ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XI, 3 SECTIO A 1957

Z Zakładu Matematyki II Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

JAN KISYŃSKI

Sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes classiques relatifs à l'équation $s = F(x, y, z, p, q)$

O istnieniu i jedyności rozwiązań zagadnień klasycznych dla równania $s = F(x, y, z, p, q)$

О существовании и единственности решений классических задач для уравнения $s = F(x, y, z, p, q)$

Introduction. Les conditions classiques qui assurent l'existence et l'unicité des solutions des problèmes classiques relatifs à l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

sont bien connues; ce sont la continuité de la fonction $F(x, y, z, p, q)$ qui figure au second membre et la condition de Lipschitz à constante universelle, vérifiée par cette fonction par rapport à z, p et q. Ces conditions permettent l'application de la méthode des approximations successives de Picard (cf., par exemple, [4], pp. 317—323), et aussi [5]).

Hartman et Wintner [7] ont démontré en 1952 que la condition de Lipschitz à constante universelle, vérifiée seulement par rapport à p et q, jointe *à* la continuité de la fonction $F(x, y, z, p, q)$, entraînent l'existence d'une solution du problème de Darboux relatif à l'équation (1), mais, comme le montre un exemple convenable, elle n'assure pas l'unicité de la solution. Un autre exemple donné par ces auteurs montre que, pour assurer l'existence même des solutions des problèmes classiques relatifs à l'équation (1), il faut imposer à la fonction $F(x, y, z, p, q)$, par rapport à p et q, des conditions plus fortes que la continuité, semblables à celles que l'on impose à la fonction $F(x, y)$ par rapport à y afin d'assurer l'unicité des solutions de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

avec une valeur initiale donnée. Dans le travail de Hartman et Wintner une condition de ce genre est la condition de Lipschitz.

En 1955 Mlle Z. Szmydt [10] a considérablement généralisé les résultats de Hartman et Wintner. Dans les théorèmes qu'elle a établi sur l'existence des solutions de l'équation (1) pour deux problèmes très généraux comprenant les problèmes classiques de Cauchy, Darboux et Picard, la condition de Lipschitz par rapport à p et q est remplacée par une condition qui ressemble au critère de comparaison de Kamke dans la théorie des équations différentelles ordinaires.

Un travail ultérieur de Mlle Szmydt [11], paru en 1956, contient des résultats relatifs à l'existence d'une solution d'un problème encore plus général que les deux précédents, que l'on peut considérer comme une généralisation du problème classique de Goursat, dans le cas où la fonction $F(x, y, z, p, q)$ satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à p et q, ainsi que des résultats concernant l'unicité de cette solution dans le cas où $F(x, y, z, p, q)$ satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à z, p et q.

En rapport avec ces résultats on peut se poser la question à savoir s'il serait possible, tout en renonçant à la possibilité de l'application de la méthode des approximations successives, de remplacer la condition de Lipschitz par rapport à z, p et q par une autre condition plus générale, portant aussi sur ces trois variables, qui assurerait en même temps l'existence et l'unicité des problèmes classiques pour l'équation (1).

La réponse est affirmative. En effet, je montre dans ce travail que la condition de Lipschitz par rapport aux variables z, p et q peut être remplacée par une condition qui correspond au critère d'unicité d'Osgood pour les équations différentielles ordinaires. Appliquant cette condition, j'étudie le problème de Cauchy, généralisé de telle manière qu'il comprend comme cas particulier celui de Darboux, ainsi que le problème de Goursat formulé de telle manière que les problèmes de Darboux et de Picard y sont compris comme cas particuliers.

Bien que leurs sujets soient sensiblement apparentés, notre travail diffère notablement de celui de Mlle Szmydt en ce qui concerne la position des problèmes. Ce qui est essentiel ici, ce sont le domaine dans lequel les solutions sont recherchées et l'allure, par rapport à celui-ci, des courbes sur lesquelles les conditions aux limites ou initiales sont données. C'est pourquoi, par exemple, le problème de Goursat tel qu'il est étudié ici ne peut être ramené aux résultats de Mlle Szmydt. Au contraire, en ce qui concerne l'existence d'une solution du problème de Cauchy, elle est une conséquence d'un des théorèmes de Mlle Szmydt ([10], théorème 1); toutefois, si l'on veut obtenir la solution dans un domaine arbitrairement grand, il faut la rapiécer, alors que la démonstration donnée ici n'exige pas un tel procédé.

Les démonstrations des théorèmes sur l'existence des solutions données dans ce travail s'appuient sur le théorème de Schauder relatif au point fixe [9], comme le fait Mlle Szmydt. Hartman et Wintner [7], ainsi que Alexiewicz et Orlicz [1] démontrent les théorèmes sur l'existence des solutions de l'équation (1) par des méthodes plus élémentaires basées sur le théorème d'Arzela. Leurs résultats ne se rapportent pourtant pas au problème de Goursat. La démonstration de l'existence d'une solution de ce problème que nous exposons ici exige de nombreuses et pénibles limitations, mais il semble douteux qu'il soit possible de les éviter en appliquant des méthodes plus élémentaires.

En ce qui concerne le rapport de ce travail à celui de Goursat [5], il est à remarquer que les résultats obtenus par cet auteur concernent l'équation dont le second membre satisfait à la condition classique de Lipschitz, les courbes le long desquelles sont données les valeurs de la solution n'étant tangentes ni à elles-mêmes, ni aux caractéristiques. Goursat considérait d'abord localement de simples cas particuliers, généralisant ensuite le résultat en appliquant des transformations convenables et les procédés connus consistant à rapiécer les solutions obtenues dans de petits domaines partiels. Dans notre travail, au contraire, le raisonnement sera plus direct et il se rapportera d'emblée au problème plus général, non local et concernant, en particulier, le cas singulier où les deux courbes dont il vient d'être question sont tangentes.

Ce travail est partagé en 8 chapitres. Le premier contient un énoncé des théorèmes sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes de Cauchy et de Goursat. Dans le second, ces problèmes sont ramenés à certaines équations fonctionnelles; dans le cas du problème de Goursat nous utilisons les résultats du travail [3]. Dans le troisième chapitre nous établissons, en profitant encore des résultats du travail [3], certaines propriétés des solutions du problème de Goursat relatif à l'équation

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\, \partial y} = s(x,y),$$

que nous utiliserons dans les considérations sur le problème de Goursat relatif à l'équation (1). Le quatrième chapitre contient un théorème sur la résolution d'une inégalité intégrale pour une fonction de deux variables, ainsi que les démonstrations simples, basées sur ce théorème, de l'unicité des problèmes de Cauchy et de Goursat. Le cinquième est consacré à la démonstration de l'existence d'une solution du problème de Cauchy. Certaines limitations intervenant dans cette démonstration, ainsi qui les résultats du quatrième chapitre sont utilisés dans le sixième; on y trouvera une preuve de l'existence d'une solution du problème de Goursat, précédée de quelques lemmes que l'on mettra à profit dans cette preuve. Dans le septième chapitre nous considérons quelques exemples. Enfin, dans le huitième nous étudions sommairement le cas où le second membre de l'équation satisfait à la condition de Lipschitz.

1. Enoncé des théorèmes

Une fonction de deux variables sera dite de classe $C^{(*)}$ dans un ensemble donné Z si elle peut être prolongée sur un ensemble ouvert $G \supset Z$ de telle manière qu'elle ait dans l'ensemble G des dérivées partielles du premier ordre continues et une dérivée mixte du second ordre continue.

I. Problème de Goursat. Nous admettons les hypothèses suivantes (cf. [3], p. 101, p. 110 et p. 109):

(H_1) La fonction $y = g(x)$, de classe $C^{(1)}$, non décroissante dans l'intervalle $[0, a]$, et la fonction $x = h(y)$, de classe $C^{(1)}$, non décroissante dans l'intervalle $[0, b]$, remplissent les conditions:

$$0 \leqslant g(x) \leqslant b \quad \text{pour} \quad x \in [0, a],$$

$$0 \leqslant h(y) \leqslant a \quad \text{pour} \quad y \in [0, b],$$

$$\text{si } g(x) = y \quad \text{et} \quad h(y) = x, \quad \text{alors} \quad x = y = 0.$$

Nous admettons que toutes les fonctions $(d/dx)\lambda^i(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, où $\lambda^0(x) = x$, $\lambda^{i+1}(x) = (h(g(\lambda^i(x)))$, sont bornées dans leur ensemble dans l'intervalle $[0, a]$, ou que toutes les fonctions $(d/dy)\mu^i(y)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, où $\mu^0(y) = y$, $\mu^{i+1}(y) = g(h(\mu^i(y)))$, sont bornées dans leur ensemble dans l'intervalle $[0, b]$*).

*) Cette condition est remplie, par exemple, quand il existe un nombre ε, $0 < \varepsilon \leqslant \min(a, b)$, tel que l'une des inégalités

$$\frac{d}{dx}[h(g(x))] \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad x \in [0, \varepsilon]$$

ou

$$\frac{d}{dy}[g(h(y))] \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad y \in [0, \varepsilon],$$

est remplie; donc, en particulier, lorsque $g'(0) \cdot h'(0) < 1$, c'est-à-dire lorsque les tangentes aux courbes $y = g(x)$ et $x = h(y)$ au point $(0, 0)$ sont distinctes, comme l'a supposé Goursat [5].

(K₁) Nous supposons donnée une fonction $\chi(x, y)$, de classe $C^{(1)}$ dans l'ensemble Δ défini par les inégalités

$$(\Delta) \qquad \begin{aligned} g(x) &\leqslant y \leqslant b, \\ h(y) &\leqslant x \leqslant a; \end{aligned}$$

les dérivées de cette fonction satisfont dans l'ensemble Δ aux conditions de Lipschitz

$$\begin{aligned} |\chi_x(x, y) - \chi_x(x, \bar{y})| &\leqslant K|y - \bar{y}|, \\ |\chi_y(x, y) - \chi_y(\bar{x}, y)| &\leqslant K|x - \bar{x}|. \end{aligned}$$

Enfin nous supposons donnée une fonction continue $F(x, y, z, p, q)$, définie pour des valeurs arbitraires de z, p et q et pour $(x, y) \in \Delta$.

Dans ces hypothèses il s'agit de déterminer une fonction $z(x, y)$, de classe $C^{(*)}$ dans l'ensemble Δ, vérifiant l'équation (1) et les conditions

$$(2) \qquad \begin{aligned} z(x, g(x)) &= \chi(x, g(x)) \quad \text{pour} \quad x \in [0, a], \\ z(h(y), y) &= \chi(h(y), y) \quad \text{pour} \quad y \in [0, b]. \end{aligned}$$

II. Problème de Cauchy*). Soit une fonction $y = g(x)$, continue dans l'intervalle $[0, a]$ et une fonction $x = h(y)$, continue dans l'intervalle $[0, b]$. Supposons qu'il existe un $a^* \in [0, a]$ et un $b^* \in [0, b]$ tels que $g(x) = 0$ pour $x \in [a^*, a]$ et $h(y) = 0$ pour $y \in [b^*, b]$, que la fonction $g(x)$ soit strictement décroissante de b^* à zéro dans l'intervalle $[0, a^*]$ et que la fonction inverse de $g(x)$ dans l'intervalle $[0, a^*]$ soit identique à la fonction $h(y)$ considérée dans l'intervalle $[0, b^*]$.

Soit une fonction $\sigma(x)$, continue dans l'intervalle $[0, a]$, et une fonction $\tau(y)$, continue dans l'intervalle $[0, b]$. Soient encore deux nombres x_0 et y_0 tels que $x_0 \in [0, a]$, $y_0 \in [0, b]$ et $x_0 = h(y)$ ou bien $y_0 = g(x_0)$, et un nombre arbitraire z_0.

Enfin, soit une fonction continue $F(x, y, z, p, q)$ définie pour z, p, q arbitraires et pour $(x, y) \in \Delta$, où Δ est l'ensemble déterminé par les inégalités

$$(\Delta) \qquad \begin{aligned} g(x) &\leqslant y \leqslant b, \\ h(y) &\leqslant x \leqslant a. \end{aligned}$$

*) Cet énoncé du problème de Cauchy, un peu plus général que l'énoncé usuel, est dû à M. A. Bielecki; ainsi formulé, il comprend comme cas particulier le problème de Darboux, ce qui est avantageux pour les calculs que nous allons effectuer.

Le problème consiste à déterminer une fonction $z(x, y)$, de classe $C^{(*)}$ dans l'ensemble Δ, satisfaisant à l'équation (1) et aux conditions

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, g(x)) = \sigma(x) \quad \text{pour} \quad x \in [0, a],$$

(3)

$$\frac{\partial z}{\partial y}(h(y), y) = \tau(y) \quad \text{pour} \quad y \in [0, b],$$

$$z(x_0, y_0) = z_0.$$

Théorème 1. *Le problème I a exactement une solution si la fonction $F(x, y, z, p, q)$, définie et continue dans l'ensemble*

$$\Pi = \underset{(x,y,z,p,q)}{E} \{(x, y) \in \Delta; -\infty < z, p, q < +\infty\},$$

satisfait dans cet ensemble à la condition

(4) $\quad |F(x, y, z, p, q) - F(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \omega(|z - \bar{z}| + |p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|),$

où $\omega(\delta)$ est une fonction continue et faiblement croissante, définie pour $\delta \geqslant 0$, telle que $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ si $\delta > 0$ et que l'intégrale

$$\int_0^\delta \frac{dt}{\omega(t)}$$

soit divergente dans un voisinage droit arbitraire de zéro.

L'existence seule d'une solution, sans l'unicité, est assurée par les conditions

(5) $\quad |F(x, y, z, p, q) - F(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \omega(|p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|)$

et

(6) $\quad |F(x, y, z, 0)| \leqslant A + B|z|,$

où la fonction $\omega(\delta)$ remplit les mêmes conditions que précédemment et A, B sont des constantes arbitraires.

