ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XI, 1 SECTIO A 1957

Z Zakładu Matematyki III, Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr K. Tatarkiewicz

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

Un exemple simple de mouvement non holonome

Prosty przykład ruchu anholonomicznego

Простой пример анголономического движения

§ 1. Introduction

1,1. On rencontre fréquemment des systèmes non holonomes (par exemple la plupart des *jouets* constituent de tels systèmes: bicyclette, cerceau, croquet, etc.). Cependant la place qu'on leur consacre dans divers traités de mécanique rationnelle (Appell [3], p. 371—395, Łojcjański-Łurie [9], p. 281—286 et 399—402, Hamel [8], p. 464—507 et 756—789) ne correspond pas à leur importance.

Cette situation résulte d'un manque des exemples faciles à traiter par des méthodes générales ou particulières. Les exemples de systèmes non holonomes que l'on trouve dans les traités se bornent presque exclusivement à des mouvements de roulement. Leurs solutions conduisent le plus souvent aux fonctions elliptiques (voir par exemple Whittaker [13], p. 217—226 et 234—240). De plus, ces exemples ne fournissent que des liaisons non holonomes linéaires.

1,2. Un exemple basé sur d'autres principes a été indiqué par Appel [1] (voir aussi Appell [3], p. 37—43). Par un choix particulier et artificiel des forces appliquées le mouvemenat de cet exemple peut être déterminé au moyen de quadratures (non élémentaires) et d'une inversion de fonction. De plus, la réalisation physique de ces liaisons (quoique théoriquement possible) n'est pas possible — même approximativement — en pratique.

Encore un autre exemple a été fourni par C. Carathéodory [6] (*„traîneaux de Carathéodory"* — qui ont bien peu de commun avec les traîneaux ordinaires). Le mouvement de ce système se laisse déterminer par des quadratures et, pour certaines valeurs d'un paramètre (qui dépend de la distribution des masses dans les traîneaux) on obtient comme solution même des fonctions élémentaires. Les liaisons non holonomes des traîneaux de Carathéodory peuvent être réalisées uniquement à l'aide du frottment „sec".

Différentes généralisations des traîneaux de Carathéodory sont données par Gran Olson [7], par Łojcjański-Łurie [9], p. 400—402 et par Hamel [8], p. 483—485.

L'exemple d'un système non holonome donné par Bottema [5] a été vivement critiqué. (Son système est regardé comme holonome par Block [4] et comme pseudo-holonome par Tatarkiewicz [12]). D'ailleurs le mouvement exact de ce système est donné par des fonctions non élémentaires.

1,3. Le but de ce travail est de donner un exemple simple et nouveau de mouvement non holonome, que l'on résout par des fonctions élémentaires et dont la réalisation physique est possible non seulement à l'aide du frottement „sec", mais aussi au moyen du frottement visqueux. Dans le § 2 nous étudions certaines liaisons non holonomes. Le § 3 est consacré à notre exemple.

§ 2. Une classe de liaisons non holonomes

2,1. Soit un point matériel de masse m ayant des coordonées (x_1, x_2, x_3), et supposons qu'il soit assujetti aux liaisons:

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{3} a_{\nu\mu}(t, x_1, x_2, x_3)\,\dot{x}_\nu\,\dot{x}_\mu = 0 \tag{1}$$

où $\dot{x}_0 = 1$.

Supposons que pour chaque ensemble de valeurs t, x_1, x_2, x_3 (considérées comme des paramètres) l'équation

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{3} a_{\nu\mu}(t, x_1, x_2, x_3)\,y_\nu\,y_\mu = 0 \tag{2}$$

(où $y_0 = 1$) réprésente, dans l'espace $[y_1, y_2, y_3]$, une sourface du second degré qui ne se réduit pas à des figures linéaires.

Alors l'équation (1) réprésentera des liaisons non holonomes. En effet, notre point aura alors deux dégrés de liberté infinitésimale et trois degrés de liberté intégrale.

