ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. X, 8 SECTIO A 1956

Z Zakładu Matematyki I Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki

ZDZISŁAW LEWANDOWSKI

Nouvelles remarques sur les théorèmes de Schild relatifs à une classe de fonctions univalentes (Démonstration d'une hypothèse de Schild)

Dalsze uwagi o twierdzeniach Schilda dotyczących pewnej klasy funkcji jednolistnych. (Dowód hipotezy Schilda)

Дальнейшие замечания о теоремах Шильда, относящихся к некоторому классу однолистных функций (доказательство гипотезы Шильда)

§ 1. Désignons par S_p la classe des fonctions régulières et univalentes dans le cercle $|z|<1$ et multivalentes dans tout cercle plus grand. A. Schild [2] a étudié la classe des polynomes de la forme $f_p(z)=z-\sum_2^N a_n z^n$, $N\geqslant 2$, à coefficients réels et non négatifs. Is a prouvé que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynome $f_p(z)$ appartienne à la classe S_p s'exprime par l'égalité:

$$1-\sum_2^N na_n=0. \tag{1}$$

En profitant de l'égalité (1) Schild a établi dix théorèmes sur les propriétés de la représentation conforme du cercle unité et du cercle $|z|<\frac{1}{2}$ par les polynomes $f_p(z)\in S_p$. Voici, en particulier, le théorème 7:

Pour toute fonction $f_p(z)\in S_p$ on a l'inégalité: $d^0/d^*\geqslant 2/3$, où d^0 et d^* sont les rayons des plus grands cercles de centre à l'origine recouverts respectivement par l'image du cercle $|z|\leqslant r_0$ (r_0 — rayon de convexité de la fonction $f_p(z)\in S_p$) et par l'image du cercle unité.

Supposant que l'évaluation $d^0/d^*\geqslant 2/3$ n'était pas exacte, Schild a énoncé l'hypothèse que $d^0/d^*\geqslant 3/4$, suggérée par le fait que pour la fonction $f_p^*(z)=z-z^2/2$, extrémale dans la famille de polynomes considérée $f_p(z)\in S_p$, on a l'égalité $d^0/d^*=3/4$.

Dans le travail [1] j'ai étudié une famille Φ plus générale de fonctions analytiques de la forme $f(z) = z + \sum_2^\infty a_n z^n$ satisfaisant à la condition

$$(1') \qquad 1 - \sum_2^\infty n\,|a_n| \geq 0,$$

où a_n sont des nombres complexes, et j'ai démontré que la plupart des théorèmes établis par Schild pour les polynomes $f_p(z) \in S_p$ subsiste pour les fonctions de la classe Φ.

Dans cet article, je me propose de démontrer l'hypothèse de Schild pour les polynomes $f_p(z) \in S_p$. Dans la suite, le symbole $f_p(z)$ désignera toujours des polynomes de la forme $z - \sum_2^N a_n z^n$ qui satisfont à la condition (1).

§ 2. Pour la classe des polynomes considérés $f_p(z)$ on a:

$$|f_p(z)| \geq f_p(|z|), \qquad |z| < 1,$$

car

$$|f_p(z)| = \left|z - \sum_2^N a_n z^n\right| \geq |z| - \left|\sum_2^N a_n z^n\right| \geq |z| - \sum_2^N a_n |z|^n = f_p(|z|),$$

par conséquent

$$d^0 = f_p(r) - f_p(0) = f_p(r); \quad d^* = f_p(1) - f_p(0) = f_p(1),$$

où r satisfait à l'égalité

$$(2) \qquad \frac{r f_p''(r)}{f_p'(r)} + 1 = 0.$$

De l'égalité (2) on obtient $r f_p''(r) = -f_p'(r)$, c'est-à-dire

$$-\sum_2^N n(n-1)\, a_n r^{n-1} = -1 + \sum_2^N n\, a_n r^{n-1},$$

donc

$$(2') \qquad \sum_2^N n^2 a_n r^{n-1} = 1.$$

$$\frac{d^0}{d^*} = \frac{f_p(r)}{f_p(1)} = \frac{r - \sum_2^N a_n r^n}{1 - \sum_2^N a_n}.$$

Etant données les conditions (2') et (1) le numérateur et le dénominateur de la dernière fraction sont positifs, donc l'inégalité $d^0/d^* \geqslant 3/4$ est équivalente à l'inégalité:

$$\Phi(a_2, \ldots, a_N, r) = 4r - 4\sum_{2}^{N} a_n r^n - 3 + 3\sum_{2}^{N} a_n \geqslant 0,$$

où a_n et r satisfont à (1) et (2').

Je vais montrer que la fonction $\Phi(a_2, \ldots, a_N, r)$, assujettie aux conditions (1) et (2') est non négative et que, par conséquent, $d^0/d^* \geqslant 3/4$. J'établirai d'abord quelques lemmes qui seront utiles dans la suite.