Théorème 2. *Le problème II a exactement une solution si la fonction $F(x, y, z, p, q)$, définie et continue dans l'ensemble Π satisfait à la condition* (4), *l'ensemble Π étant défini comme dans le théorème* 1 *et la fonction $\omega(\delta)$ ayant les mêmes propriétés que précédemment.*

L'existence seule d'une solution, sans l'unicité, est assurée par les conditions (5) *et* (6) *).

---

* Dans la partie du théorème relative à l'existence d'une solution, la condition (5) peut être remplacée par la condition plus générale énoncée par Mlle Szmydt [10], hypothèse K. Nous ignorons s'il est possible de le faire dans le théorème 1.

2. Réduction des problèmes I et II à des équations fonctionnelles sans conditions supplémentaires

Nous étudierons d'abord le problème II, plus facile. Les conditions (3) de ce problème se ramènent aisément aux suivantes:

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial x}(x, g(x)) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in [0, a], \\ &\frac{\partial z}{\partial y}(h(y), y) = 0 \quad \text{pour} \quad y \in [0, b], \\ &z(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

Cela résulte, d'une façon bien connue, de la remarque suivante: si la fonction $z_1(x, y)$, de classe $C^{(*)}$ dans l'ensemble Δ, vérifie l'équation

$$(8)\qquad \frac{\partial^2 z_1(x, y)}{\partial x\, \partial y} = F_1\left(x, y, z_1(x, y), \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial y}\right),$$

où

$$F_1(x, y, z, p, q) = F\left(x, y, z + \int_{x_0}^{x} \sigma(t)\, dt + \int_{y_0}^{y} \tau(t) dt + z_0, p + \sigma(x), q + \tau(y)\right),$$

et si elle satisfait aux conditions

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial z_1}{\partial x}(x, g(x)) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in [0, a], \\ &\frac{\partial z_1}{\partial y}(h, (y), y) = 0 \quad \text{pour} \quad y \in [0, b], \\ &z_1(x_0, y_0) = 0, \end{aligned}$$

alors la fonction $z(x, y)$, de classe $C^{(*)}$ dans l'ensemble Δ définie par la formule

$$z(x, y) = z_1(x, y) + \int_{x_0}^{x} \sigma(t)\, dt + \int_{y_0}^{y} \tau(t)\, dt + z_0,$$

satisfait à l'équation (1) et aux conditions (3).

Inversement, si la fonction $z(x, y)$, de classe $C^{(*)}$ dans l'ensemble Δ, satisfait à l'équation (1) et aux conditions (3), alors la fonction $z_1(x, y)$, de classe $C^{(*)}$ dans l'ensemble Δ, définie par la formule

$$z_1(x, y) = z(x, y) - \int_{x_0}^{x} \sigma(t)\, dt - \int_{y_0}^{y} \tau(t)\, dt - z_0,$$

vérifie l'équation (8) et les conditions (9).

De plus, si la fonction $F(x, y, z, p, q)$ satisfait aux hypothèses (4) ou (5) et (6), alors la fonction $F_1(x, y, z, p, q)$ les vérifie aussi.

En profitant de cette remarque nous pourrons, sans nuire à la généralité, nous borner à l'étude du problème II sous les conditions (7).

Si $z(x, y)$ est une solution du problème II sous les conditions (7), alors pour la fonction $s(x, y)$ continue dans l'ensemble Δ et définie par la formule $s(x, y) = \partial^2 z(x, y)/\partial x \partial y$, on a

$$z(x, y) = \int_{h(y)}^{x} \left\{ \int_{g(u)}^{y} s(u, v)\, dv \right\} du = \int_{g(x)}^{y} \left\{ \int_{h(v)}^{x} s(u, v)\, du \right\} dv,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \int_{g(x)}^{y} s(x, v)\, dv, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \int_{h(y)}^{x} s(u, y)\, du,$$

par conséquent la fonction $s(x, y)$ vérifie l'équation

$$(10) \qquad s(x, y) = F\left(x, y, \int_{g(x)}^{y} \left\{ \int_{h(v)}^{x} s(v, v)\, du \right\} dv, \int_{g(x)}^{y} s(x, v)\, dv, \int_{h(y)}^{x} s(u, y)\, du\right).$$

Inversement, si la fonction $s(x, y)$, continue dans l'ensemble Δ, vérifie l'équation (10), la fonction correspondante $z(x, y)$, déterminée par la formule que nous venons d'écrire, est une fonction de classe $C^{(*)}$. En effet, la fonction $s(x, y)$, étant définie sur l'ensemble compact Δ, peut être prolongée au déjà de celui-ci d'une façon continue et, si l'on admet que $g(x) = b^*$ pour $x < 0$ et $h(y) = a^*$ pour $y < 0$, ainsi que $g(x) = 0$ pour $x > a$ et $h(y) = 0$ pour $y > b$, la formule en question sera valable dans un voisinage de l'ensemble Δ. Donc, elle définira un prolongement de la fonction $z(x, y)$ ayant la régularité demandée. Il est évident que la fonction $z(x, y)$ ainsi définie sera une solution du problème II sous les condition (7). Par conséquent, la résolution du problème II sous les conditions (7) est équivalente à celle de l'équation (10) pour les fonctions $s(x, y)$ continues dans l'ensemble Δ *).

Dans le cas du problème I cette réduction n'est plus aussi simple. Nous profiterons ici de certains résultats exposés dans un autre travail

*) La méthode qui consiste à introduire des intégrales dans la fonction $F(x, y, z, p, q)$ a été déjà appliquée par Schauder. Pourtant la plupart des auteurs applique une autre méthode de réduction où l'on introduit une intégrale double en dehors de la fonction $F(x, y, z, p, q)$ en laissant à l'intérieur de celle-ci les dérivées $\partial z/\partial x$ et $\partial z/\partial y$ [1], [4], [7], [10], [11].

du volume précédent: moyennant les hypothèses (H_1) et (K_1) le système d'équations aux fonctions inconues $G(x)$ et $H(y)$

$$
(11) \qquad \begin{aligned} G(x) + H(g(x)) &= \chi(x, g(x)) \quad \text{pour} \quad x \in |0, a|, \\ H(y) + g(h(y)) &= \chi(h(y), y) \quad \text{pour} \quad y \in |0, b|, \end{aligned}
$$

a une solution de classe $C^{(1)}$ **).

En s'appuyant sur ce résultat il est facile de ramener le problème I avec les conditions (2) au même problème avec les conditions

$$
(12) \qquad \begin{aligned} z(x, g(x)) &= 0 \quad \text{pour} \quad x \in |0, a|, \\ z(h(y), y) &= 0 \quad \text{pour} \quad y \in |0, b|. \end{aligned}
$$

En effet, soit $z_2(x, y)$ une fonction de classe $C^{(*)}$ dans l'ensemble Δ, vérifiant l'équation

$$
(13) \qquad \frac{\partial^2 z_2(x, y)}{\partial x\, \partial y} = F_2\left(x, y, z_2(x, y), \frac{\partial z_2(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z_2(x, y)}{\partial y}\right),
$$

où

$$
F_2(x, y, z, p, q) = F(x, y, z + G(x) + H(y), p + G'(x), q + H'(y)),
$$

et les conditions

$$
(14) \qquad \begin{aligned} z_2(x, g(x)) &= 0 \quad \text{pour} \quad x \in |0, a|, \\ z_2(h(y), y) &= 0 \quad \text{pour} \quad y \in |0, b|. \end{aligned}
$$

Alors la fonction

$$
z(x, y) = z_2(x, y) + G(x) + H(y),
$$

de classe $C^{(*)}$ dans l'ensemble Δ, vérifie l'équation (1) et les conditions (2).

Inversement, si la fonction $z(x, y)$, de classe $C^{(*)}$ dans l'ensemble Δ, satisfait à l'équation (1) et aux conditions (2), alors la fonction

$$
z_2(x, y) = z(x, y) - G(x) - H(y),
$$

de classe $C^{(*)}$ dans l'ensemble Δ, vérifie l'équation (13) et les conditions (14).

Si, de plus, la fonction $F(x, y, z, p, q)$ vérifie les hypothèses (4) ou bien les hypothèses (5) et (6), alors il en est de même de la fonction $F_2(x, y, z, p, q)$.

Nous nous bornerons donc, dans la suite, à l'étude du problème I avec les conditions limites (12). De même que dans le cas du problème II, nous ramènerons ce problème à une équation fonctionnelle sans conditions supplémentaires.

**) Cf. [3], p. 115, théorème 4. La fonction $H(y)+G(x)$ est alors définie univoquement ce qui, d'ailleurs, n'est pas essentiel dans notre cas.

Soit $z(x, y)$ une solution du problème I sous les conditions (12) et soit $s(x, y)$ une fonction continue sur le plan xy tout entier et telle que

$$s(x, y) = \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x\, \partial y} \quad \text{dans } \Delta.$$

Admettons, en outre, que

$$\Delta_{x,y} = \mathop{E}_{(u,v)} \{h(v) \leqslant u \leqslant x, g(u) \leqslant v \leqslant y\}.$$

Nous constatons sans peine que

$$U(x, y) = \iint_{\Delta_{x,y}} s(u, v)\, du\, dv =$$

$$= \int_0^x \left\{ \int_0^y s(u, v)\, dv \right\} du - \int_0^x \left\{ \int_0^{g(u)} s(u, v)\, dv \right\} du - \int_0^y \left\{ \int_0^{h(v)} s(u, v)\, du \right\} dv,$$

d'où

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \int_{g(x)}^{y} s(x, v)\, dv, \qquad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \int_{h(y)}^{x} s(u, y)\, du$$

et

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y\, \partial x} = s(x, y).$$

Il en résulte que la fonction

$$z(x, y) - \iint_{\Delta_{x,y}} s(u, v)\, du\, dv,$$

est de classe $C^{(*)}$ dans Δ, car les fonctions $g(x)$ et $h(y)$ peuvent être prolongées d'une façon continue au délà des intervalles fermés $[0, a]$ et $[0, b]$. On a évidemment

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \left[z(x, y) - \iint_{\Delta_{x,y}} s(u, v)\, du\, dv \right] = 0,$$

dans l'ensemble Δ. L'ensemble Δ étant normal par rapport aux deux axes du système Oxy, nous avons

$$z(x, y) - U(x, y) = V(x) + W(y),$$

où les fonctions $V(x)$ et $W(y)$ sont de classe $C^{(1)}$ pour $x \epsilon [0, a]$ et $y \epsilon [0, b]$. En vertu de la condition (12), le système d'équations

$$\text{(15)} \qquad \begin{aligned} V(x) + W(g(x)) &= -U(x, g(x)) \quad \text{pour} \quad x \epsilon [0, a], \\ W(y) + V(h(y)) &= -U(h(y), y \quad \text{pour} \quad y \epsilon [0, b] \end{aligned}$$

est vérifié. La fonction $U(x, y)$ étant de classe $C^{(*)}$ dans le domaine Δ, le système d'équations (15) a une solution $\{W(x)+c, V(y)-c\}$ de classe $C^{(1)}$ déterminé à une constante c près (Cf. [3], théorème 4).

On voit donc que la solution $z(x, y)$ du problème I sous les conditions (12) s'exprime par sa dérivée $s(x, y)$ univoquement au moyen de la formule

$$z(x,y)=\Theta_s(x,y)=\int\int_{\Delta_{x,y}} s(u,v)\,du\,dv+V(x)+W(y), \tag{16}$$

où les fonctions $V(x)$ et $W(y)$ constituent une solution du système d'équations (15).

Dès lors, il est évident que le problème I (résolution de l'équation (1) avec les conditions aux limites (12)) est équivalent à celui de la résolution, en termes de fonctions $s(x, y)$ continues dans l'ensemble Δ, de l'équation fonctionnelle

$$s(x,y)=F\left((x,y,\Theta_s(x,y),\frac{\partial}{\partial x}\Theta_s(x,y),\frac{\partial}{\partial y}\Theta_s(x,y)\right). \tag{17}$$

Dans la suite, nous n'étudierons plus que les équations fonctionnelles (10) et (17).

3. Les fonctions $\Theta_s(x,y)$, $d/dx\,\Theta_s(x,y)$, $d/dy\,\Theta_s(x,y)$ et leurs propriétés

Puisque $V(0)+W(0)=0$, on peut admettre que $V(0)=0=W(0)$ et il résulte alors des équations (15) que l'on a *)

$$V(x)=-\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\int\int_{\Delta_{\lambda^i(x),g(\lambda^i(x))}} s(u,v)\,du\,dv-\int\int_{\Delta_{\lambda^{i+1}(x),g(\lambda^i(x))}} s(u,v)\,du\,dv\right\}=$$

$$=-\sum_{i=0}^{\infty}\int_{\lambda^{i+1}(x)}^{\lambda^i(x)}\left\{\int_{g(u)}^{g(\lambda^i(x))} s(u,v)\,dv\right\}du,$$

où

$$\lambda^0(x)=x,\quad \lambda^{i+1}(x)=h(g(\lambda^i(x))),\qquad i=0,1,2,\ldots,$$

et

$$W(y)=-\sum_{i=0}^{\infty}\int_{\mu^{i+1}(y)}^{\mu^i(y)}\left\{\int_{h(v)}^{h(\mu^i(y))} s(u,v)\,du\right\}dv,$$

où

$$\mu^0(y)=y,\quad \mu^{i+1}(y)=g(h(\mu^i(y))),\qquad i=0,1,2,\ldots,$$

les séries figurant dans ces formules ainsi que celles qui s'en obtiennent en les dérivant terme à terme étant uniformément convergentes.

*) [3], théorème 4, p. 115.