2,2. Considérons un cas particulier des liaisons (1), à savoir, les liaisons non holonomes non linéaires

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 = v^2 \tag{3}$$

où $v > 0$ est une constante (L'équation (2) réprésente ici une sphère. Pour $v = 0$ il résulte de (3) $x_i = const.$ — donc les liaisons sont holonomes). C'est A p p e l l [1] qui a déjà remarqué que les liaisons (3) sont non holonomes.

Les liaisons analytiques (1) ne déterminent pas univoquement les réactions des liaisons. Il faut admettre une hypothése supplémentaire. Nous allons supposer que la réaction R_i (où R_i désigne le vecteur qui a comme coordonnées les trois nombres R_1, R_2, R_3) vérifie la condition

$$\dot{x}_i \parallel R_i. \tag{4}$$

La réaction R_i est déterminée univoquement par les conditions (1) et (4) (donc aussi par (3) et (4)).

En dérivant (3) nous obtenons

$$\sum_{\nu=1}^{3} \dot{x}_\nu \ddot{x}_\nu = 0, \tag{5}$$

c'est-à-dire l'accélération est normale à la vitesse.

Soit une force donnée F_i. Décomposons-la et la réaction R_i en composantes parallèles et normales à $\dot{x}_i$ (à la tangente de la trajectoire). Nous aurons

$$F_i = F_i^{\perp} + F_i^{\parallel}, \qquad R_i = R_i^{\perp} + R_i^{\parallel}. \tag{6}$$

Vu (4)

$$R_i^{\perp} = 0\,. \tag{7}$$

Les équations du mouvement sont

$$m\,\ddot{x}_i = F_i + R_i. \tag{8}$$

C'est-à-dire, vu (6) et (7),

$$m\,\ddot{x}_i = F_i^{\perp} + F_i^{\parallel} + R_i^{\parallel}.$$

Mais de (5) il vient que la composante de $\ddot{x}_i$ parallèle à $\dot{x}_i$ doit être nulle. Il s'ensuit que

$$F_i^{\parallel} + R_i^{\parallel} = 0$$

et les équations du mouvement ont la forme

(9) $$m\ddot{x}_i = F_i^{\perp}.$$

Comme condition supplémentaire la formule (3) doit être vérifiée pour un t_0 donnée (elle est alors vérifiée pour tous les t).

2,3. Trouvons la forme analytique de (9). Substituons dans (5) $\ddot{x}_i$ calculé de (8). Nous aurons

$$\sum_{\nu=1}^{3} \dot{x}_\nu (F_\nu + R_\nu) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\nu=1}^{3} \dot{x}_\nu F_\nu = -\sum_{\nu=1}^{3} \dot{x}_\nu R_\nu .$$

Vu (3) et (4) on a

$$\sum_{\nu=1}^{3} \dot{x}_\nu R_\nu = \pm vR$$

où

$$R^2 \underset{df}{=} \sum_{\nu=1}^{3} R_\nu^2 .$$

Donc

$$R_i = \pm R \frac{\dot{x}_i}{v} = -\sum_{\nu=1}^{3} F_\nu \dot{x}_\nu \cdot \frac{\dot{x}_i}{v^2} .$$

Il s'ensuit

(10) $$m\ddot{x}_i = F_i - \sum_{\nu=1}^{3} F_\nu \dot{x}_\nu \cdot \frac{\dot{x}_i}{v^2} .$$

Le système d'équations (10) (d'ordre 6) avec la condition supplémentaire (3) vérifiée pour un t_0 donnée, détermine le mouvement du point.

2,4. On peut trouver un système d'équations dans lequel (3) *ne joue plus le rôle d'une condition supplémentaire*. En effet, supposons que

$$g^2 \underset{df}{=} \sum_{\nu=1}^{3} \ddot{x}_\nu^2 > 0 .$$

Vu (5) on a $\ddot{x}_i \perp \dot{x}_i$, donc de (4) et de (6) il s'ensuit donc,

$$F_i^{\perp} = \sum_{\nu=1}^{3} F_\nu \ddot{x}_\nu \cdot \frac{\ddot{x}_i}{g^2} .$$

De (9) il s'ensuit

$$m\ddot{x}_i = \sum_{\nu=1}^{3} F_\nu \ddot{x}_\nu \cdot \frac{\ddot{x}_i}{g^2}. \tag{11}$$

En calculant le produit scalaire de (11) avec $\ddot{x}_i$ on obtient

$$m\sum_{\nu=1}^{3} \ddot{x}_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{3} F_\nu \ddot{x}_\nu. \tag{12}$$

Cette dernière formule est vérifiée même dans le cas où $g = 0$.