§ 3. Considérons la fonction:

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt[x-1]{\frac{1}{x}}, \quad x > 2.$$

Sa dérivée est:

$$g'(x) = \sqrt[x-1]{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{x}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\ln\frac{1}{x} - \frac{1}{x(x-1)}\right)\right].$$

Donc $g' > 0$ pour les x qui satisfont à l'inégalité

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{x}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\ln\frac{1}{x} - \frac{1}{x(x-1)}\right) > 0;$$

après quelques transformations faciles nous obtenons:

$$\ln x > 2\,\frac{x-1}{x+1}. \tag{3}$$

L'inégalité (3) étant vérifiée pour $x = 2$, puisque

$$\ln 2 > \frac{2}{3}, \qquad 2 > \sqrt[3]{e^2} = \sqrt[3]{7{,}389\ldots} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} > \frac{4}{(x+1)^2}$$

pour $x > 1$ (cela signifie que la dérivée du membre gauche de (3) est plus grande que celle du membre droit pour $x > 1$), on a $g'(x) > 0$ pour $x > 2$, puisque l'inégalité (3) est alors vérifiée. La fonction

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt[x-1]{\frac{1}{x}}$$

est donc croissante pour $x \geqslant 2$. On obtient ainsi:

Lemme 1. *Chaque terme de la suite croissante*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

satisfait à l'inégalité

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}>\frac{3}{4}.$$

La preuve est immédiate, car il suffit de poser $n=2$ et on a

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\sqrt[1]{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}.$$

Pour $n>2$ on a l'inégalité forte.

Lemme 2. *La suite* $\sqrt[n-1]{1/n}$ $(n=2,3,\ldots)$ *est croissante.*

La preuve est aussi immédiate, car la suite $(1+1/n)\sqrt[n-1]{1/n}$ est croissante, la suite $(1+1/n)$ est décroissante, donc $\sqrt[n-1]{1/n}$ croît.

Lemme 3. *Si* $k, j \in (2,3,\ldots)$, $k>j$, *alors* $\sqrt[k-1]{1/k}<\sqrt[k-j]{j/k}$.

Démonstration. En vertu du lemme 2 on a $\sqrt[k-1]{k}<\sqrt[j-1]{j}$, donc $k^{j-1}<j^{k-1}$ et $k^{k-1}/k^{k-j}<j^{k-1}$, et enfin $(1/k)^{k-j}<(j/k)^{k-1}$, c. q. f. d.

Je vais établir encore deux lemmes dont nous ne profiterons pas dans la suite; ils sont toutefois intéressants par leur rapport à l'hypothèse de Schild.

Lemme 4. *Les notations étant celles des §§ 1 et 2, l'inégalité* $r\geqslant 3/4$ *entraîne* $d^0/d^*\geqslant 3/4$.

Démonstration.

$$\frac{d^0}{d^*}=\frac{r-\sum\limits_2^N a_n r^n}{1-\sum\limits_2^N a_n}\geqslant\frac{\frac{3}{4}\left(1-\sum\limits_2^N a_n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)}{1-\sum\limits_2^N a_n}>\frac{\frac{3}{4}\left(1-\sum\limits_2^N a_n\right)}{1-\sum\limits_2^N a_n}=\frac{3}{4}\,,\quad \text{c. q. f. d.}$$

Lemme 5. *Si* $a_2=a_3=\ldots=a_8=0$, alors $r>3/4$ (je dois ce lemme à M. M. Biernacki).

Démonstration. Des conditions (1) et (2') il vient:

$$\varphi(r)=\sum_9^N n\,a_n\,(n\,r^{n-1}-1)=0\,.$$

Le membre gauche de cette égalité est une fonction croissante de r. Comme $\sqrt[9-1]{1/9}>0{,}76\ldots>3/4$, on obtient, en vertu du lemme 2: $\sqrt[n-1]{1/n}>3/4$ pour $n\geqslant 9$, c'est-à-dire $n(3/4)^{n-1}-1<0$, d'où $\varphi(3/4)<0$, donc a fortiori $\varphi(r)<0$ pour $r<3/4$. Par conséquent $r>3/4$, c.q.f.d.

§ 4. Schild a montré [2] que toute fonction $f_p(z)$ transforme le cercle $|z| < 1/2$ en un domaine convexe. On a donc $r \geqslant 1/2$. On voit aussi immédiatement, en tenant compte de (1), que $0 \leqslant a_j \leqslant 1/j$, $j = 2, 3, \dots, N$. Etudions maintenant la fonction $\Phi(a_2, \dots, a_N, r)$ dans le parallélépipède rectangle

$$P \left| \begin{array}{l} 0 \leqslant a_j \leqslant \dfrac{1}{j}, \\ \dfrac{1}{2} \leqslant r \leqslant 1, \end{array} \right. \qquad j = 2, 3, \dots, N$$

avec les conditions

$$\sum_2^N n\, a_n = 1, \qquad \sum_2^N n^2 a_n r^{n-1} = 1.$$

La fonction $\Phi(a_2, \dots, a_N, r)$ est linéaire par rapport aux variables $a_2, a_3, \dots, a_N$ et elle est définie sur une variété linéaire par rapport à ces variables, c'est-à-dire sur un „segment". Elle est donc constante sur ce „segment" ou bien elle atteint ses extrema aux extrémités de ce „segment". Pour étudier les extrema de la fonction Φ on peut donc assigner à un a_j, où $2 \leqslant j \leqslant N$, la valeur qu'il prend aux extrémités, c'est-à-dire étudier Φ pour $a_j = 0$ ou pour $a_j = 1/j$. Considérons ces deux cas:

α) $a_j = 1/j$. Alors, en vertu de (1) on a $a_k = 0$ pour $k \neq j$, $f_p(z)$ est donc de la forme: $f_p(z) = z - z^j/j$. Dans ce cas il vient

$$\frac{d^0}{d^*} = \frac{r_0 - \dfrac{1}{j} r_0}{1 - \dfrac{1}{j}}, \quad \text{où} \quad j^2 \cdot \frac{1}{j} r_0^{j-1} = 1,$$

d'où $r_0 = \sqrt[j-1]{1/j}$. Nous avons donc

$$\frac{d^0}{d^*} = \frac{\sqrt[j-1]{\dfrac{1}{j}} - \dfrac{1}{j} \cdot \dfrac{1}{j} \sqrt[j-1]{\dfrac{1}{j}}}{1 - \dfrac{1}{j}} = \left(1 + \frac{1}{j}\right) \sqrt[j-1]{\frac{1}{j}} \geqslant \frac{3}{4}$$

en vertu du lemme 1, où l'égalité n'a lieu que pour $j = 2$. Donc, pour les valeurs prises par a_j aux extrémités, dans le cas α) la fonction Φ est non négative.

β) $a_j = 0$. Dans ce cas il s'agit d'étudier la fonction $\Phi(a_2, a_3, \dots, a_{j-1}, 0, a_{j+1}, \dots, a_N, r) = \Phi^*(a_2, a_3, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, r)$, assujettie aux mêmes conditions (1) et (2') que la fonction $\Phi(a_2, a_3, \dots, a_N, r)$. En répétant le raisonnement précédent on arrive à la conclusion qu'un extremum possible de la fonction $\Phi(a_2, ..., a_N, r)$ dans le parallélépipède rectangle P, soumise aux conditons (1) et (2'), doit être fourni par une fonction Φ correspondant aux polynomes $f_p(z)$ qui ont deux termes de degré $\geqslant 2$. Les polynomes à un terme correspondent au cas a), l'hypothèse de S c h i l d est donc vérifiée pour eux. Le résultat final de ce travail sera établi si nous prouvons que les fonctions $\Phi(a_j, a_k, r)$ correspondant aux polynomes $f_p(z) = z - a_j z^j - a_k z^k$ sous les conditions $j a_j + k a_k = 1$, $j^2 a_j r^{j-1} + k^2 a_k r^{k-1} = 1$ sont non négatives.

§ 5. Soient $k, j \in (2, 3, ...)$, $k > j$, et $f_p(z) = z - a_j z^j - a_k z^k$, où

$$(4) \qquad j a_j + k a_k = 1, \qquad j^2 a_j r^{j-1} + k^2 a_k r^{k-1} = 1,$$

$$\Phi(a_j, a_k, r) = 4r - 4 a_j r^j - 4 a_k r^k - 3 + 3 a_j + 3 a_k.$$

En vertu de (4) on a

$$(5) \qquad a_j = \frac{1 - k r^{k-1}}{j^2 r^{j-1} - j k r^{k-1}}, \qquad a_k = \frac{j r^{j-1} - 1}{j k r^{j-1} - k^2 r^{k-1}},$$

ou, en réduisant aux mêmes dénominateurs:

$$(5') \qquad a_j = \frac{k - k^2 r^{k-1}}{j^2 k r^{j-1} - j k^2 r^{k-1}}, \qquad a_k = \frac{j^2 r^{j-1} - j}{j^2 k r^{j-1} - j k^2 r^{k-1}}.$$

Déterminons l'intervalle de variation de r en profitant de la condition $a_j < 1/j$, $a_k \leqslant 1/k$.

1) Soit $j^2 k r^{j-1} - j k^2 r^{k-1} > 0$; alors $jk - jk^2 r^{k-1} < j^2 k r^{j-1} - j k^2 r^{k-1}$ et $j^2 k r^{j-1} - jk < j^2 k r^{j-1} - j k^2 r^{k-1}$. Par conséquent les inégalités $r > \sqrt[j-1]{1/j}$ et $r < \sqrt[k-1]{1/k}$ et aussi $r < \sqrt[k-j]{j/k}$ doivent être satisfaites simultanément. Comme, d'après les lemmes 2 et 3, on a $\sqrt[j-1]{1/j} < \sqrt[k-1]{1/k} < \sqrt[k-j]{j/k}$, donc nous obtenons dans le cas 1) la limitation suivante pour r:

$$(6) \qquad \sqrt[j-1]{\frac{1}{j}} < r < \sqrt[k-1]{\frac{1}{k}}.$$

2) En posant $j^2 k r^{j-1} - j k^2 r^{k-1} < 0$ et en tenant compte des conditions $a_j < 1/j$, $a_k < 1/k$, nous avons $jk - jk^2 r^{k-1} > j^2 k r^{j-1} - j k^2 r^{k-1}$ et $j^2 k r^{j-1} - - jk > j^2 k r^{j-1} - j k^2 r^{k-1}$. De là nous déduisons les inégalités $r < \sqrt[j-1]{1/j}$ et $r > \sqrt[k-1]{1/k}$, ainsi que $r > \sqrt[k-j]{j/k}$ qui ne peuvent être satisfaites simultanément, puisque, en vertu des lemmes 2 et 3, on a $\sqrt[j-1]{1/j} < \sqrt[k-1]{1/k} < \sqrt[k-j]{j/k}$. Dans le cas 2) nous n'obtenons rien de nouveau pour la limitation de r.