De là, en posant

$$x_{2i} = \lambda^i(x), \quad y_{2i} = \mu^i(y), \quad x_{2i+1} = h(\mu^i(y)), \quad y_{2i+1} = g(\lambda^i(x)),$$

pour $i = 0, 1, 2, \ldots$, nous obtenons en vertu de la formule (16) (cf. [6], t. III, p. 123)

$$\Theta_s(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \int_{x_{i+1}}^{x_i} \int_{y_{i+1}}^{y_i} s(u, v)\, dv\, du,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Theta_s(x, y) = \int_{g(x)}^{y} s(x, v)\, dv + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dx}\lambda^{i+1}(x)\right) \cdot \int_{g(\lambda^{i+1}(x))}^{g(\lambda^i(x))} s(\lambda^{i+1}(x), v)\, dv -$$

$$- \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} g(\lambda^i(x))\right) \cdot \int_{\lambda^{i+1}(x)}^{\lambda^i(x)} s(u, g(\lambda^i(x)))\, du,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Theta_s(x, y) = \int_{h(y)}^{x} s(u, y)\, du + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dy}\mu^{i+1}(y)\right) \cdot \int_{h(\mu^{i+1}(y))}^{h(\mu^i(y))} s(u, \mu^{i+1}(y))\, du -$$

$$- \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dy} h(\mu^i(y))\right) \cdot \int_{\mu^{i+1}(y)}^{\mu^i(y)} s(h(\mu^i(y)), v)\, dv.$$

Les fonctions

$$\frac{d}{dx}\lambda^i(x) = \frac{d}{dx}[h(\mu^{i-1}(g(x)))], \quad i = 1, 2, \ldots, \text{ dans l'intervalle } [0, a],$$

et

$$\frac{d}{dy}\mu^i(y) = \frac{d}{dy}[g(\lambda^{i-1}(h(y)))], \quad i = 1, 2, \ldots, \text{ dans l'intervalle } [0, b],$$

sont bornées dans leur ensemble, donc les fonctions

$$\frac{d}{dx}\lambda^i(x), \qquad \frac{d}{dx}g(\lambda^i(x)), \qquad \frac{d}{dy}\mu^i(y), \qquad \frac{d}{dy}h(\mu^i(y)),$$

$i = 0, 1, 2, \ldots$, $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, le sont aussi. Désignons par L une constante entière positive limitant supérieurement leurs modules (donc $L \geqslant 1$).

Puisque les suites

$$\{\lambda^i(x)\}, \quad \{g(\lambda^i(x))\}, \quad \{\mu^i(y)\} \quad \text{et} \quad \{h(\mu^i(y))\},$$

sont faiblement décroissantes *) pour tout x ou y fixé, on a évidemment:

*) Cf. [3], lemme 2, p. 104.

Lemme 1. Si $s_1(x, y)$ et $s_2(x, y)$ sont des fonctions continues dans Δ et si $\varrho(x, y)$ est une fonction continue dans le rectangle

(D) $$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b,$$

définie par la formule

$$\varrho(x, y) = \max_{(u,v) \in \Delta_{x,y}} |s_1(u, v) - s_2(u, v)|,$$

où

$$\Delta_{x,y} = \underset{(u,v)}{E} \{h(v) \leqslant u \leqslant x, g(u) \leqslant v \leqslant y\},$$

alors

$$|\Theta_{s_1}(x,y) - \Theta_{s_2}(x,y)| \leqslant \int_0^x \int_0^y \varrho(u,v)\,dv\,du \leqslant \frac{x}{2}\int_0^y \varrho(x,v)\,dv + \frac{y}{2}\int_0^x \varrho(u,y)\,du,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\Theta_{s_1}(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\Theta_{s_2}(x,y)\right| \leqslant L\int_0^x \varrho(u, y)\,du + L\int_0^y \varrho(x, v)\,dv,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\Theta_{s_1}(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Theta_{s_2}(x,y)\right| \leqslant L\int_0^x \varrho(u, y)\,du + L\int_0^y \varrho(x, v)\,dv.$$

En posant $s_2(x, y) = 0$ on obtient comme conséquence:

Lemme 2. Si $|s(x, y)| \leqslant \lambda e^{\lambda\cdot(x+y)}$, $\lambda > 0$ **), alors

$$|\Theta_s(x, y)| \leqslant \frac{1}{\lambda} e^{\lambda\cdot(x+y)},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\Theta_s(x, y)\right|, \quad \left|\frac{\partial}{\partial y}\Theta_s(x, y)\right| \leqslant 2L e^{\lambda\cdot(x+y)}.$$

Lemme 3. Si les fonctions $s(x, y)$ sont continues et si elles satisfont à l'inégalité

$$|s(x, y)| \leqslant M,$$

où M est une constante positive arbitraire, toutes les fonctions $\Theta_s(x, y)$ sont équicontinues.

D é m o n s t r a t i o n. Soit ε un nombre positif quelconque. La série

$$\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - x_{i+1}) \cdot (y_i - y_{i+1}),$$

**) Je dois l'idée d'une telle limitation exponentielle à M. A. B i e l e c k i qui l'a proposée dans le cas du problème de C a u c h y.

est uniformément convergente dans le rectangle D, car

$$\sum_{i=n}^{\infty}(x_i - x_{i+1})\cdot(y_i - y_{i+1}) \leqslant x_n \cdot y_n$$

et x_n, y_n tendent vers zéro uniformément par rapport aux x et aux y contenus dans les intervalles $[0, a]$ et $[0, b]$ *). Il existe donc un N tel que

$$\sum_{i=N}^{\infty}(x_i - x_{i+1})\cdot(y_i - y_{i+1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{3\,M}$$

pour tout point $(x, y)\in D$.

Désignons par $\overline{x}_i$ et $\overline{y}_i$ les valeurs les fonctions x_i et y_i pour $x = \overline{x}$ et $\overline{y} = y$. Puisque, pour $|s(x, y)| \leqslant M$, on a

$$\left|\int\limits_{x_{i+1}}^{x_i}\int\limits_{y_{i+1}}^{y_i} s(u, v)\,dv\,du - \int\limits_{\overline{x}_{i+1}}^{\overline{x}_i}\int\limits_{\overline{y}_{i+1}}^{\overline{y}_i} s(u, v)\,dv\,du\right| \leqslant$$

$$\leqslant (|x_i - \overline{x}_i| + |x_{i+1} - \overline{x}_{i+1}|)\cdot M\cdot b + (|y_i - \overline{y}_i| + |y_{i+1} - \overline{y}_{i+1}|)\cdot M\cdot a \leqslant$$

$$\leqslant 2\,L\cdot M\cdot(a+b)\cdot(|x - \overline{x}| + |y - \overline{y}|),$$

on aura, pour

$$|x - \overline{x}| + |y - \overline{y}| \leqslant \frac{\varepsilon}{3\cdot N\cdot 2\,L\cdot M\cdot(a+b)},$$

$$|\Theta_s(x, y) - \Theta_s(\overline{x}, \overline{y})| \leqslant \left|\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i\int\limits_{x_{i+1}}^{x_i}\int\limits_{y_{i+1}}^{y_i} s(u, v)\,dv\,du - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i\int\limits_{\overline{x}_{i+1}}^{\overline{x}_i}\int\limits_{\overline{y}_{i+1}}^{\overline{y}_i} s(u, v)\,dv\,du\right| + \left|\sum_{i=N}^{\infty}(-1)_i\int\limits_{x_{i+1}}^{x_i}\int\limits_{y_{i+1}}^{y_i} s(u, v)\,dv\,du\right| +$$

$$+\left|\sum_{i=N}^{\infty}(-1)^i\int\limits_{\overline{x}_{i+1}}^{\overline{x}_i}\int\limits_{\overline{y}_{i+1}}^{\overline{y}_i} s(u, v)\,dv\,du\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + M\cdot\sum_{i=N}^{\infty}(x_i - x_{i+1})\cdot(y_i - y_{i+1}) +$$

$$+ M\cdot\sum_{i=N}^{\infty}(\overline{x}_i - \overline{x}_{i+1})\cdot(\overline{y}_i - \overline{y}_{i+1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + M\cdot\frac{\varepsilon}{3\,M} + M\cdot\frac{\varepsilon}{3\,M} = \varepsilon,$$

ce qui établit le lemme.

Lemme 4. Pour toute constante positive M il existe une fonction continue $\varepsilon_M(\delta)$, définie pour $\delta \geqslant 0$ et satisfaisant aux conditions

$$\varepsilon_M(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_M(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \varepsilon_M(\delta_1) + \varepsilon_M(\delta_2)$$

*) Cf. [3], lemme 3, p. 104.

telle que, si $s(x, y)$ est une fonction continue dans l'ensemble Δ satisfaisant à l'inégalité $|s(x,y)| \leqslant M$ et si $|x-\overline{x}|+|y-\overline{y}| \leqslant \delta$, on ait

$$|\Theta_s(x,y)-\Theta_s(\overline{x},\overline{y})| \leqslant \varepsilon_M(\delta).$$

D é m o n s t r a t i o n. Admettons que

$$\varepsilon_M(\delta)=\sup|\Theta_s(x,y)-\Theta_s(\overline{x},\overline{y})|,$$

où $(x,y)\in\Delta$, $(\overline{x},\overline{y})\in\Delta$, $|x-\overline{x}|+|y-\overline{y}| \leqslant \delta$ et $s(x,y)$ désigne une fonction continue dans Δ telle que $|s(x,y)|\leqslant M$. On constate aisément, en s'appuyant sur le lemme 3, que la fonction $\varepsilon_M(\delta)$ satisfait bien à l'énoncé.

Lemme 5. Pour toute constante positive M il existe des fonctions $\varepsilon_M^{(i)}(\delta)$, $i=1,2$, continues pour $\delta\geqslant 0$ et satisfaisant aux conditions

$$\varepsilon_M^{(i)}(0)=0, \qquad i=1,2,$$

$$\varepsilon_M^{(i)}(\delta_1+\delta_2) \leqslant \varepsilon_M^{(i)}(\delta_1)+\varepsilon_M^{(i)}(\delta_2), \qquad i=1,2,$$

telles que, si $\varepsilon(x,y,\delta)$ est une fonction continue de trois variables définie pour $(x,y)\in D$ et $\delta\geqslant 0$, faiblement croissante par rapport à chacun de ses arguments, et si $s(x, y)$ est une fonction continue dans l'ensemble Δ telle que

$$|s(x,y)|\leqslant M,$$

$$|s(x,y)-s(\overline{x},\overline{y})| \leqslant \varepsilon(x,y,\delta) \quad \text{pour} \quad |x-\overline{x}|+|y-\overline{y}|\leqslant\delta,$$

on ait

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\Theta_s(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}\Theta_s(\overline{x},\overline{y})\right| \leqslant \varepsilon_M^{(1)}(\delta)+L\int_0^x \varepsilon(u,y,L\delta)\,du+L\int_0^y \varepsilon(x,v,L\delta)\,du,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\Theta_s(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\Theta_s(\overline{x},\overline{y})\right| \leqslant \varepsilon_M^{(2)}(\delta)+L\int_0^x \varepsilon(u,y,L\delta)\,du+L\int_0^y \varepsilon(x,v,L\delta)\,du,$$

pour $|x-\overline{x}|+|y-\overline{y}|\leqslant\delta$.

D é m o n s t r a t i o n. Nous n'établirons que l'existence de la fonction $\varepsilon_M^{(1)}(\delta)$. Celle de la fonction $\varepsilon_M^{(2)}(\delta)$ se démontre d'une manière analogue.

Admettons les notations

$$\sum_s^{(1)}(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}\lambda^{i+1}(x)\right)\cdot\int_{g(\lambda^{i+1}(x))}^{g(\lambda^i(x))} s(\lambda^{i+1}(t),v)\,dv,$$

$$\sum_s^{(2)}(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}g(\lambda^i(x))\right)\cdot\int_{\lambda^{i+1}(x)}^{\lambda^i(x)} s(u,g(\lambda^i(t)))\,du.$$

Soit ε un nombre positif quelconque et désignons par N un nombre naturel tel que

$$g(\lambda^N(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3\,ML} \quad \text{pour} \quad x \in [0, a].$$

Soit δ un nombre positif tel que

$$2\,L^2 MN\delta + \sum_{i=0}^{N-1} M\cdot b\cdot \left|\frac{d}{dx}\lambda^{i+1}(x) - \frac{d}{dx}\lambda^{i+1}(\overline{x})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

pour $|x-\overline{x}| \leqslant \delta$ (l'existence de ce nombre est assurée par la continuité des fonctions $d\lambda^i(x)/dx$). Puisque, pour $|s(x,y)| \leqslant M$, on a

$$\left|\left(\frac{d}{dx}\lambda^{i+1}(x)\right)\cdot \int_{g(\lambda^{i+1}(x))}^{g(\lambda^i(x))} s(\lambda^{i+1}(t), v)\,dv - \left(\frac{d}{dx}\lambda^{i+1}(x)\right)\Bigg|_{x=\overline{x}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot \int_{g(\lambda^{i+1}(\overline{x}))}^{g(\lambda^i(\overline{x}))} s(\lambda^{i+1}(t), v)\,dv\right| \leqslant \left|\frac{d}{du}\lambda^{i+1}(u)\Big|_{\overline{x}}^{x}\right|\cdot M\cdot b + L\cdot M\cdot$$

$$\cdot\{|g(\lambda^i(x)) - g(\lambda^i(\overline{x}))| + |g(\lambda^{i+1}(x)) - g(\lambda^{i+1}(\overline{x}))|\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\cdot L^2\cdot M\cdot|x-\overline{x}| + M\cdot b\cdot\left|\frac{d}{du}\lambda^{i+1}(u)\Big|_{\overline{x}}^{x}\right|,$$

on obtient pour $|x-\overline{x}| \leqslant \delta$ l'inégalité

$$\left|\sum_s^{(1)}(x,t) - \sum_s^{(1)}(\overline{x},t)\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, a].$$

Donc, si les fonctions $s(x,y)$ satisfont à l'inégalité $|s(x,y)| \leqslant M$, les fonctions $\sum\limits_s^{(1)}(x,t)$ sont équicontinues par rapport à x.