Enfin vu (4) et (8), la vitesse $\dot{x}_i$, l'accélération $\ddot{x}_i$ et la force donnée F_i doivent être dans le même plan, donc

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \ddot{x}_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Vu leurs interprétations géométriques les équations (3), (12), (13) sont indépendantes et forment un système d'équations d'ordre 5, qui détermine univoquement le mouvement de notre point.

2,5. On peut encore trouver d'autres systèmes d'équations déterminant notre mouvement. Vu (5) les déplacement virtuels δx_i doivent vérifier l'équation

$$\sum_{\nu=1}^{3} \dot{x}_\nu \delta x_\nu = 0.$$

Il s'ensuit que si les réactions vérifient — comme nous l'avons supposé — la formule (4), alors

$$\sum_{\nu=1}^{3} R_\nu \delta x_\nu = 0.$$

C'est-à-dire que les liaisons analytiques (3) avec les réactions vérifiant (4) sont des liaisons *à travail virtuel nul* (voir — par exemple — Appell [2], p. 10). Il s'ensuit (voir — par exemple — Przeborski [10] ou bien Przeborski [11], p. 269) que le mouvement de notre point vérifie les équations de Lagrange du premier genre généralisées

$$m\ddot{x}_i = F_i + \lambda \dot{x}_i. \tag{14}$$

Les équations (14) avec la condition (3) déterminent notre mouvement.

Il est facile, et assez intéressant, de former encore d'autres équations de notre problème en employant les équations générales de la dynamique, par exemple les équations d'A p p e l l, de M a g g i etc. Il est à remarquer que les équations de Lagrange du second genre généralisées aux systèmes non holonomes (voir — par exemple — W h i t t a k e r [12], p. 215) seront, dans notre probléme, identiques aux équations (14).

2,6. Les résultats obtenus se laissent facilement appliquer aux liaisons non holonomes unilatérales

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_2^2 \geqslant v^2 > 0$$

ou bien

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_2^2 \leqslant v^2 > 0.$$

De même il est facile de généraliser les équations obtenues aux systèmes de points et aux mouvements des corps solides.

§ 3. Un exemple: la descente d'un alpiniste

3,1. Etudions maintenant le mouvement d'un point de masse m assujetti aux liaisons (3) dont la réaction vérifie (4) et sollicité par une force constante. Nous nous bornerons *aux mouvements plans*, soit en considérant le mouvement dans le plan de la trojectoire (il est bien connu que le mouvement sous l'influence d'une force constante et d'une force parallèle à la vitesse est plan), soit en introduisant de liaisons nouvelles (holonomes) obligeant notre point de se mouvoir dans un plan donné.

Ce dernier cas a une intéressante interprétation physique. Supposons que ce plan soit incliné et le point matériel se meuve sous la seule influence de la pesanteur et du frottement. Supposons, en plus, que ce point soit pourvu d'un dispositif automatique qui régle la force du frottement de telle sorte que la valeur absolue de sa vitesse soit constante. Ce dispositif peut être réalisé — par exemple — par un *alpiniste* qui glisse le long d'une pente glacée et qui régle la force de l'appui sur son piolet de telle sorte que la valeur absolue de sa vitesse soit constante. (Évidemment il faut supposer que l'alpiniste n'est pas soumis à des mouvements relatifs par rapport au point d'application du piolet à la pente — voir d'ailleurs les généralisations indiquées au n° 2,6).