Le cas $j^2 k r^{j-1} - j k^2 r^{k-1} = 0$ ne peut avoir lieu, car on aurait alors $r = \sqrt[k-j]{j/k}$ et, pour cette valeur de r, les numérateurs dans (5′) ne sont pas nuls en vertu des lemmes 2 et 3, donc a_j et a_k seraient infinis, ce qui est impossible.

Comme a_j et a_k sont des fonctions de r en vertu de (5′), $\Phi(a_j, a_k, r)$ ne sera fonction que de r et il s'agira de l'étudier dans l'intervalle $\langle \sqrt[j-1]{1/j},\ \sqrt[k-1]{1/k} \rangle$.

Soit $\Phi(a_j, a_k, r) = \varphi(r)$. Alors on a

$$\varphi(r) = \Phi(a_j, a_k, r) = 4r - 4\frac{k r^j - k^2 r^{k+j-1}}{j^2 k r^{j-1} - j k^2 r^{k-1}} - 4\frac{j^2 r^{k+j-1} - j r^k}{j^2 k r^{j-1} - j k^2 r^{k-1}} -$$

$$- 3 + 3\frac{k - k^2 r^{k-1}}{j^2 k r^{j-1} - j k^2 r^{k-1}} + 3 \cdot \frac{j^2 r^{j-1} - j}{j^2 k r^{j-1} - j k^2 r^{k-1}} =$$

$$= [4 j^2 k r^j - 4 j k^2 r^k - 4 k r^j + 4 k^2 r^{k+j-1} - 4 j^2 r^{k+j-1} + 4 j r^k - 3 j^2 k r^{j-1} +$$

$$+ 3 j k^2 r^{k-1} + 3k - 3 k^2 r^{k-1} + 3 j^2 r^{j-1} - 3j] : [j^2 k r^{j-1} - j k^2 r^{k-1}] =$$

$$= [4(k^2 - j^2) r^{k+j-1} - 4j(k^2 - 1) r^k + 4k(j^2 - 1) r^j + 3k^2(j-1) r^{k-1} -$$

$$- 3 j^2 (k-1) r^{j-1} + 3(k-j)] : [j^2 k r^{j-1} - j k^2 r^{k-1}].$$

Puisque $j^2 k r^{j-1} - j k^2 r^{k-1} > 0$ pour $\sqrt[j-1]{1/j} \leqslant r \leqslant \sqrt[k-1]{1/k}$, il suffit donc, pour prouver que $\varphi(r) = \Phi(a_j, a_k, r)$ est non négative dans cet intervalle, de montrer que le polynome

$$W(r) = 4(k^2 - j^2) r^{k+j-1} - 4j(k^2 - 1) r^k + 3k^2(j-1) r^{k-1} +$$

$$+ 4k(j^2 - 1) r^j - 3 j^2 (k-1) r^{j-1} + 3(k-j)$$

est $\geqslant 0$ pour $\sqrt[j-1]{1/j} \leqslant r \leqslant \sqrt[k-1]{1/k}$. Nous avons ensuite:

$$W(0) = 3(k-j) > 0, \quad W(1) = (k-j)(k+j-kj-1) < 0,$$

$$W\left(\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}\right) = 4(k^2 - j^2)\frac{1}{j}\left(\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}\right)^k - 4j(k^2-1)\left(\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}\right)^k +$$

$$+ 3k^2(j-1)\left(\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}\right)^{k-1} + 4k(j^2-1)\frac{1}{j}\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}} - 3j^2(k-1)\frac{1}{j} + 3(k-j) =$$

$$= \left(\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}\right) \cdot 4\left[\left(\frac{k^2 - j^2}{j} - \frac{j^2(k^2-1)}{j}\right)\left(\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}\right)^{k-1} + k \cdot \frac{j^2-1}{j}\right] +$$

$$+ 3\left[k^2(j-1)\left(\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}\right)^{k-1} + k - j + j - kj\right] =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{j}\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}\left[-k^2\left(\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}\right)^{k-1} + k\right](j^2-1) - 3(j-1)\left[-k^2\left(\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}\right)^{k-1} + k\right].$$

Donc

$$W\left(\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}\right)=\left(4\frac{j+1}{j}\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}-3\right)k(j-1)\left[1-k\left(\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}\right)^{k-1}\right],$$

et d'une façon analogue,

$$W\left(\sqrt[k-1]{\frac{1}{k}}\right)=\left(4\frac{k+1}{k}\sqrt[k-1]{\frac{1}{k}}-3\right)j(k-1)\left[\left(\sqrt[k-1]{\frac{1}{k}}\right)^{j-1}-1\right].$$

En vertu des lemmes 1 et 2 nous avons donc

$$(7)\qquad W\left(\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}\right)\geqslant 0;\quad W\left(\sqrt[k-1]{\frac{1}{k}}\right)>0,$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $j=2$.