Pour les fonctions $\sum\limits_s^{(2)}(x,t)$ la démonstration est la même. Or

$$\frac{\partial}{\partial x}\Theta_s(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\Theta_s(\overline{x},\overline{y}) = \int_{g(x)}^{y}\{s(x,v) - s(\overline{x},v)\}\,dv +$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}\lambda^{i+1}(x)\right)\cdot\int_{g(\lambda^{i+1}(x))}^{g(\lambda^i(x))}\{s(\lambda^{i+1}(x), v) - s(\lambda^{i+1}(\overline{x}), v)\}\,dv +$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}g(\lambda^i(x))\right)\cdot\int_{\lambda^{i+1}(x)}^{\lambda^i(x)}\{s(u, g(\lambda^i(\overline{x})) - s(u, g(\lambda^i(x)))\}\,du +$$

$$+\int_{g(x)}^{g(\overline{x})} s(\overline{x},v)\,dv + \int_{\overline{y}}^{y} s(\overline{x},v)\,du + \sum_s^{(1)}(x,\overline{x}) - \sum_s^{(1)}(\overline{x},\overline{x}) + \sum_s^{(2)}(\overline{x},\overline{x}) - \sum_s^{(2)}(x,\overline{x});$$

on a donc pour $|x-\overline{x}|+|y-\overline{y}|\leqslant\delta$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\Theta_s(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}\Theta_s(\overline{x},\overline{y})\right|\leqslant L\int\limits_0^y \varepsilon(x,v,L\delta)\,dv+L\int\limits_0^x \varepsilon(u,x,L\delta)\,du+$$

$$+L\cdot M\cdot|x-\overline{x}|+M\cdot|y-\overline{y}|+\sum_{i=1}^{2}\left|\sum_s^{(i)}(x,\overline{x})-\sum_s^{(i)}(\overline{x},\overline{x})\right|.$$

On pose

$$\varepsilon_M^{(1,i)}(\delta)=\sup\left|\sum_s^{(i)}(x,t)-\sum_s^{(i)}(\overline{x},t)\right|,$$

où $x,\overline{x},t\in[0,a]$, $|x-\overline{x}|\leqslant\delta$ et $s(x,y)$ désigne une fonction continue dans Δ telle que $|s(x,y)|\leqslant M$,

$$\varepsilon_M^{(1)}(\delta)=(L+1)\cdot M\cdot\delta+\varepsilon_M^{(1,1)}(\delta)+\varepsilon_M^{(1,2)}(\delta)$$

et la démonstration est achevée.

4. Unicité des solutions

Théorème 3. *Si la fonction $r(x,y)$, continue dans le rectangle D*

$$0\leqslant x\leqslant a,\qquad 0\leqslant y\leqslant b,$$

y satisfait à l'inégalité

$$0\leqslant r(x,y)\leqslant\varkappa\left(\int\limits_0^x r(u,y)\,du+\int\limits_0^y r(x,v)\,dv\right),$$

où $\varkappa(\delta)$ est une fonction continue pour $\delta\geqslant 0$, faiblement croissante et telle que $\varkappa(0)=0$, $\varkappa(\delta)>0$ pour $\delta>0$, et si l'intégrale généralisée

$$\int\limits_0^\delta\frac{dt}{\varkappa(t)}$$

est divergente dans un voisinage droit arbitraire de zéro, alors $r(x,y)\equiv 0$ dans le rectangle D.

Démonstration*). Soit

$$R(t)=\max_{\substack{(x,y)\in D\\ x+y\leqslant t}} r(x,y).$$

Pour établir le lemme il suffit de montrer que $R(t)=0$. La fonction $R(t)$

*) Dans cette démonstration jśai utilisé certaines suggestions, dues à M. A. Bielecki, qui m'ont permis d'abréger la démonstration primitive.

est continue, faiblement croissante, $R(t) \geqslant 0$ et $r(x, y) \leqslant R(x+y)$. Si $(x, y) \in D$, $x+y \leqslant t$, alors

$$r(x, y) \leqslant \varkappa\left(\int_0^x R(u+y)\,du + \int_0^y R(x+v)\,dv\right) =$$

$$= \varkappa\left(\int_y^{x+y} R(\tau)\,d\tau + \int_x^{x+y} R(\tau)\,d\tau\right) \leqslant \varkappa\left(2\int_0^t R(\tau)\,d\tau\right),$$

d'où

$$R(t) \leqslant \varkappa\left(2\int_0^t R(\tau)\,d\tau\right).$$

Supposons $R(t_1) > 0$. On a donc nécessairement $t_1 > 0$. Désignons par t_0 le plus grand nombre positif t tel que $R(u) = 0$ pour $0 \leqslant u \leqslant t$. Alors

$$\int_0^{t_0} R(\tau)\,d\tau = 0, \qquad \int_0^t R(\tau)\,d\tau > 0 \quad \text{pour} \quad t > t_0,$$

donc

$$\varkappa\left(2\int_0^t R(\tau)\,d\tau\right) > 0 \quad \text{pour} \quad t > t_0,$$

On a donc pour $t > t_0$ l'inégalité

$$\frac{R(t)}{\varkappa\left(\int_0^t R(\tau)\,d\tau\right)} \leqslant 1.$$

En intégrant les deux membres de t_0 à t_1 on obtient

$$\int_0^{2\int_0^{t_1} R(\tau)\,d(\tau)} \frac{da}{\varkappa(a)} = 2\int_{t_0}^{t_1} \frac{R(t)}{\varkappa\left(2\int_0^t R(\tau)\,d\tau\right)}\,dt \leqslant 2(t_1 - t_0)$$

ce qui signifie que l'intégrale généralisée $\int_0^\delta \frac{dt}{\varkappa(t)}$ est convergente dans le voisinage de zéro, contrairement à l'hypothèse. On a donc nécessairement $R(t) = 0$ ce qui achève la démonstration **).

**) Dans la démonstration on pourrait aussi appliquer la théorie des inégalités différentielles. En effet, la fonction $\varphi(t) = \int_0^t R(\tau)\,d\tau$ satisfait à l'inégalité $\varphi'(t) \leqslant \varkappa(2\varphi(t))$, donc $\varphi(t) \leqslant \gamma(t)$, où $\gamma(t)$ est une intégrale supérieure de l'équation $y' = \varkappa(2y)$ issue du point $(0, 0)$ à droite, mais $\gamma(t) \equiv 0$, d'après les hypothèses relatives à la fonction $\varkappa(t)$, d'où $\varphi(t) \equiv 0$ et, par conséquent, $R(t) \equiv 0$ (je dois cette remarque à M. J. Szarski).

Démonstration de l'unicité de la solution de l'équation (10)

Soient $s_1(x, y)$ et $s_2(x, y)$ des solutions de l'équation (10), continues dans l'ensemble Δ. Soit

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, \quad \text{si} \quad (x, y) \in D - \Delta \\ \max\limits_{(u, v) \in \Delta_{x, y}} |s_1(u, v) - s_2(u, v)|, \quad \text{si} \quad (x, y) \in \Delta, \end{cases}$$

où

$$\Delta_{x, y} = \underset{(u, v)}{E} \{h(v) \leq u \leq x, \quad g(u) \leq v \leq y\}.$$

Alors, en vertu de la condition (4), nous aurons pour $(x, y) \in \Delta$ l'inégalité

$$|s_1(x, y) - s_2(x, y)| \leq \omega \left(\iint\limits_{\Delta_{x, y}} d(u, v)\, du\, dv + \int\limits_{h(y)}^{x} d(u, y)\, du + \int\limits_{g(x)}^{y} d(x, v)\, dv \right),$$

dont il résulte que $d(x, y)$ est une fonction continue dans le rectangle D et que, en vertu de l'inégalité

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^y d(u, v)\, du\, dv \leq \frac{x}{2} \int\limits_0^y d(x, v)\, dv + \frac{y}{2} \int\limits_0^x d(u, y)\, du,$$

on a

$$d(x, y) \leq \omega \left(\frac{l+2}{2} \int\limits_0^x d(u, y)\, du + \frac{l+2}{2} \int\limits_0^y d(x, v)\, dv \right),$$

où $l = max\,(a, b)$. Il en résulte, d'après le théorème 3, que $d(x, y) \equiv 0$ et par suite $s_1(x, y) \equiv s_2(x, y)$.

Démonstration de l'unicité de la solution de l'équation (17)

Soient $s_1(x, y)$ et $s_2(x, y)$ des solutions de l'équation (17), continues dans l'ensemble Δ. Soit $\varrho(x, y)$ une fonction continue définie dans le rectangle D par la formule

$$\varrho(x, y) = \max_{(u, v) \in \Delta_{x, y}} |s_1(u, v) - s_2(u, v)|.$$

En vertu de la condition (4) et du lemme 1 on a pour $(u, v) \in \Delta_{x, y}$ l'inégalité

$$|s_1(u, v) - s_2(u, v)| \leq \omega \left(\frac{l + 4L}{2} \int\limits_0^u \varrho(t, v)\, dt + \frac{l + 4L}{2} \int\limits_0^v \varrho(u, t)\, dt \right) \leq$$

$$\leq \omega \left(\frac{l + 4L}{2} \int\limits_0^x \varrho(t, y)\, dt + \frac{l + 4L}{2} \int\limits_0^y \varrho(x, t)\, dt \right)$$

et par suite, pour $(x, y) \in D$, l'inégalité

$$\varrho(x, y) \leqslant \omega\left(\frac{l+4L}{2}\int_0^x \varrho(u, y)\, du + \frac{l+4L}{2}\int_0^y \varrho(x, v)\, dv\right),$$

d'où $\varrho(x, y) \equiv 0$ et par conséquent $s_1(x, y) \equiv s_2(x, y)$.

5. Existence d'une solution de l'équation (10)

Dans ce chapitre, et dans le suivant, nous admettons que la fonction $\omega(\delta)$ qui figure dans la condition (5) est faiblement croissante et satisfait à la condition

(18) $$\omega(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2).$$

On peut le faire sans nuire à la généralité, en remplaçant la fonction $\omega(\delta)$ par la fonction $\omega^*(\delta)$ définie par la formule

$$\omega^*(\delta) = \sup|F(x, y, z, p, q) - F(x, y, z, \overline{p}, \overline{q})|,$$

où $(x, y, z, p, q) \in \Pi$, $(x, y, z, \overline{p}, \overline{q}) \in \Pi$ et $|p - \overline{p}| + |q - \overline{q}| \leqslant \delta$.

Lemme 6. Si la fonction $\alpha(\delta)$, définie pour $\delta \geqslant 0$, non négative et faiblement croissante, satisfait à la condition

$$\alpha(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \alpha(\delta_1) + \alpha(\delta_2),$$

alors

$$\alpha(n \cdot \delta) \leqslant n\,\alpha(\delta) \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$|\alpha(\delta_1) - \alpha(\delta_2)| \leqslant \alpha(|\delta_1 - \delta_2|), \qquad \alpha(\delta) \leqslant \alpha(1)\cdot(\delta + 1).$$

Lemme 7. Si la condition (4) est remplie, la condition (6) l'est aussi pour

$$A = \omega(1) + \max_{(x, y) \in \Delta} |F(x, y, 0, 0, 0)|, \qquad B = \omega(1).$$

Lemme 8. Si les conditions (5) et (6) sont remplies, alors

$$|F(x, y, z, p, q)| \leqslant A + B \cdot |z| + \omega(1)\cdot(1 + |p| + |q|).$$

Nous omettons les démonstrations immédiates de ces lemmes.

Démonstration de l'existence d'une solution de l'equation (10)

Supposons que les hypothèses contenues dans l'énoncé du problème II (problème de Cauchy, p. 77) soient remplies et que la fonction $F(x, y, z, p, q)$ soit continue dans l'ensemble Δ et satisfasse aux conditions (5) et (6).