3,2. Les liaisons non holonomes de la descente d'un alpiniste peuvent être réalisées non seulement à l'aide d'un frottement „sec", c'est-à-dire un frottement qui fait naître des forces indépendantes de la vitesse. Elles peuvent aussi être réalisées par un frottement visqueux, c'est-à-dire un frottement qui fait naître des forces dépendantes de la vitesse (le plus souvent proportionelles à la vitesse).

Ce frottement visqueux nous fournira une réalisation physique même dans le cas où les liaisons sont formées uniquement par (3) et il n'y a pas de liaisons holonomes supplémentaires. Nos suppositions seront alors réalisées — par exemple — par un *parachutiste* qui change convenablement la surface de son parachute.

3,3. Pour fixer les idées supposons l'absence d'autres liaisons que (3). Choisissons un système de coordonnées tel que notre plan du mouvement ait comme équation $x_3 = 0$ et les coordonnées de notre force constante soient

$$F_1 = 0,\ F_2 = ma,\ F_3 = 0$$

où $a > 0$. Pour simplifier les formules posons $x = x_1$, $y = x_2$.

Le système d'équations le plus simple, déterminant notre mouvement est formé par les équations (3) et (12). (Dans notre cas de mouvement plan l'équation (13) sera vérifiée *identiquement*). C'est-à-dire

(15) $$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2,$$

(16) $$m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) = ma\ddot{y}.$$

Posons

(17) $$\xi = \dot{x}, \qquad \eta = \dot{y}.$$

Nous obtenons de (15) et de (16)

(18) $$\xi^2 + \eta^2 = v^2,$$

(19) $$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = a\dot{\eta}.$$

Supposons qu'à l'instant initial t_0 du mouvement on ait

(20) $$|\eta| \neq v,$$

c'est-à-dire

$$\xi \neq 0.$$

En éliminant la fonction ξ de (18) et de (19) on obtient

(21) $$\dot{\eta} = \frac{a}{v^2}(v^2 - \eta^2).$$

L'équation (21) est à variables séparées. En intégrant nous obtenons

$$\ln\left|\frac{v+\eta}{v-\eta}\right| = \frac{2a}{v}t + 2C$$

où C est une constante arbitraire.

Donc

$$\pm\frac{v+\eta}{v-\eta}=\exp 2\left[\frac{a}{v}t+C\right]. \tag{22}$$

Vu (18) il doit être

$$\frac{v+\eta}{v-\eta}>0,$$

il faut donc, dans (22), choisir le signe „+".

De (22) il s'ensuit que

$$\eta(t)=v\,\frac{\exp 2\left[\frac{a}{v}t+C\right]-1}{\exp 2\left[\frac{a}{v}t+C\right]+1}=v\,\mathrm{th}\left[\frac{a}{v}t+C\right]. \tag{23}$$

De (23) on voit que la condition (20) est vérifiée non seulement pour $t=t_0$, mais aussi pour tous les t, donc les formules obtenues sont valables pour tout t (si pour $t=t_0$ la formule (20) est vérifiée).

La condition (18) donne

$$\xi(t)=\pm\sqrt{v^2-\eta^2}=\pm v\,\mathrm{sch}\left[\frac{a}{v}t+C\right]. \tag{24}$$

En intégrant (24) et (23) nous obtenons, vu (17), la solution générale de notre problème.

$$x(t)=A\pm\frac{v^2}{a}\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{sh}\left[\frac{a}{v}t+C\right], \tag{25}$$

$$y(t)=B+\frac{v^2}{a}\ln\mathrm{ch}\left[\frac{a}{v}t+C\right] \tag{26}$$

où A, B, C sont des constantes arbitraires, qui sont déterminées par les conditions initiales (de même que le signe „$\pm$" dans (25) qui est déterminé par $\operatorname{sgn}\dot{x}(t_0)$).

La solution de notre problème est donc donnée par des fonctions élémentaires.