La dérivée du polynome $W(r)$ est

$$W'(r)=4(k^2-j^2)(k+j-1)r^{k+j-2}-4jk(k^2-1)r^{k-1}+$$
$$+3k^2(j-1)(k-1)r^{k-2}+4kj(j^2-1)r^{j-1}-3j^2(k-1)(j-1)r^{j-2}.$$

Nous démontrerons maintenant que $W'(\sqrt[j-1]{1/j})>0$ ou, ce qui revient au même. que $W'(\sqrt[j-1]{1/j})/(\sqrt[j-1]{1/j})^{j-2}>0$. Pour cela, il faut prouver que l'on a, pour $k>j$, $j\geqslant 2$, l'inégalité:

$$(8)\qquad 4(k^2-j^2)(k+j-1)\left(\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}\right)^{k}-4kj(k^2-1)\left(\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}\right)^{k-j+1}+$$
$$+3k^2(j-1)(k-1)\left(\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}\right)^{k-j}+4kj(j^2-1)\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}-3j^2(k-1)(j-1)>0.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité (8) par $(\sqrt[j-1]{j})^k$ on obtient:

$$4(k^2-j^2)(k+j-1)-4kj(k^2-1)j+3k^2(j-1)(k-1)j\sqrt[j-1]{j}+$$
$$+\left[4kj(j^2-1)\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}-3j^2(k-1)(j-1)\right](\sqrt[j-1]{j})^k>0,$$

d'où, en effectuant la multiplication, en ordonnant suivant les puissances de k et en divisant les deux membres par $j-1$, on déduit:

$$(9)\qquad -[4(j+1)-3j\sqrt[j-1]{j}]k^3-[3j\sqrt[j-1]{j}-4]k^2-4j^2+$$
$$+\left\{3j^2+kj\left[4(j+1)\sqrt[j-1]{\frac{1}{j}}-3j\right]\right\}(\sqrt[j-1]{j})^k>0.$$

En vertu du lemme 1 nous avons $4(j+1)-3j\sqrt[j-1]{j}\geqslant 0$, où l'égalité n'a lieu que pour $j=2$.

Je vais établir maintenant:

Lemme 6. *Si* $x \geqslant 5$, *alors* $x \cdot \ln \sqrt[x-1]{x} > 2$.

Démonstration. Puisque $5 \cdot \ln \sqrt[4]{5} > 5/4 \cdot 1{,}6 = 2$ et que la dérivée de l'expression $x \ln \sqrt[x-1]{x}$ est positive, on a $x \ln \sqrt[x-1]{x} > 2$ pour $x \geqslant 5$.

Soit maintenant $j \geqslant 5$; pour établir l'inégalité (9) dans ce cas, il suffit de prouver que les inégalités suivantes sont vérifiées simultanément:

(10) $$k^2 < j\left(\sqrt[j-1]{j}\right)^{k-1},$$

(11) $$3\, j^2 \left(\sqrt[j-1]{j}\right)^k > |3j \sqrt[j-1]{j} - 4|\, k^2 + 4\, j^2.$$

Pour $k = j$ on a l'égalité $k^2 = j\left(\sqrt[j-1]{j}\right)^{k-1}$. La dérivée du premier membre de (10) par rapport à k est $2k$, celle du second membre de (10) est $j\left(\sqrt[j-1]{j}\right)^{k-1} \cdot \ln \sqrt[j-1]{j}$. Des lemmes 2 et 6 on tire

$$k < \left(\sqrt[j-1]{j}\right)^{k-1} \quad \text{et} \quad 2 < j \ln \sqrt[j-1]{j},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$2k < j \cdot \left(\sqrt[j-1]{j}\right)^{k-1} \cdot \ln \sqrt[j-1]{j},$$

donc la dérivée du premier membre de (10) est plus petite que celle du second membre, ce qui établit l'inégalité (10).

Pour prouver l'inégalité (11) nous allons profiter de l'inégalité précédente $j\left(\sqrt[j-1]{j}\right)^{k-1} \cdot \ln \sqrt[j-1]{j} > 2k$, d'où, en multipliant par $3j \sqrt[j-1]{j}$ nous aurons:

$$3\, j^2 \left(\sqrt[j-1]{j}\right)^k \ln \sqrt[j-1]{j} > 2 \cdot 3j \sqrt[j-1]{j}\, k > 2\,|3j \sqrt[j-1]{j} - 4|\, k,$$

ce qui prouve que la dérivée du premier membre de (11) par rapport à k est plus grande que celle du second membre. Comme les deux membres sont égaux pour $j = k$, l'inégalité (11) est vérifiée pour $k > j$. Ainsi, dans le cas $j \geqslant 5$, nous avons établi (10) et (11), et par conséquent aussi (9); on a donc finalement $W'\left(\sqrt[j-1]{1/j}\right) > 0$ pour $j \geqslant 5$. Il reste à prouver que $W'\left(\sqrt[j-1]{1/j}\right) > 0$ pour $j = 2, 3, 4$. Nous allons étudier ces cas.

I. $j = 2$, on a alors $4\,(j+1) - 3j \sqrt[j-1]{j} = 0$, et l'inégalité (9) se ramène à la suivante:

(12) $$-8\,k^2 - 16 + 12 \cdot 2^k > 0, \qquad k > 2.$$

L'inégalité (12) est équivalente à l'inégalité:

(13) $$3 \cdot 2^{k-1} > k^2 + 2.$$

Nous allons procéder par récurrence, en profitant de l'inégalité bien connue $2^{k-1} \geqslant k$:

$$3 \cdot 2^{(k+1)-1} = 3 \cdot 2^{k-1} \cdot 2 = 3 \cdot 2^{k-1} + 3 \cdot 2^{k-1} > k^2 + 2 + \\ + 3 \cdot 2^{k-1} > k^2 + 2 + 3k > (k+1)^2 + 2.$$

Cette inégalité établit (13), puisque celle-ci est vérifiée pour $k = 3$. On a donc pour $j = 2$: $W'(\sqrt[j-1]{1/j}) = W'(1/2) > 0$.