Ceci posé, considérons l'espace de Banach (c'est-à-dire un espace linéaire, normé et complet) des fonctions $s(x, y)$ continues dans l'ensemble Δ avec la norme $\|s(x, y)\| = \max|s(x, y)|$ pour $(x, y) \in \Delta$. En appliquant le théorème du point fixe dû à Schauder [9], nous allons prouver qu'il existe dans cet espace un élément invariant par rapport à la transformation Γ_1 définie par la formule

$$S(x, y) = \Gamma_1 s(x, y) = F\left(x, y, \iint_{\Delta_{xy}} s(u, v)\, du\, dv, \int_{g(x)}^{y} s(x, v)\, dv, \int_{h(y)}^{x} s(u, y)\, du.\right).$$

Admettons les définitions et les notations suivantes:

$$\lambda = A + B + 3\,\omega(1) + 1,$$

$$\Pi_1 = \mathop{E}_{(x,y,z,p,q)\in\Pi}\left\{|z| \leqslant \frac{1}{\lambda} e^{\lambda\cdot(a+b)};\ |p|, |q| \leqslant e^{\lambda\cdot(a+b)}\right\},$$

$$\Omega_1(\delta) = \max_{\substack{(x,y,z,p,q)\in\Pi_1 \\ (\bar{x},\bar{y},\bar{z},p,q)\in\Pi_1 \\ |x-\bar{x}|+|y-\bar{y}|+|z-\bar{z}|\leqslant\delta}} |F(x, y, z, p, q) - F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, p, q)| \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \delta < +\infty,$$

$$\widetilde{\Omega}(\delta) = \max\Big(\max_{\substack{0\leqslant x\leqslant\bar{x}\leqslant a \\ |x-\bar{x}|\leqslant\delta}} |g(x) - g(\bar{x})|,\ \max_{\substack{0\leqslant y\leqslant\bar{y}\leqslant b \\ |y-\bar{y}|\leqslant\delta}} |h(y) - h(\bar{y})|\Big) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \delta < +\infty,$$

$$\Omega^*(\delta) = \Omega_1((1 + e^{\lambda\cdot(a+b)})\cdot\delta) + \omega([\widetilde{\Omega}(\delta) + \delta]\cdot\lambda\, e^{\lambda\cdot(a+b)}) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \delta < +\infty.$$

Enfin, supposons que la fonction $\varepsilon(u, \delta)$, définie pour $u \geqslant 0$ et $\delta \geqslant 0$, soit la solution unique, en vertu de la condition (4), de l'équation

$$\varepsilon(u, \delta) = \omega\left(\int_0^u \varepsilon(t, \delta)\, dt\right) + \Omega^*(\delta). \tag{19}$$

L'inégalité (18) étant remplie, on a, d'après le lemme 6 (p. 92), $\omega(\delta) \leqslant \omega(1)\cdot(1 + \delta)$ et, par conséquent, la solution de l'équation (19) existe dans l'intervalle $0 \leqslant u < +\infty$ tout entier, pour tout $\delta \geqslant 0$ fixe. La fonction $\varepsilon(u, \delta)$ est égale à la dérivée $d\xi(u, \delta)/du$ de la solution $\xi(u, \delta)$ de l'équation différentielle

$$\frac{d\xi}{du} = \omega(\xi) + \Omega^*(\delta)$$

qui satisfait à la condition initiale

$$\xi(0, \delta) = 0.$$

Les fonctions $\omega(\delta)$ et $\Omega^*(\delta)$ étant continues, $\xi(u,\delta)$ est une fonction continue de deux variables et, puisque

$$\varepsilon(u,\delta)=\omega(\xi(u,\delta))+\Omega^*(\delta),$$

$\varepsilon(u,\delta)$ est aussi une fonction continue de deux variables. La solution de l'équation (19) étant unique pour chaque $\delta\geqslant 0$, on a nécessairement

$$\varepsilon(u,0)\equiv 0.$$

Considérons maintenant, dans l'espace fonctionnel envisagé, l'ensemble Z_1 des fonctions $s(x,y)$ qui satisfont aux conditions

$$|s(x,y)|\leqslant\lambda\cdot e^{\lambda\cdot(x+y)},$$

$$|s(x,y)-s(\bar{x},\bar{y})|\leqslant\varepsilon(y,|x-\bar{x}|)+\varepsilon(\bar{x},|y-\bar{y}|).$$

L'ensemble Z_1 n'est pas vide, puisqu'il contient la fonction identiquement nulle sur l'ensemble Δ. Les fonctions de l'ensemble Z_1 sont bornées dans leur ensemble et, vu la condition $\varepsilon(u,0)\equiv 0$, elles sont équicontinues. L'ensemble Z_1 est donc compact dans l'espace considéré. Enfin, on voit aisément que cet ensemble est convexe et fermé.

Pour $s(x,y)$, $\bar{s}(x,y)\in Z_1$ on a l'inégalité

$$|\Gamma_1 s(x,y)-\Gamma_1\bar{s}(x,y)|\leqslant\Omega_1\left(\iint_{\Delta_{x,y}}|s(u,v)-\bar{s}(u,v)|\,du\,dv\right)+$$

$$+\,\omega\left(\int_{h(y)}^{x}|s(u,y)-\bar{s}(u,y)|\,du+\int_{g(x)}^{y}|s(x,v)-\bar{s}(x,v)|\,dv\right),$$

d'où

$$\|\Gamma_1 s-\Gamma_1\bar{s}\|\leqslant\Omega_1(ab\,\|s-\bar{s}\|)+\omega((a+b)\cdot\|s-\bar{s}\|),$$

ce qui prouve que la transformation Γ_1 est continue uniformément sur l'ensemble Z_1.

Si $(x,y)\in\Delta$, $(\bar{x},y)\in\Delta$ et $s(x,y)\in Z_1$, alors

$$\left|\iint_{\Delta_{x,y}}s(u,v)\,du\,dv-\iint_{\Delta_{\bar{x},y}}s(u,v)\,du\,dv\right|\leqslant|x-\bar{x}|\cdot e^{\lambda(a+b)},$$

$$\left|\int_{g(x)}^{y}s(x,v)\,dv-\int_{g(\bar{x})}^{y}s(\bar{x},v)\,dv\right|\leqslant\tilde{\Omega}(|x-\bar{x}|)\cdot\lambda\cdot e^{\lambda(a+b)}+\int_{0}^{y}\varepsilon(t,|x-\bar{x}|)\,dt,$$

$$\left|\int_{h(y)}^{x}s(u,y)\,du-\int_{h(y)}^{\bar{x}}s(u,y)\,du\right|\leqslant|x-\bar{x}|\cdot\lambda\cdot e^{\lambda(a+b)},$$

d'où

$$|S(x,y)-S(\overline{x},y)|\leqslant \Omega_1(|x-\overline{x}|\cdot(1+e^{\lambda\cdot(a+b)}))+$$

$$+\,\omega\left((\widetilde{\Omega}(|x-\overline{x}|)+|x-\overline{x}|)\cdot\lambda\cdot e^{\lambda\cdot(a+b)}+\int\limits_0^y \varepsilon(t,|x-\overline{x}|)\,dt\right)\leqslant$$

$$\leqslant \Omega^*(|x-\overline{x}|)+\omega\left(\int\limits_0^y \varepsilon(t,|x-\overline{x}|)\,dt\right)=\varepsilon(y,|x-\overline{x}|).$$

D'une manière tout à fait analogue, si $(\overline{x},y)\epsilon\,\Delta$, $(\overline{x},\overline{y})\epsilon\,\Delta$, et $s(x,y)\epsilon\,Z_1$, alors

$$|S(\overline{x},y)-S(\overline{x},\overline{y})|\leqslant \varepsilon(\overline{x},|y-\overline{y}|);$$

donc, si $s(x,y)\epsilon\,Z_1$, on a

$$|S(x,y)-S(\overline{x},\overline{y})|\leqslant \varepsilon(y,|x-\overline{x}|)+\varepsilon(\overline{x},|y-\overline{y}|).$$

Enfin, si $s(x,y)\epsilon\,Z_1$, il vient

$$|S(x,y)|\leqslant A+B\cdot\iint\limits_{\Delta_{x,y}}|s(u,v)|\,du\,dv+$$

$$+\,\omega(1)\cdot\left\{1+\int\limits_{h(y)}^{x}|s(u,y)|\,du+\int\limits_{g(x)}^{y}|s(x,v)|\,dv\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\left(A+\frac{B}{\lambda}+3\,\omega(1)\right)\cdot e^{\lambda\cdot(x+y)}<\lambda\cdot e^{\lambda\cdot(x+y)}.$$

La transformation Γ_1 transforme donc l'ensemble Z_1 en un sous-ensemble de celui-ci. En vertu du théorème du point fixe dû à Schauder [9] il existe dans l'ensemble Z_1 une fonction $s(x,y)$ telle que $\Gamma_1 s(x,y)=$ $=s(x,y)$, et la démonstration est ainsi achevée.

6. Existence d'une solution de l'équation (17)

De même que dans le chapitre précédent, nous admettons que la fonction $\omega(\delta)$ est faiblement croissante et qu'elle satisfait à la condition (18).

Lemme 9. Pour tout $\eta\geqslant 0$ il existe exactement une fonction continue $r_\eta(x,y)$, définie dans le rectangle

(D) $$0\leqslant x\leqslant a,\qquad 0\leqslant y\leqslant b,$$

qui y satisfait à l'équation

(20) $$r_\eta(x,y)=\omega\left(\int\limits_0^x r_\eta(t,y)\,dt+\int\limits_0^y r_\eta(x,t)\,dt\right)+\eta.$$

D é m o n s t r a t i o n. La conclusion résulte du théorème 2. Il suffit de poser $g(x) \equiv 0$, $h(y) \equiv 0$, $\sigma(x) \equiv 0$, $\tau(y) \equiv 0$ et

$$F(x,y,z,p,q) = \omega(p+q)+\eta.$$

L'équation (10) se ramène alors à l'équation (20).

Lemme 10. Toutes les fonctions $r_\eta(x,y)$, où $\eta \in [0,c]$ et c est une constante positive, sont bornées dans leur ensemble et équicontinues.

D é m o n s t r a t i o n. Pour toutes les fonctions $F(x,y,z,p,q) = \omega(p+q)+\eta$, $0 \leqslant \eta \leqslant c$, la condition (6) est vérifiée pour $A = c$ et $B = 0$ et la condition (5) est vérifiée en vertu du lemme 6. Dans la preuve de l'existence d'une solution de l'équation (10) on peut admettre dans ce cas

$$\lambda = c + 3\cdot\omega(1)+1,$$

$$\Omega^*(\delta) = \omega(\lambda\cdot e^{\lambda\cdot(a+b)}\cdot\delta) \quad \text{pour} \quad \delta \geqslant 0.$$

Par conséquent, si $\varepsilon(u,\delta)$ désigne une solution de l'équation

$$\varepsilon(u,\delta) = \omega\left(\int_0^r \varepsilon(t,\delta)\,dt\right) + \Omega^*(\delta),$$

les fonctions $r_\eta(x,y)$, où $\eta \in [0,c]$, satisfont aux conditions

$$|r_\eta(x,y)| \leqslant \lambda\cdot e^{\lambda\cdot(x+y)},$$

$$|r_\eta(x,y) - r_\eta(\bar{x},\bar{y})| \leqslant \varepsilon(y,|x-\bar{x}|) + \varepsilon(\bar{x},|y,\bar{y}|)$$

et le lemme est ainsi établi.

Lemme 11. Etant donnée une fonction continue $r^*(x,y)$ satisfaisant dans le rectangle D à l'inégalité

$$0 \leqslant r^*(x,y) \leqslant \omega\left(\int_0^x r^*(t,y)\,dt + \int_0^y r^*(x,t)\,dt\right) + \eta^*,$$

où $\eta^* \geqslant 0$, si $\eta^* < \eta$, alors $r^*(x,y) < r_\eta(x,y)$, et si $\eta^* = \eta$, alors $r^*(x,y) \leqslant r_\eta(x,y)$.

D é m o n s t r a t i o n *). Supposons $\eta^* < \eta$. Alors $r^*(0,0) \leqslant \eta^* < \eta = r_\eta(0,0)$ et, en vertu de la continuité, on a $r^*(x,y) < r_\eta(x,y)$ dans un voisinage du point $(0,0)$. Si cette inégalité n'était pas vérifiée dans tout le rec-

*) La méthode utilisée dans cette démonstration est celle que M. O p i a l a appliquée dans l'étude d'un système d'inégalités intégrales avec des fonctions d'une variable, cf. [8], théorème 1.

tangle D, il y existerait un point (x, y) tel que $r^*(x, y) = r_\eta(x, y)$ et $r^*(u, v) \leqslant r_\eta(u, v)$ pour $0 \leqslant u \leqslant x$, $0 \leqslant v \leqslant y$. Nous aurions alors

$$\omega\left(\int_0^x r^*(t, y)\,dt + \int_0^y r^*(x, t)\,dt\right) \leqslant \left(\int_0^x r_\eta(t, y)\,dt + \int_0^y r_\eta(x, t)\,dt\right)$$

et par suite

$$0 = r_\eta(x, y) - r^*(x, y) \geqslant \eta - \eta^* > 0.$$

La première partie du lemme est ainsi démontrée.

Supposons maintenant que $\eta = \eta^*$. Alors, en vertu de la première partie du lemme

$$r^*(x, y) < r_{\eta+1/n}(x, y) \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$0 \leqslant r_{\eta+1/(n+1)}(x, y) < r_{\eta+1/n}(x, y) \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

La seconde de ces inégalités prouve que la suite $\{r_{\eta+1/n}(x, y)\}$ est convergente et, en tant que suite de fonctions équicontinues, elle est uniformément convergente. Sa limite $r_{\eta+0}(x, y)$ est donc une fonction continue et satisfait à l'équation (20), par conséquent $r_{\eta+0}(x, y) = r_\eta(x, y)$. On obtient la seconde partie du lemme en passant à la limite dans l'avant-dernière inégalité.

C o r o l l a i r e. Soit maintenant

$$\bar{r}_\eta(x, y) = \max_{\substack{0 \leqslant u \leqslant x \\ 0 \leqslant v \leqslant y}} r_\eta(u, v).$$

Donc $\bar{r}_\eta(x, y) = r_\eta(\bar{x}, \bar{y})$, où $0 \leqslant \bar{x} \leqslant x$, $0 \leqslant \bar{y} \leqslant y$, et par suite

$$\bar{r}_\eta(x, y) = \omega\left(\int_0^{\bar{x}} r_\eta(t, \bar{y})\,dt + \int_0^{\bar{y}} r_\eta(\bar{x}, t)\,dt\right) + \eta \leqslant$$

$$\leqslant \omega\left(\int_0^x \bar{r}_\eta(t, y)\,dt + \int_0^y \bar{r}_\eta(x, t)\,dt\right) + \eta,$$

d'où il résulte, d'après le Lemme 11, que $\bar{r}_\eta(x. y) \leqslant r_\eta(x, y)$, ce qui prouve que $r_\eta(x, y)$ est une fonction non décroissante de ses deux arguments.