Par exemple si nous exigeons que pour $t_0=0$ on ait $x(0)=0=y(0)$ et que $\dot{x}(0)=v$ (vu (3) ou bien (15) il s'ensuit $\dot{y}(0)=0$) alors

$$x(t)=\frac{v^2}{a}\,\mathrm{arctg}\ \mathrm{sh}\,\frac{a}{v}\,t,$$

$$y(t)=\frac{v^2}{a}\ln\mathrm{ch}\,\frac{a}{v}\,t.$$

3,4. On peut obtenir d'une manière presque aussi facile l'équation (21) en partant du système (3) et (10). Il existe d'ailleurs quelques autres méthodes menant à la solution de notre problème. Par exemple en introduisant des équations $\dot{x} = v \cos e$, $\dot{y} = v \sin e$ contenant une variable de Maggi e (sous la supposition $x_3 = 0$, ces équations sont équivalentes aux liaisons (3)) et en employant l'équation d'Appell. La méthode employée au n° 3,3 semble être la plus simple et la plus élémentaire.

3,5. Les équations (25) et (26) sont des équations paramétriques de la trajectoire. En éliminant le temps de ces deux équations on obtient l'équation normale de la trajectoire. Ce qui est intéressant, c'est qu'elle aura comme second membre aussi une *fonction élémentaire*. En effet il s'ensuit de (25) que

$$\operatorname{sh}\left|\frac{a}{v}t + C\right| = \pm \operatorname{tg}\frac{a(x-A)}{v^2},$$

donc

$$\operatorname{ch}^2\left|\frac{a}{v}t + C\right| = 1 + \operatorname{sh}^2\left|\frac{a}{v}t + C\right| = 1 + \operatorname{tg}^2\frac{a(x-A)}{v^2} = \sec^2\frac{a(x-A)}{v^2}$$

et

(27) $$y = B - \frac{v^2}{a}\ln\cos\frac{a(x-A)}{v^2}.$$

C'est une courbe qui est contenue antre deux asymptotes verticales. La distance entre ces deux asymptotes est égale à $\pi v^2/a$.

3,6. Considérons encore le cas, exclu ci-dessus, où l'on à l'instant initial, $\xi = 0$, c'est-à-dire $|\eta| = v$. Etant donné que nous aurons alors $v_i \parallel F_i$ le mouvement sera rectiligne et uniforme. Pour $\eta = v$ le mouvement sera *stable*, et pour $\eta = -v$ il sera *non stable* (c'est-à-dire un petit chagement des conditions initiales pourra avoir comme conséquence des changements considérables de la trajectoire).

3,7. Il est à remarquer que tous les mouvements de notre système (considérés au n° 3,3 et au n° 3,6) sont des mouvements non holonomes (voir Tatarkiewicz [12]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Appell P., *Exemple de mouvement d'un point assujetti à une liaison exprimée par une relation non linéaire entre les composantes de la vitesse*, Rend. Circ. Mat. Palermo **32** (1911) p. 48—50.

[2] ——— *Sur une forme générale des équations de la dynamique*, Mem. Sc. Math. **1** Paris 1925.

[3] ——— *Traité de Mécanique Rationnelle* t. 2, Paris 1931.

[4] Block H. D. *Compte rendu de „O. Bottema, Note on a non holonomic system"*, Math. Rev. **17** (1956) p. 203.

[5] Bottema O., *Note on a non holonomic system*, Quart. Appl. Math. **13** (1955) p. 191—192.

[6] Carthéodory C., *Der Schlitten*, Zeit. f. angew. Math. Mech. **13** (1933) p. 71—76.

[7] Gran Olsson R., *On the analogy of some Problems of Dynamics of Mass points and Rigid Bodies II*, Norske Vis. Selsk. Forh. Trondheim **28** (1955) p. 46—53.

[8] Hamel G., *Theoretische Mechanik*, Berlin 1949.

[9] Łojcjańskij, A. G., A. I. Łurie, *Kurs Tieoreticzeskoj Miechaniki* t. 2, Moskwa 1955.

[10] Przeborski A., *Die allgemeinsten Gleichungen der klassischen Dynamik*, Math. Zeit. **36** (1933) p. 184—194.

[11] ——— *Wykłady mechaniki teoretycznej* t. 2 Warszawa 1935.

[12] Tatarkiewicz K., *Sur la notion des liaisons*, à paraître Ann. UMCS (A) **12**.