En passant à l'étude du cas $j = 3$, nous allons d'abord prouver:

Lemme 7. *Si $x \geqslant 4$, alors $2x + 1 < (\sqrt{3})^{x+1} \cdot |\sqrt{3} - 1|$.*

Démonstration. Pour $x = 4$ cela est évident. En dérivant membre à mebre l'inégalité du lemme 5 nous obtenons l'inégalité:

$$(14) \qquad 2 < (\sqrt{3})^{x+1} |\sqrt{3} - 1| \ln \sqrt{3}.$$

L'inégalité (14) étant vérifiée pour $x = 3$, puisque

$$2 < \frac{9}{4} = (\sqrt{3})^{3+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} < (\sqrt{3})^{3+1} \cdot |\sqrt{3} - 1| \cdot \ln \sqrt{3}$$

et la fonction figurant au second membre de (14) étant croissante, on a (14) et le lemme 7 se trouve ainsi démontré.

II. Nous allons maintenant prouver que les inégalités (10), (11) et, par suite, aussi (9) ont lieu pour $j = 3$, $k \geqslant 5$. Pour $k = 5$, on a $25 < 3(\sqrt{3})^4 = 27$, donc on a (10). En supposant (10) vérifiée pour k: $k^2 < 3(\sqrt{3})^{k-1}$, on obtient:

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 < 3(\sqrt{3})^{k-1} + 2k + 1 = 3 \cdot 3^{\frac{k-1}{2}} + 2k + 1.$$

En tenant compte du lemme 7 nous avons ensuite:

$$(k+1)^2 < (\sqrt{3})^{k+1} + (\sqrt{3})^{k+1} |\sqrt{3} - 1| = 3(\sqrt{3})^k = 3(\sqrt{3})^{(k+1)-1}.$$

L'inégalité (10) est donc établie par récurrence dans la cas $j = 3$, $k \geqslant 5$.

De l'inégalité évidente $(\sqrt{3})^{k-1} > 3k/2$ pour $k \geqslant 5$ il vient pour (11) dans le cas II: $(\sqrt{3})^{k-1} > 3k/2$, donc aussi $13(\sqrt{3})^k > 24k$, d'où l'inégalité $27(\sqrt{3})^k/2 > 2 \cdot 12k$; comme $1/2 < \ln \sqrt{3}$ et $9\sqrt{3} - 4 < 12$, on a $27(\sqrt{3})^k \ln \sqrt{3} > 2[9\sqrt{3} - 4]k$. L'inégalité (11) a la forme $27(\sqrt{3})^k > [9\sqrt{3} - 4]k^2 + 36$, donc la dérivée du premier membre de la dernière inégalité est plus grande que celle du second membre et, pour $k = 4$, on a $27(\sqrt{3})^4 > [9\sqrt{3} - 4] \cdot 16 + 36$, puisque $243 > 228$, donc l'inégalité (11) est vérifiée dans le cas $j = 3$, $k > j$. On conclut de là que pour $j = 3$, $k \geqslant 5$, les inégalitées (10) et (11) et, par conséquent, aussi (9) sont satisfaites, c'est-à-dire que l'on a dans ce cas $W'(\sqrt[j-1]{1/j}) > 0$.

En posant maintenant $j=3$, $k=4$, nous allons considérer, au lieu de l'inégalité (9), l'inégalité équivalente (8). Il faut que l'on ait alors:

$$4\cdot\frac{1}{9}\cdot 7\cdot 6-4\cdot\frac{1}{3}\cdot 12\cdot 15+6\cdot 16\cdot 3\sqrt{\frac{1}{3}}+4\cdot 12\cdot 8\sqrt{\frac{1}{3}}-162>0,$$

c'est-à-dire $28/9-40-27+112\sqrt{1/3}>0$, d'où $28-603+998\sqrt{1/3}>0$. La dernière inégalité est vraie, car elle se ramène à l'inégalité $\sqrt{3}<998/575$ qui est vérifée, le premier membre étant égal à 1,7321..., le second à 1,735... Pour $j=3$, $k=4$, on a donc aussi $W'(\sqrt[j-1]{1/j})>0$.

III. Soit maintenant $j=4$, $k\geqslant 5$. Nous allons prouver que les inégalités (10) et (11) sont vérifiées.

Lemme 8. *Si* $x\geqslant 5$, *alors* $2x+1\leqslant(\sqrt[3]{4})^{x+2}\cdot|\sqrt[3]{4}-1|$.

D é m o n s t r a t i o n. Pour $x=5$, on a $2\cdot 5+1=11<16\cdot 0{,}9<$ $<16(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4})=16\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{4}-1)=(\sqrt[3]{4})^{5+2}\cdot|\sqrt[3]{4}-1|$, le lemme 8 est donc vrai.