Lemme 12. Soit L un nombre naturel et $\Omega(\delta)$ une fonction continue faiblement croissante, définie pour $\delta \geqslant 0$, telle que $\Omega(0) = 0$ et $\Omega(L \cdot \delta) \leqslant L \cdot \Omega(\delta)$. Pour tout $\delta \geqslant 0$ il existe exactement une fonction continue $\varepsilon(x, y; \delta)$ définie dans le rectangle D, satisfaisant à l'équation

$$(21) \qquad \frac{1}{L}\,\varepsilon(x, y, \delta) = \omega\left(2L\int_0^x \varepsilon(t, y, \delta)\,dt + 2L\int_0^y \varepsilon(x, t, \delta)\,dt\right) + \Omega(\delta).$$

En tant que fonction de trois variables la fonction $\varepsilon(x, y; \delta)$ est continue (par rapport à l'ensemble de ses variables) et faiblement croissante par rapport à chacun de ses arguments. De plus, cette fonction vérifie l'inégalité

(22) $$L \cdot \varepsilon(x, y, \delta) \geqslant \varepsilon(x, y, L \cdot \delta).$$

Démonstration. En remplaçant dans les lemmes précédents la fonction $\omega(\delta)$ par la fonction $L \cdot \omega(2L \cdot \delta)$ et le nombre $\eta \geqslant 0$ par le nombre $L \cdot \Omega(\delta)$, on voit que la fonction $\varepsilon(x, y; \delta)$ est univoquement définie par l'équation (21) et qu'elle est une fonction croissante de ses arguments. En vertu du lemme 10, les fonctions $\varepsilon(x, y; \delta)$, où $\delta \epsilon [0, c]$ et $c \geqslant 0$ est un nombre fixe, sont équicontinues. Soit $\{\delta_n\}$ une suite monotone arbitraire $\delta_n \epsilon [0, c]$, convergente vers δ. Alors la suite $\varepsilon(x, y; \delta_n)$ est uniformément convergente en tant qui suite monotone bornée de fonctions équicontinues. La limite de cette suite satisfait à l'équation (21), elle est donc égale à $\varepsilon(x, y; \delta)$. Il en résulte que pour toute suite $\{\delta_n\}$ convergente vers δ, la suite $\varepsilon(x, y; \delta_n)$ est uniformément convergente vers $\varepsilon(x, y; \delta)$, ce qui veut dire que pour tout point $(x, y; \delta)$ la fonction $\varepsilon(x, y; \delta)$ est continue par rapport à δ. Les fonctions $\varepsilon(x, y; \delta)$, $\delta \epsilon [0, c]$, étant équicontinues par rapport à (x, y), la fonction $\varepsilon(x, y; \delta)$, en tant que fonction de trois variables, est aussi continue par rapport à l'ensemble des variables (x, y), uniformément par rapport à $\delta \epsilon [0, c]$. Par conséquent la fonction $\varepsilon(x, y; \delta)$ est continue par rapport à l'ensemble de ses arguments.

Il nous reste à établir l'inégalité (22). Soit $\varepsilon_n(x, y; \delta)$ une solution de l'équation

$$\frac{1}{L} \varepsilon_n(x, y, \delta) = \omega\left(2L \int_0^x \varepsilon_n(t, y, \delta)\, dt + 2L \int_0^y \varepsilon_n(x, t, \delta)\, dt\right) + \Omega(\delta) + \frac{1}{n}.$$

En vertu des lemmes précédents il existe exactement une telle solution et, pour δ fixé, la suite $\varepsilon_n(x, y; \delta)$ est uniformément convergente vers $\varepsilon(x, y; \delta)$. Il suffit donc de prouver que

$$L \cdot \varepsilon_n(x, y, \delta) > \varepsilon(x, y, L \cdot \delta).$$

On a

$$\frac{1}{L} \cdot \varepsilon_n(0, 0, \delta) = \Omega(\delta) + \frac{1}{n}, \qquad \frac{1}{L} \varepsilon(0, 0, L \cdot \delta) = \Omega(L \cdot \delta),$$

donc

$$L \cdot \varepsilon_n(0, 0, \delta) > \varepsilon(0, 0, L \cdot \delta).$$

Si l'inégalité

$$L \cdot \varepsilon_n(x, y, \delta) > \varepsilon(x, y, L \cdot \delta)$$

n'était pas vérifiée dans tout le rectangle P, il existerait dans ce rectangle un point (x, y) tel que

$$L \cdot \varepsilon_n(x, y, \delta) = \varepsilon(x, y, L \cdot \delta)$$

et

$$L \cdot \varepsilon_n(u, v, \delta) \geqslant \varepsilon(u, v, L \cdot \delta),$$

pour $0 \leqslant u \leqslant x$, $0 \leqslant v \leqslant y$. Mais, comme $\omega(L \cdot \delta) \leqslant L \cdot \omega(\delta)$, nous aurions alors

$$0 = L \cdot \varepsilon_n(x, y, \delta) - \varepsilon(x, y, L \cdot \delta) \geqslant L \cdot (L \cdot \Omega(\delta) - \Omega(L \cdot \delta)) + \frac{L^2}{n} +$$

$$+ L^2 \cdot \omega\left(2L \int_0^x \varepsilon_n(t, y, \delta)\,dt + 2L \int_0^y \varepsilon(x, t, \delta)\,dt\right) -$$

$$- L^2 \cdot \omega\left(2 \int_0^x \varepsilon(t, y, L \cdot \delta)\,dt + 2 \int_0^y \varepsilon(x, t, L \cdot \delta)\,dt\right) \geqslant \frac{L^2}{n} > 0.$$

L'inégalité (22) est ainsi établie.

Démonstration de l'existence d'une solution de l'équation (17)

Supposons que les hypothèses contenues dans l'énoncé du problème I (problème de G o u r s a t, p. 76) soient remplies et que la fonction $F(x, y, z, p, q)$ soit continue dans l'ensemble Δ et satisfasse aux conditions (5) et (6).

Considérons l'espace de Banach des fonctions $s(x, y)$ continues sur l'ensemble Δ, de norme $\|s(x, y)\| = \max\limits_{(x,y)\in\Delta} |s(x, y)|$. Nous allons montrer qu'il existe dans cet espace un élément fixe par rapport à la transformation Γ_2 définie par la formule

$$(23) \qquad S(x, y) = \Gamma_2 s(x, y) = F\left(x, y, \Theta_s(x, y), \frac{\partial}{\partial x}\Theta_s(x, y), \frac{\partial}{\partial y}\Theta_s(x, y)\right).$$

Admettons les définitions et les notations suivantes:

$$\lambda = A + B + \omega(1) \cdot (1 + 4L) + 1,$$

où L est la constante entière positive que nous avons définie dans le chapitre 3,

$$\Pi_2 = \mathop{E}_{(x, y, z, p, q) \in \Pi} \left\{|z| \leqslant \frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot (a+b)};\ |p|, |q| \leqslant L \cdot e^{\lambda \cdot (a+b)}\right\},$$

$$\Omega_2(\delta) = \max_{\substack{(x, y, z, p, q) \in \Pi_2 \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, p, q) \in \Pi_2 \\ |x - \bar{x}| + |y - \bar{y}| + |z - \bar{z}| \leqslant \delta}} |F(x, y, z, p, q) - F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, p, q)| \quad \text{pour } 0 \leqslant \delta < +\infty.$$

Soit $\varepsilon_M(\delta)$ la fonction déterminée dans le lemme 4, où $M = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot (a+b)}$.

Désignons par $\Omega(\delta)$ une fonction définie dans l'intervalle $0 \leqslant \delta < +\infty$ par la formule

$$\Omega(\delta) = \Omega_2(\delta + \varepsilon_M(\delta)) + \omega(\varepsilon_M^{(1)}(\delta) + \varepsilon_M^{(2)}(\delta)),$$

où les fonctions $\varepsilon_M^{(i)}(\delta)$, $i = 1, 2$ sont celles du lemme 5. La fonction $\Omega(\delta)$ est continue, puisqu'elle est composée de fonctions continues, et elle est non décroissante, car elle est composée de fonctions non décroissantes. Enfin, elle satisfait à la condition

$$\Omega(L \cdot \delta) \leqslant L \cdot \Omega(\delta),$$

où L est un entier positif, puisque les fonctions dont elle est composée vérifient des conditions semblables. Enfin, observons que $\Omega(0) = 0$.

La fonction $\Omega(\delta)$ étant ainsi définie, soit $\varepsilon(x, y, \delta)$ une solution de l'équation (21). Puisque $\Omega(0) = 0$, nous aurons $\varepsilon(x, y, 0) \equiv 0$.

Considérons maintenant dans l'espace fonctionnel envisagé l'ensemble Z_2 des fonctions $s(x, y)$ qui satisfont aux conditions

$$|s(x, y)| \leqslant \lambda \cdot e^{\lambda \cdot (x+y)},$$

$$|s(x, y) - s(\bar{x}, \bar{y})| \leqslant \varepsilon(x, y, \delta) \qquad \text{pour} \quad |x - \bar{x}| + |y - \bar{y}| \leqslant \delta.$$

De même que l'ensemble Z_1, l'ensemble Z_2 est non vide, compact, fermé et convexe.

Si les fonctions $s(x, y)$, $\bar{s}(x, y)$ sont continues sur l'ensemble $\varDelta$, on a, en vertu du lemme 1,

$$\|\Theta_s - \Theta_{\bar{s}}\| \leqslant a \cdot b \cdot \|s - \bar{s}\|,$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}\Theta_s - \frac{\partial}{\partial x}\Theta_{\bar{s}}\right\|, \qquad \left\|\frac{\partial}{\partial y}\Theta_s - \frac{\partial}{\partial y}\Theta_{\bar{s}}\right\| \leqslant L \cdot (a + b) \cdot \|s - \bar{s}\|,$$

donc, pour $s(x, y), \bar{s}(x, y) \in Z_2$,

$$\|\Gamma_2 s - \Gamma_2 \bar{s}\| \leqslant \Omega_2(a \cdot b \cdot \|s - \bar{s}\|) + \omega(2 \cdot L \cdot (a + b) \cdot \|s - \bar{s}\|),$$

Ceci prouve que la transformation Γ_2 est uniformément continue sur l'ensemble Z_2.

Si $|s(x, y)| \leqslant \lambda \cdot e^{\lambda \cdot (x+y)}$, on a, d'après les lemmes 2 et 8,

$$|S(x, y) \leqslant A + \frac{B}{\lambda} e^{\lambda \cdot (x+y)} + \omega(1) \cdot (1 + 4L \cdot e^{\lambda \cdot (x+y)}) < \lambda \cdot e^{\lambda \cdot (x+y)}.$$

Si $s(x, y) \in Z_2$ $|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}| \leqslant \delta$, on aura,

$$|S(x, y) - S(\bar{x}, \bar{y})| \leqslant \Omega_2(\delta + |\Theta_s(x, y) - \Theta_s(\bar{x}, \bar{y})|) +$$

$$+ \omega\left(\left|\frac{\partial}{\partial x}\Theta_s(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}\Theta_s(\bar{x}, \bar{y})\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y}\Theta_s(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\Theta_s(\bar{x}, \bar{y})\right|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \Omega_2(\delta+\varepsilon_M(\delta))+\omega\left(\varepsilon_M^{(1)}(\delta)+\varepsilon_M^{(2)}(\delta)+2L\int_0^y \varepsilon(x,t,L\delta)\,dt+2L\int_0^x \varepsilon(t,y,L\delta)\,dt\right)\leqslant$$

$$\leqslant \Omega(L\cdot\delta)+\omega\left(2L\int_0^y \varepsilon(x,t,L\cdot\delta)\,dt+2L\int_0^x \varepsilon(t,y,L\cdot\delta)\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{L}\varepsilon(x,y,L\delta)\leqslant\varepsilon(x,y,\delta).$$

La transformation Γ_2 transforme donc l'ensemble Z_2 en un sous-ensemble de celui-ci. En vertu du théorème du point fixe de Schauder [9], il existe une fonction $s(x,y)\in Z_2$ telle que $\Gamma_2 s(x,y)=s(x,y)$, ce qui achève la démonstration.

7. Exemples

1. L'exemple de Hartman et Wintner [7] mentionné dans l'introduction montre qu'aucune condition de régularité de la fonction $F(x,y,z,p,q)$ par rapport à p et q ne peut assurer l'unicité de la solution du problème de Darboux. En effet, l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=|z|^{\lambda},\qquad 0<\lambda<1$$

a les solutions

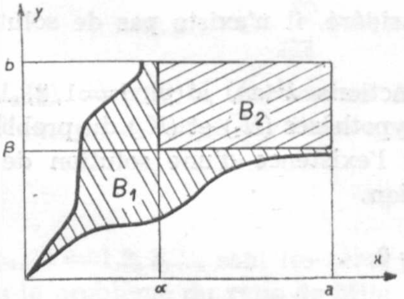
$$z_1\equiv 0$$

et

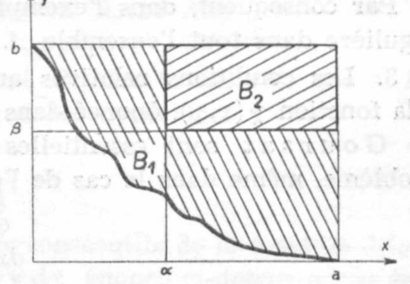
$$z_2(x,y)=(1-\lambda)^{2/(1-\lambda)}\left[(x-\alpha)(y-\beta)\right]^{1/(1-\lambda)},$$

déterminées pour $x\geqslant\alpha$, $y\geqslant\beta$, toutes les deux nulles sur les droites $x=\alpha$, $y=\beta$.

A l'aide de la même équation on peut aussi montrer qu'aucune condition de régularité de la fonction $F(x,y,z,p,q)$ par rapport à p et q ne peut assurer l'unicité des solutions des problèmes I et II pour des formes quelconques, compatibles avec les conditions des problèmes, des courbes $y=g(x)$ et $x=h(y)$. Rapportons-nous, pour abréger, aux figures:



Problème I.



Problème II.