[13] Whittaker E. T., *Analytical Dynamics*, New York 1944.

Streszczenie

1. W przyrodzie i w technice często spotyka się układy anholonomiczne, lecz mimo to podręczniki poświęcają im bardzo mało miejsca. Jedną z przyczyn tego stanu rzeczy jest fakt, iż przykłady będące zastosowaniem ogólnych wzorów dynamiki układów aholonomicznych (i to zarówno dawniejsze, oparte na toczeniu się ciał, jak i nowsze, będące wariantami sanek Carathéodory'ego) prawie nigdy nie posiadają rozwiązań elementarnych.

Praca ma na celu omówienie nowego przykładu ruchu anholonomicznego, który daje się rozwiązać *elementarnie.*

2. Rozpatruję mianowicie ruch (na płaszczyźnie lub w przestrzeni) punktu, o masie m, którego więzy anholonomiczne dane są wzorem

$$v\,(t) = const. > 0$$

i który porusza się pod wpływem stałej siły.

Zakładając, iż ruch odbywa się na płaszczyźnie $x_3 = 0$ i że układ odniesienia obrano tak by siła (stała z założenia) miała za współrzędne $F_1 = 0$, $F_2 = ma$ $(a > 0)$ można łatwo utworzyć układy równań ruchu tego punktu. Prawdopodobnie najprostszym takim układem jest układ (15), (16) w którym położono $x = x_1$, $y = x_2$. Równania te dają się rozwiązać elementarnie (wzory (25) i (26)).

Ciekawą jest rzeczą, iż krzywa po której porusza się punkt, a której równaniami parametrycznymi są (25) i (26), ma też *elementarną* postać normalną (27).

3. Ruch naszego punktu realizuje — na przykład — *taternik* ześlizgujący się po zalodzonym zboczu i regulujący tak nacisk swego czekana na lód, by wartość bezwzględna prędkości była stała.

Innym przykładem realizacji (w przestrzeni) może być *spadochroniarz* uzyskujący podobny efekt regulowaniem powierzchni spadochronu.

Резюме

1. В природе и в технике часто встречаются неголономные системы, но, несмотря на это, учебники посвящают им очень мало места. Одной из причин этого положения является то, что примеры применения общих формул динамики неголономных систем (как прежние, основанные на качении тел, так и более новые, являющиеся видоизменением санок Каратеодори) почти никогда не имеют элементарных решений.

Эта работа имеет целью продискутировать новый пример неголономного движения, разрешимый элементарно.

2. Именно, я рассматриваю движение (на плоскости или в пространстве) точки с массою m, неголомные связи которой даны формулою

$$v(t) = const. > 0$$

и которая движется под действием постоянной силы.

Полагая, что движение происходит в плоскости $x_3=0$, и что система координат выбрана так, чтобы сила (постоянная по условию) имела составляющими $F_1=0$, $F_2=ma$ $(a>0)$, можно легко составить системы уравнений движения этой точки. Вероятно, простейшей такой системой является система (15), (16), в которой $x=x_1$, $y=x_2$. Эти уравнения разрешимы элементарно: формулы (25) и (26).

Интересно, что кривая, по которой движется точка, и которой параметрическими уравнениями являются (25) и (26), имеет тоже элементарный вид нормального уравнения (27).

3. Движение нашей точки осуществляет, например, альпинист, соскальзывающийся по обледенелому склону, регулируя давление на лёд своего лёдоруба так, чтобы абсолютная величина скорости была постоянная.

Другим примером (в пространстве) может быть парашютист, достигающий аналогичный эффект регулированием поверхности парашюта

ADDITION EN EPREUVES

L'idée des traineaux de Carathéodory peut être trouvée deja chez A. Brill, *Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik Raumerfüllender Massen*, Leipzig 1909, pages 30—32, sous le nom de planimétre de Prytz. Récemment les résultats de Carathéodory furent généralisés par G. Aumann, *Der Raumschlitten*, Zeit. f. Angew. Math. Mech. 36 (1956), p. 433—436.