведённых предпосылках проблема (S) имеет решение.

Доказательство этой теоремы опирается на теорему Шаудера о постоянной точке.

Далее доказано несколько теорем о существовании решений проблемы (S) при специальных предложениях относительно функций $g(x)$ и $h(y)$, ослабляя взамен того предпосылку 4° и заменяя отчасти условие 2° более общим условием (условие K, глава V) предложенным А. Плисем. В этих доказательствах применяется метод, позволяющий найти решение в целом прямоугольнике R посредством склеивания решений, найденных в частичных, меньших прямоугольниках.

В последней главе даны, легко выводимые из предыдущих, теоремы о существовании решения задачи Гурса для уравнения (1).