Chacun des problèmes I et II a deux solutions satisfaisant aux mêmes conditions aux limites ou initiales. L'une d'elles est $z \equiv 0$, l'autre

$$z(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x, y) \in B_1, \\ z_2(x, y) & \text{si} \quad (x, y) \in B_2. \end{cases}$$

2. La condition (6) est essentielle pour l'existence d'une solution dans tout le domaine Δ. Prenons, par exemple, l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = |z|^\lambda, \qquad \lambda > 1.$$

En admettant sur le segment $0 \leqslant x \leqslant d$ de la droite $x + y = d$ les conditions initiales de Cauchy

$$z(x, y) = D \cdot (c - d)^{2/(1-\lambda)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{2D}{\lambda - 1}(c - d)^{(1+\lambda)/(1-\lambda)}$$

où $d < c < 2d$, $D = [2(\lambda + 1)/(\lambda - 1)^2]^{1/(\lambda - 1)}$, on voit que la solution

$$z(x, y) = D \cdot (c - x - y)^{2/(1-\lambda)}$$

qui satisfait à ces conditions ne peut être étendue sur tout l'ensemble

$$(\Delta) \qquad 0 \leqslant x \leqslant d, \qquad d - x \leqslant y \leqslant d.$$

Cette solution est unique dans l'ensemble

$$0 \leqslant x \leqslant d, \qquad d - x \leqslant y \leqslant d, \qquad x + y < c,$$

car elle est unique dans tout ensemble

$$0 \leqslant x \leqslant d, \qquad d - x \leqslant y \leqslant d, \qquad x + y \leqslant c^* < c.$$

En effet, dans le dernier ensemble elle est bornée et pour z borné par la constante k la fonction $|z|^\lambda$, $\lambda > 1$, satisfait à la condition de Lipschitz avec la constante $\lambda \cdot k^{\lambda-1}$.

Par conséquent, dans l'exemple considéré, il n'existe pas de solution régulière dans tout l'ensemble Δ.

3. Les conditions relatives aux fonctions $\lambda^i(x)$, $\mu^i(y)$, $i = 1, 2, \ldots$ et à la fonction $\chi(x, y)$, énoncé dans les hypothèses (H_1) et (K_1) du problème de Goursat sont essentielles pour l'existence d'une solution de ce problème, même dans le cas de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = 0,$$

comme le prouvent les exemples donnés dans le travail [3].

4. Dans l'énoncé du problème II nous avons admis que le point (x_0, y_0) où la valeur de la solution est donnée d'avance est situé sur la courbe sur laquelle les valeurs des premières dérivées de la solution sont données d'avance. Si l'on voulait, en poursuivant la voie des généralisations indiquée par Mlle Szmydt, placer le point (x_0, y_0) ailleurs dans le domaine Δ, non nécessairement sur la courbe en question, il faudrait pour prouver l'existence d'une solution introduire certaines restrictions relatives à l'étendue du domaine Δ. Les exemples suivants le montrent:

a) Trouver une fonction $z(x, y)$ de classe $C^{(*)}$ dans le carré

$$(K) \qquad 0 \leqslant x \leqslant a, \qquad 0 \leqslant y \leqslant a,$$

satisfaisant à l'équation

$$(24) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -A \cdot z, \qquad A > 0,$$

telle que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial z}{\partial y}(0, y) = 0$$

et

$$z(x_0, y_0) = z_0,$$

où (x_0, y_0) est un point à l'intérieur du carré K et z_0 est un nombre arbitraire donné d'avance.

Si la solution de ce problème existe, alors, en désignant par C la valeur de cette solution à l'origine, on voit que cette solution est en même temps la solution unique du problème de Darboux pour l'équation (24) avec les conditions

$$z(x, 0) = z(0, y) = C.$$

En appliquant la méthode des approximations successives on constate que cette dernière solution s'exprime par la formule

$$z(x, y) = C \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(Axy)^n}{(n!)^2} = C \cdot J_0(2\sqrt{Axy}),$$

où $J_0(\varrho)$ désigne la fonction de Bessel d'ordre 0. On voit que si le point (x_0, y_0) est situé sur l'une quelconque des hyperboles

$$xy = \frac{\varrho_n^2}{4A}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

où ϱ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, sont les zéros positifs consécutifs de la fonction $J_0(\varrho)$, alors le problème du type de Mlle Szmydt énoncé ci-dessus a une infinité de solutions si $z_0 = 0$ et n'en a aucune si $z_0 \neq 0$.

b) Trouver une fonction $z(x, y)$ de classe $C^{(*)}$ dans le triangle

$$(T) \qquad x+y \geqslant 0; \qquad x, y \leqslant a,$$

satisfaisant dans celui-ci à l'équation (24), telle que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, -x) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, -x) = 0$$

et

$$z(x_0, y_0) = z_0,$$

où (x_0, y_0) est un point à l'intérieur du triangle T et z_0 est un nombre arbitraire donné d'avance.

Si la solution de ce problème existe, alors pour C égal à la valeur de cette solution sur la droite $x+y=0$ cette solution est en même temps solution du problème de Cauchy sous les conditions

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, -x) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, -x) = 0,$$

$$z(x, -x) = C,$$

celle-ci est pourtant unique pour C donné et elle s'exprime par la formule

$$z(x, y) = C \cdot \cos(\sqrt{A} \cdot (x+y)).$$

Donc, si

$$x_0 + y_0 = \frac{\pi}{\sqrt{A}}\left(n - \frac{1}{2}\right),$$

pour une valeur quelconque de $n = 1, 2, 3, \ldots$, alors le problème b) a une infinité de solutions pour $z_0 = 0$ et n'en a aucune pour $z_0 \neq 0$.

Considérons, d'une manière générale, l'équation (1) et posons relativement à celle-ci le problème du type de Mlle Szmydt avec les conditions

$$(25) \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(x, g(x)) = \sigma(x), \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(h(y), y) = \tau(y),$$

$$(26) \qquad z(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{z};$$

admettons que les graphiques des fonctions $y = g(x)$ et $x = h(y)$ forment une courbe, de même que dans le problème II énoncé dans le chapitre 1, mais que le point $(\overline{x}, \overline{y})$ soit situé non pas sur cette courbe, mais ailleurs dans le domaine Δ. Le problème consistera à déterminer une fonction $z(x, y)$ de classe $C^{(*)}$ dans l'ensemble Δ satisfaisant à l'équation (1) et aux conditions (25) et (26).

Si le problème considéré a une solution, alors, en choisissant un point quelconque (x_0, y_0) de telle manière que

$$x_0 = h(y_0) \quad \text{ou} \quad y_0 = g(x_0)$$

et en désignant par z_0 la valeur de la solution en ce point, on voit que cette solution est en même temps solution du problème II avec les conditions (25) et

$$z_0(x_0, y_0) = z_0. \tag{27}$$

La question de l'existence d'une solution du problème de Mlle Szmydt se ramène donc à la question s'il existe une valeur z_0 telle que la solution du problème II relatif à l'équation (1) avec les conditions (25) et (27) satisfasse à la condition (26).

Si l'équation (1) est linéaire, c'est-à-dire de la forme

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y} = A(x,y) \cdot z(x,y) + B(x,y) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} + C(x,y) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} + D(x,y), \tag{28}$$

où les fonctions $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$ et $D(x,y)$ sont continues dans l'ensemble Δ, alors pour tout z_0 la solution $z(x,y)$ du problème II relatif à cette équation avec les conditions (25) et (27) est de la forme

$$z(x,y) = z_1(x,y) + z_2(x,y) \cdot z_0,$$

où $z_1(x,y)$ est solution du problème II relatif à l'équation (28) avec les conditions (25) et la condition

$$z(x_0, y_0) = 0,$$

et $z_2(x,y)$ est solution du problème II relatif à l'équation

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y} = A(x,y) \cdot z(x,y) + B(x,y) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} + C(x,y) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$$

avec les conditions

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, g(x)) = 0 = \frac{\partial z}{\partial y}(h(y), y), z(x_0, y_0) = 1.$$

On voit donc immédiatement que le problème de Mlle Szmydt relatif à l'équation (28) avec les conditions (25) et (26) admet exactement une solution si $z_2(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$; si $z_2(\overline{x}, \overline{y}) = 0$, il en admet une infinité lorsque $z_1(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{z}$ et n'en admet aucune lorsque $\overline{z} \neq z_1(\overline{x}, \overline{y})$ *).

8. Application du théorème du point fixe de Banach

Dans le cas particulier, où la fonction $F(x, y, z, p, q)$, continue pour $(x, y) \in \Delta$ et z, p, q arbitraires, satisfait à la condition de Lipschitz

(29) $|F(x, y, z, p, q) - F(x, y, \overline{z}, \overline{p}, \overline{q})| \leqslant L^* \cdot (|z - \overline{z}| + |p - \overline{p}| + |q - \overline{q}|)$,

(qui implique évidemment (4)) on obtient des preuves beaucoup plus simples de l'xistence et de l'unicité des solutions des problèmes I et II basées sur la méthode des approximations successives de Picard.

Pour le problème II on le fait de même que pour les problèmes classiques de Cauchy et de Darboux. On peut obtenir la preuve en trouvant directement une limitation des différences entre deux approximations successives (cf. [4]), où encore en s'appuyant, d'une façon bien connue, sur le théorème du point fixe de Banach.

Puisque la démonstration basée sur le théorème du point fixe de Banach contient une preuve du fait que la méthode des approximations successives peut être appliquée dans ce cas, l'étendue du domaine auquel ce théorème peut être appliqué y joue un rôle important. Si on l'applique, par exemple, au problème de Darboux et si l'on introduit dans l'espace fonctionnel la métrique usuelle, c'est-à-dire pour les fonctions continues dans un ensemble fermé Z

$$d(f_1, f_2) = \max_{(x, y) \in Z} |f_1(x, y) - f_2(x, y)|,$$

---

*) Observons toutefois que le théorème de Mlle Szmydt ([10], théorème 1) entraîne la conséquence suivante. Si la fonction $F(x, y, z, p, q)$ est continue pour (x, y) appartenant au rectangle

(D) $$0 \leqslant x \leqslant \alpha, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \beta,$$

et pour z, p, q arbitraires, et si elle satisfait à l'hypothèse K ([10], p. 69) qui contient comme cas particulier la condition (5), enfin si elle remplit la condition

$$|F(x, y, z, p, q)| \leqslant A + B(|z| + |p| + |q|)^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

(plus forte que la condition (6)), alors pour deux courbes continues quelconques, d'équations

$$y = g(x) \quad \text{et} \quad x = h(y),$$

contenues dans le rectangle D et allant d'un bord à l'autre, pour des fonctions continues arbitraires: $\sigma(x)$ définie pour $x \in [0, \alpha]$ et $\tau(y)$ définie pour $y \in [0, \beta]$ enfin pour un point quelconque $(\overline{x}, \overline{y}) \in D$ et un nombre arbitraire $\overline{z}$ il existe une fonction $z(x, y)$ de classe $C^{(*)}$ dans le rectangle D satisfaisant à l'équation (1) et aux conditions (25) et (26). Je dois cette remarque à l'auteur du travail cité.

alors l'ensemble Δ, qui est un rectangle dans le cas considéré, doit en général être partagé en rectangles plus petits, d'autant plus petits que la constante L^* est plus grande, et le théorème de Banach doit être successivement appliqué à chacun d'eux. Ceci ne fournit pourtant pas de preuve de l'application possible de la méthode des approximations successives dans le rectangle Δ tout entier.

Dans le travail [2] M. A. Bielecki a exposé une élégante méthode permettant d'éviter cet inconvénient pour les problèmes de Darboux et de Cauchy: elle consiste à appliquer le théorème de Banach dans un espace fonctionnel de métrique convenablement choisie. La même méthode s'applique évidemment au problème II.

Or, il est plus intéressant que cette méthode s'applique aussi bien dans le cas I, moins simple. Dans ce but, il suffit d'introduire dans l'espace des fonctions $s(x, y)$ continues sur le domaine Δ la distance

$$d(s, \bar{s}) = \max_{(x,y)\in\Delta} \frac{|s(x,y) - \bar{s}(x,y)|}{e^{\varkappa\cdot(x+y)}}, \tag{30}$$

où $\varkappa$ est une constante non négative. L'espace fonctionnel ainsi métrisé est complet, donc, en vertu du théorème du point fixe de Banach, l'existence et l'unicité de la solution de l'équation fonctionnelle (17) et l'applicabilité de la méthode des approximations successives avec une fonction arbitraire continue dans l'ensemble Δ choisie comme approximation de rang zéro $s_0(x, y)$ d'après les formules

$$s_1(x,y) = \Gamma_2 s_0(x,y), \qquad s_{n+1}(x,y) = \Gamma_2 s_n(x,y),$$

seront établies, si l'on prouve que la transformation (23) satisfait, avec la metrique (30), à la condition de Lipschitz avec une constante < 1, par exemple 1/2.

Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi pourvu que la constante $\varkappa$ soit suffisamment grande. En effet, en vertu de la condition (29) et du lemme 1, on a pour des fonctions $s(x, y)$ et $\bar{s}(x, y)$ continues dans l'ensemble Δ,

$$|\Gamma_2 s(x,y) - \Gamma_2 \bar{s}(x,y)| \leqslant L^* \cdot \left(2L + \frac{l}{2}\right) \cdot \left(\int_0^x r(u,y)\,du + \int_0^y r(x,v)\,dv\right),$$

où

$$l = \max(a, b), \qquad r(x,y) = \max_{(u,v)\in\Delta_{x,y}} |s(u,v) - \bar{s}(u,v)|$$

pour $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$.