En dérivant membre à membre l'inégalité du lemme 8 nous obtenons:

$$2<(\sqrt[3]{4})^{x+2}\cdot|\sqrt[3]{4}-1|\cdot\ln\sqrt[3]{4}. \tag{15}$$

L'inégalité (15) est vérifiée pour $x=5$, puisque

$$2<16\cdot 0{,}9\cdot 0{,}4<16|\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}|\ln\sqrt[3]{4}=(\sqrt[3]{4})^{5+2}\cdot|\sqrt[3]{4}-1|\ln\sqrt[3]{4},$$

$$\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}>0{,}9,\qquad \ln\sqrt[3]{4}>0{,}4.$$

Le second membre de (15) est une fonction croissante, donc (15) a lieu pour $x\geqslant 5$, ce qui tablit le lemme 8.

Pour $j=4$ l'inégalité (10) prend la forme:

$$k^2<4(\sqrt[3]{4})^{k-1}. \tag{16}$$

Cette inégalité est vérifiée pour $k=5$, puisque $25<16\sqrt[3]{4}\approx 25{,}39$ ... Supposons (16) vérifiée pour k. Alors

$$(k+1)^2=k^2+2k+1<4(\sqrt[3]{4})^{k-1}+2k+1<4(\sqrt[3]{4})^{k-1}+(\sqrt[3]{4})^{k+2}|\sqrt[3]{4}-1|$$

en vertu du lemme 8. Nous avons donc:

$$(k+1)^2<4(\sqrt[3]{4})^{k-1}+(\sqrt[3]{4})^{k+3}-(\sqrt[3]{4})^{k+2}=(\sqrt[3]{4})^{k+2}+$$
$$+(\sqrt[3]{4})^{k+3}-(\sqrt[3]{4})^{k+2}=(\sqrt[3]{4})^{k+3}=4(\sqrt[3]{4})^{(k+1)-1}$$

et l'inégalité (16) se trouve démontrée pour $k\geqslant 5$.

Nous allons maintenant montrer que dans le cas III, où $j=4$, $k\geqslant 5$, l'inégalité (11) est satisfaite; elle prend alors la forme

$$48(\sqrt[3]{4})^k > |12\sqrt[3]{4}-4|k^2+64. \tag{17}$$

L'inégalité (17) est vérifiée pour $k=5$, car elle entraîne alors l'inégalité

$$48\cdot 4\sqrt[3]{16} > 25\,[12\sqrt[3]{4}-4|+64. \tag{17'}$$

qui est vraie, puisque

$$48\cdot 4\sqrt[3]{16} > 48\cdot 4\cdot 2{,}5 = 480 > 464 =$$
$$= 25\cdot 16+64 > 25|12\sqrt[3]{4}-4|+64.$$

La suite $(k+1)/k$ est décroissante et, comme $\sqrt[3]{4}=1{,}5874\ldots > (5+1)/5=1{,}2$, on a $\sqrt[3]{4}>(k+1)/k$ pour $k>5$, donc aussi

$$\sqrt[3]{4}\cdot 2k > 2(k+1) \qquad k>5. \tag{18}$$

Nous établirons maintenant l'inégalité:

$$(\sqrt[3]{4})^k > 2k, \qquad k>5. \tag{19}$$

Il est évident qu'elle est vérifiée pour $k=5$, puisque $\sqrt[3]{16}>2{,}5$. Supposons-la vérifiée pour k. Nous avons donc

$$(\sqrt[3]{4})^{k+1} = \sqrt[3]{4}\cdot(\sqrt[3]{4})^k > \sqrt[3]{4}\cdot 2k > 2(k+1)$$

en vertu de (18), ce qui entraîne (19).

Comme $\ln 4 \approx 1{,}3863$, on a $\ln\sqrt[3]{4}>0{,}4$, donc

$$\frac{32}{48\ln\sqrt[3]{4}} < \frac{2}{3\cdot 0{,}4} = \frac{2}{1{,}2} < 2.$$

D'après (19) on a, pour $k\geqslant 5$,

$$(\sqrt[3]{4})^k > \frac{32}{48\ln\sqrt[3]{4}}\cdot k,$$

donc

$$48(\sqrt[3]{4})^k\ln\sqrt[3]{4} > 32k = 2\cdot 16k > 2|12\sqrt[3]{4}-4|k,$$

puisque $12\sqrt[3]{4}-4<16$. Le premier membre de la dernière inégalité est la dérivée du premier membre de (17) et le dernier membre est la dérivée du second membre de (17). Nous avons ainsi démontré que l'on a, pour $j=4$, $k>j$, les inégalités (16), (17), ce qui entraîne (10) et (11), et enfin (9). Il en résulte que pour $j=4$ on a $W'(\sqrt[j-1]{1/j})>0$.