Comme

$$|s(x,y) - \bar{s}(x,y)| \leqslant d(s, \bar{s}) \cdot e^{\varkappa\cdot(x+y)},$$

on a

$$r(x,y) \leqslant d(s, \bar{s}) \cdot e^{\varkappa\cdot(x+y)}$$

et par suite

$$|\Gamma_2 s(x,y)-\Gamma_2\bar{s}(x,y)|\leqslant L^*\cdot\left(2L+\frac{l}{2}\right)\cdot d(s,\bar{s})\cdot\left(\int_0^x e^{\varkappa\cdot(u+y)}du+\int_0^y e^{\varkappa\cdot(x+v)}dv\right)\leqslant$$

$$\leqslant L^*\cdot\left(2L+\frac{l}{2}\right)\cdot d(s,\bar{s})\cdot\frac{2}{\varkappa}\cdot e^{\varkappa\cdot(x+y)}$$

et de là

$$d(\Gamma_2 s,\ \Gamma_2\bar{s})\leqslant L^*\cdot\left(2L+\frac{l}{2}\right)\cdot\frac{2}{\varkappa}\cdot d(s,\bar{s}).$$

En posant donc $\varkappa=4L^*(2L+l/2)$, on obtient

$$d(\Gamma_2 s,\ \Gamma_1\bar{s})\leqslant\frac{1}{2}d(s,\bar{s}).$$

On obtient ainsi, d'une manière beaucoup plus rapide et plus aisée un résultat un peu plus général que celui du travail [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Alexiewicz A. and Orlicz W., *Some remarks on existence and uniqueness of solutions of the hyperbolic equation* $\partial^2 z/\partial x\,\partial y=f(x,y,z,\partial z/\partial x,\partial z/\partial y)$, Studia Math., 15, 2 (1956), p. 201—215.

[2] Bielecki A., *Une remarque sur l'application de la méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la théorie de l'équation* $s=f(x,y,z,p,q)$, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4, 5 (1956), p. 265—268.

[3] Bielecki A. et Kisyński J., *Sur le problème de Goursat relatif à l'équation* $\partial^2 z/\partial x\,\partial y=f(x,y)$, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, 10, 10 (1956), p. 99—126.

[4] Courant R. und Hilbert D., *Methoden der mathematischen Physik*, II Bd., Berlin (1937), p. 317—323.

[5] Goursat E., *Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, 6 (1904), p. 117—144.

[6] ——— *Cours d'analyse mathématique*, 5ème éd., T. III, Paris (1942), p. 123—125.

[7] Hartman P. and Wintner A., *On hyperbolic partial differential equations*, Amer. J. Math., 74 (1952), p. 832—864.

[8] Opial Z., *Sur un système d'inégalités intégrales*, Ann. Polon. Math., 3, 2 (1957), p. 200—209.

[9] Schauder J., *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math., 2 (1930), p. 171—180.

[10] Szmydt Z., *Sur un nouveau type de problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4, 2 (1956), p. 67—72.

[11] ——— *Sur une généralisation des problèmes classiques concernant un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4, 9 (1956), p. 579—584.

Streszczenie

Tematem pracy są dwa problemy dotyczące równania:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right). \tag{1}$$

I. Problem Goursata. Dane są dwie funkcje niemalejące, klasy $C^{(1)}$: $y = g(x)$, gdzie $x \epsilon [0, a]$ i $x = h(y)$, gdzie $y \epsilon [0, b]$, spełniają nierówności $0 \leqslant g(x) \leqslant b$ i $0 \leqslant h(y) \leqslant a$, takie, że początek układu współrzędnych jest jedynym wspólnym punktem ich wykresów.

Chodzi o rozwiązanie $z = z(x, y)$ równania (1), klasy $C^{(*)}$, tzn. ciągłe wraz z pochodnymi z'_x, z'_y i z''_{xy} w obszarze

$$\Delta = \underset{(x,y)}{E} \{h(y) < x < a, \quad g(x) < y < b\},$$

przyjmujące wzdłuż krzywych $y = g(x)$ i $x = h(y)$ wartości te same, co pewna, dana z góry funkcja $\chi(x, y)$.

II. Problem Cauchy'ego. Dane są dwie funkcje $y = g(x)$ i $x = h(y)$, ciągłe i nierosnące odpowiednio w przedziałach $0 \leqslant x \leqslant a$ i $0 \leqslant y \leqslant b$, spełniające tamże warunki: $0 \leqslant g(x) \leqslant b$, $0 \leqslant h(y) \leqslant a$. Ponadto istnieją dwie liczby $a^* \epsilon [0, a]$ i $b^* \epsilon [0, b]$, o tej własności, że $g(0) = b$, $h(0) = a$, $g(a^*) = h(b^*) = 0$, a przy tym funkcja $x = h(y)$, dla $y \epsilon [0, b^*]$, jest odwrotna względem funkcji $y = g(x)$, $x \epsilon [0, a^*]$.

Chodzi o rozwiązanie $z = z(x, y)$ równania (1), klasy $C^{(*)}$ w obszarze Δ, którego pochodne z'_x i z'_y przyjmowały by dane z góry wartości odpowiednio wzdłuż krzywych $y = g(x)$ i $x = h(y)$, a które samo przyjmowałoby z góry daną wartość w jakimś ustalonym punkcie jednej z nich.

W związku z tymi zagadnieniami udowodnione zostały następujące dwa twierdzenia:

Twierdzenie 1. Problem I ma dokładnie jedno rozwiązanie, jeśli spełnione są warunki następujące:

1° funkcja $\chi(x, y)$ jest klasy $C^{(1)}$ w Δ, χ'_x spełnia warunek Lipschitza względem y, a χ'_y — względem x;

2° wszystkie funkcje $d\lambda^i(x)/dx$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, gdzie $\lambda^0(x) = x$, $\lambda^{i+1}(x) = h(g(\lambda^i(x)))$, są wspólnie ograniczone w przedziale $[0, a]$;

3° funkcja $F(x, y, z, p, q)$ jest ciągła dla $(x, y) \epsilon \Delta$ i dowolnych z, p, q, oraz spełnia w tym zakresie nierówność

$$|F(x, y, z, p, q) - F(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \omega(|z - \bar{z}| + |p - \bar{p}| + |q - \bar{q}|), \tag{4}$$

gdzie $\omega(\delta)$ jest funkcją dodatnią dla $\delta > 0$, niemalejącą i ciągłą dla $\delta \geqslant 0$, tatą, że $\omega(0) = 0$ i całka niewłaściwa

$$\int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)}$$

jest rozbieżna w sąsiedztwie prawostronnym zera.

Jeśli funkcja F spełnia analogiczny warunek ze względu na dwie ostatnie tylko zmienne niezależne p i q i czyni zadość nierówności

$$|F(x, y, z, 0, 0)| \leqslant A + B \cdot |z|, \tag{6}$$

gdzie A i B oznaczaj dowolne stałe, to zapewnione jest istnienie niekoniecznie już jednoznacznego rozwiązania.

Twierdzenie 2. Problem II ma dokładnie jedno rozwiązanie, jeśli wartości pochodnych tego rozwiązania są zadane na krzywych $y = g(x)$ i $x = h(y)$ za pomocą funkcji ciągłych i jeśli funkcja $F(x, y, z, p, q)$ spełnia warunek analogiczny, jak w twierdzeniu 1. Słabszy, analogiczny jak poprzednio warunek dotyczący tej funkcji, zapewnia istnienie (niekoniecznie jednoznacznego) rozwiązania.

Dowody polegają na sprowadzeniu problemów do pewnych równań funkcyjnych bez warunków pobocznych. Istnienia rozwiązań tych ostatnich dowodzi się metodą Schauderowską punktu stałego, natomiast dowody jednoznaczności opierają się na twierdzeniu 3:

Twierdzenie 3. Jeśli funkcja $r(x, y)$ ciągła w prostokącie $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, spełnia tam nierówność

$$0 \leqslant r(x, y) \leqslant \varkappa\left(\int_0^x r(u, y)\, du + \int_0^y r(x, v)\, dv\right),$$

gdzie funkcja $\varkappa(\delta)$ ma własności analogiczne, jak wyżej wspomniana funkcja $\omega(\delta)$, to $r(x, y) \equiv 0$ w danym prostokącie.

W przypadku bardziej specjalnym, gdy funkcja $F(x, y, z, p, q)$ spełnia warunek L i p s c h i t z a ze względu na z, p i q, problemy I i II są oczywiście jednoznacznie rozwiązalne, czego w tym przypadku dowodzi się prostszą metodą punktu stałego przekształcenia zbliżającego. Tutaj rozważania mają również charakter nielokalny.

W odniesieniu do problemu I wyzyskane zostały w sposób istotny wyniki zawarte we wcześniejszej pracy wspólnej z A. B i e l e c k i m [3]. Szczególne znaczenie miała tu, przeprowadzona w cytowanej pracy, analiza skomplikowanego przypadku styczności krzywych $y = g(x)$ i $x = h(y)$ odnośnie równania $z''_{xy} = f(x, y)$.

Zawarte w pracy kontrprzykłady wyjaśniają znaczenie niektórych założeń.

Резюме

Темой работы являются две проблемы, относящиеся к уравнениям

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right). \tag{1}$$

I. Проблема Гурса. Даны две функции класса $C^{(1)}$, слабо розрастающие: $y=g(x)$, где $x\epsilon[0,a]$, и $x=h(y)$, где $y\epsilon[0,b]$ выполняющие неравенства: $0\leqslant g(x)\leqslant b$ и $0\leqslant h(y)\leqslant a$, а также условие, чтобы их графики пересекались в одной, единственной точке, именно в начале координат. Полагаем

$$\Delta=\mathop{E}_{(x,y)}\{h(y)\leqslant x\leqslant a,\ \ g(x)\leqslant y\leqslant b\}.$$

Требуется найти в области Δ решение $z=z(x,y)$ уравнения (1) класса $C^{(*)}$, то-есть определенное и непрерывное в Δ вместе с производными z'_x, z'_y и z''_{xy}, принимающие вдоль кривых $y=g(x)$ и $x=f(y)$ те же значения, как заданная функция $\chi(x,y)$.

II. Проблема Коши. Даны две функции $y=g(x)$ и $x=h(y)$, ırерывные и слабо убывающие соответственно в отрезках $0\leqslant x\leqslant a$ и $0\leqslant y\leqslant b$, исполняющие в них условия: $0\leqslant g(x)\leqslant b$, $0\leqslant h(y)\leqslant a$. Сверх того существуют два числа $a^*\epsilon[0,a]$ и $b^*\epsilon[0,b]$ такие, что $g(0)=b$, $h(0)=a$, $g(a^*)=h(b^*)=0$, а при том функция $x=h(y)$, для $y\epsilon[0,b^*]$, обратна относительно функции $y=g(x)$, $x\epsilon[0,a^*]$.

Требуется найти в области Δ решение $z=z(x,y)$ уравнения (1) класса $C^{(*)}$, которого производные z'_x и z'_y принимали бы заданные значения соответственно на кривых $y=g(x)$ и $x=h(y)$, и которое само принимало бы заданное значение в какой нибудь определённой точке одной из них.

В связи с этими проблемами доказаны следующие две теоремы:

Теорема 1. Проблема I имеет в точности одно решение, если исполнены следующие условия:

1° функция $\chi(x,y)$ класса C^1 в Δ, χ'_x выполняет условия Липшица относительно y, χ'_y — относительно x;

2° все функции $d\lambda^i(x)/dx$, $i=0,1,2,\ldots$, где $\lambda^0(x)=x$, $\lambda^{i+1}(x)=h(g(\lambda^i(x)))$ в совокупности ограничены в отрезке $[0,a]$;

3° функция $F(x,y,z,p,q)$ определена и непрерывна для $(x,y)\epsilon\Delta$ и произвольных z, p, q, а также выполняет в этой области неравенство

$$|F(x,y,z,p,q)-F(x,y,\bar z,\bar p,\bar q)|\leqslant\omega(|z-\bar z|+|p-\bar p|+|q-\bar q|) \tag{4}$$

где $\omega(\delta)$ функция положительная для $\delta > 0$, слабо возрастающая и непрерывная для $\delta \geqslant 0$, $\omega(0) = 0$, и несобственный интеграл

$$\int_0^\delta \frac{du}{\omega(u)}$$

расходится в правостороннем соседствие нуля.

Если функция F выполняет аналогичные условие только в отношении двух последних независимых переменных p и q и выполняет неравенство

$$|F(x,y,z,0,0)| \leqslant A + B|z|, \tag{6}$$

где A и B обозначают некоторые постоянные, то ещё гарантировано существование (но уже необязательно однозначного) решения.

Теорема 2. Проблема II имеет в точности одно решение, если значения производных заданы на кривых $y = g(x)$ и $x = h(y)$ с помощью непрерывных функций и функция $F(x, y, z, p, q)$ выполняет условие аналогичное, как в теореме 1. Более слабое, аналогичное, как в предыдущем случае, условие относительно этой функции гарантирует уже существование необязательно однозначного решения.

Доказательства состоят в приведении проблемы к некоторым функционным уравнениям без побочных условий. Существование решений этих уравнений доказывается шаудеровым методом постоянной точки; но доказательства однозначности при более сильных предпосылках опираются на теореме 3.

Теорема 3. Если функция $r(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, выполняет там неравенство

$$0 \leqslant r(x,y) \leqslant \varkappa\left(\int_0^x r(u,y)\,du + \int_0^y r(x,v)\,dv\right),$$

где функция $\varkappa(\delta)$ обладает аналогичными свойствами, как вышеупомянутая функция $\omega(\delta)$, то $r(x, y) \equiv 0$ в данном прямоугольнике.

В более специальном случае, когда функция $F(x, y, p, q)$ выполняет условия Липшица относительно z, p и q, проблемы I и II очевидно разрешены однозначно, что доказывается в этом случае более простым методом постоянной точки приближающего преобразования. И здесь рассуждения имеют нелокальный характер.

Для проблемы I были использованы существенным образом результаты прежней работы сообща с А. Белецким [3]. Особенное значение имел здесь проведенный в цитированном труде анализ сложного случая соприкосновения кривых $y = g(x)$ и $x = h(y)$, относящихся к уравнению $z''_{xy} = f(x, y)$.

Содержащиеся в работе противные примеры объясняют значение некоторых предпосылок.