§ 6. Le coefficient du terme de degré le plus élevé en r du polynome $W(r)$ (p. 87) étant positif et la suite des coefficients présentant quatre variations de signe, on voit, en appliquant le théorème de Descartes, que le polynome $W(r)$ a quatre racines positives au plus. La dérivée $W'(r)$ présente trois variations de signe, donc $W'(r)$ admet trois racines positives au plus. On a $W(0)>0$, $W(1)<0$ (p. 87); en posant $j>2$ on obtient d'après (7): $W(\sqrt[j-1]{1/j})>0$, $W(\sqrt[k-1]{1/k})>0$. Le polynome $W(r)$ s'annule donc dans les intervalles $\langle \sqrt[k-1]{1/k}, 1\rangle$ et $\langle 1, \infty\rangle$. Il s'ensuit que $W(r)\geqslant 0$ dans $\sqrt[j-1]{1/j}\leqslant r\leqslant \sqrt[k-1]{1/k}$, sinon il s'annulerait dans deux intervalles intérieurs $\langle \sqrt[j-1]{1/j}, \sqrt[k-1]{1/k}\rangle$, ce qui est impossible; en effet, $W'(r)$ devrait alors s'annuler dans l'intervalle $\langle r_1, r_2\rangle \subset \langle \sqrt[j-1]{1/j}, \sqrt[k-1]{1/k}\rangle$ (théorème de Rolle) et aussi dans l'intervalle $\langle \sqrt[j-1]{1/j}, r_1\rangle$, puisque $W'(\sqrt[j-1]{1/j})>0$, où r_1 désigne la plus petite des racines du polynomes $W(r)$ qui appartiennent à l'intervalle $\langle \sqrt[j-1]{1/j}, \sqrt[k-1]{1/k}\rangle$. La dérivée du polynome $W(r)$ s'annule certainement dans l'intervalle $\langle r_2, r_3\rangle$ et dans l'intervalle (r_3, r_4) (théorème de Rolle), où $r_1<r_2<r_3<r_4$ sont les racines positives du polynome $W(r)$. En supposant que $W(r)<0$ en certains points de l'intervalle $\langle \sqrt[j-1]{1/j}, \sqrt[k-1]{1/k}\rangle$ nous arrivons à la conclusion que $W'(r)$ admet au moins 4 racines positives et il y a contradiction. Pour $j>2$ on a donc $W(r)\geqslant 0$ dans $\langle \sqrt[j-1]{1/j}, \sqrt[k-1]{1/k}\rangle$.

Pour $j=2$ on a $W(\sqrt[j-1]{1/j})=0$ et $W'(\sqrt[j-1]{1/j})>0$, $W(0)>0$, donc il y a une racine de l'équation $W(r)=0$ dans l'intervalle $(0, \sqrt[j-1]{1/j})=(0, 1/2)$. Dans ce cas aussi, $W(r)$ admet 4 racines positives et deux d'entre elles sont à droite de l'intervalle $\langle \sqrt[j-1]{1/j}, \sqrt[k-1]{1/k}\rangle$, une à gauche de $\sqrt[j-1]{1/j}=1/2$ et la quatrième racine est 1/2. Le polynome $W(r)$ ne s'annule donc qu'à l'extrémité gauche de l'intervalle considéré et il est positif dans cet intervalle. Il en résulte (p. 87) que $\varphi(r)=\Phi(a_j, a_k, r)\geqslant 0$ dans $\langle \sqrt[j-1]{1/j}, \sqrt[k-1]{1/k}\rangle$ d'où on obtient finalement $d^0/d^*\geqslant 3/4$.

En posant $r=1/2$ nous déduisons de (5), p. 86, pour $j=2$:

$$a_j=\frac{k-k^2\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{2\left[k-k^2\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]}=\frac{1}{2},\quad a_k=0.$$

Il en résulte aussi que la fonction $f_p^*(z) = z - z^2/2$ fournit, parmi tous les polynomes de Schild $f_p(z)$, la plus petite valeur $d^0/d^* = 3/4$. Dans le cas $j > 2$ on peut, en effet, démontrer par un raisonnement tout à fait pareil au précédent que $W(r) \neq 0$ dans $\langle \sqrt[j-1]{1/j}, \sqrt[k-1]{1/k} \rangle$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Lewandowski Z. *Quelques remarques sur les théorèmes de Schild relatifs à une classe de fonctions univalentes.* Annales Univ. M. Curie-Skłodowska. Sectio A, Vol. 9, 1955.

[2] Schild A. *On a class of functions schlicht in the unit circle.* Proc. Amer. Math. Soc. 1954, 5, No 1, 115—120.

Streszczenie

Oznaczmy przez $f_p(z)$ klasę wielomianów postaci $z - \sum_2^N a_n z^n$, gdzie $a_n \geqslant 0$ $(n = 2, 3, ...)$, spełniających warunek $1 - \sum_2^N n a_n = 0$. W pracy tej dowodzę następującą hipotezę Schilda:

Dla każdego wielomianu $f_p(z)$ spełniona jest nierówność $d^0/d^* \geqslant 3/4$, gdzie d^0 i d^* są to promienie możliwie największych kół o środku w początku układu pokrywanych odpowiednio obrazem koła $|z| \leqslant r_0$ (r_0 — promień wypukłości wielomianów $f_p(z)$) i obrazem koła jednostkowego.

Schild w swej pracy [2] wykazał tylko, że $d^0/d^* \geqslant 2/3$.

Резюме

Обозначим чероз $f_p(z)$ класс полиномов вида $z - \sum_2^N a_n z^n$, где $a_n \geqslant 0$ $(n = 2, 3, ...)$, исполняющих условие $1 - \sum_2^N n a_n = 0$. Я доказываю следующую гипотезу Шильда:

Для всякого полинома $f_p(z)$ имеет место неравенство $d^0/d^* \geqslant 3/4$, где d^0 и d^* суть радиусы возможно больших кругов с центром в начале координат, покрываемых соотвественно отображением круга $|z| \leqslant r_0$ (r_0 — радиус выпуклости полиномов $f_p(z)$) и отображением единичного круга.

Шильд в своей работе [2] доказал только, что $d^0/d^* \geqslant 2/3$.