ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VIII, 8 SECTIO A 1954

Z Zakładu Matematyki II Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS w Lublinie
Kierownik: prof. dr. A. Bielecki

ADAM BIELECKI

Quelques remarques sur la note précédente

Parę uwag w związku z poprzednim artykułem

Несколько примечаний к предыдущей статье

M. Radziszewski a démontré [1] que dans chaque figure convexe plane dont l'aire S est positive on peut inscrire un rectangle d'aire $s \geqslant \frac{1}{2} S$, et dans chaque corps convexe R de volume $V \geqslant 0$ ayant un plan de symétrie on peut inscrire un parallélépipède rectangle de volume $v \geqslant \frac{2}{9} V$. En utilisant une méthode semblable, M. Radziszewski et l'auteur de la présente note ont démontré [2] une proposition analogue pour les corps convexes, qui ne sont pas nécessairement symétriques, et pour les parallélépipèdes obliques en général. On peut donc se poser la question si, dans ce cas général, il existe toujours un parallélépipède rectangle de volume $v \geqslant \frac{2}{9} V$ inscrit dans un corps convexe R de volume $V > 0$. La réponse est négative, mais on peut encore demander *p. ex.* que le parallélépipède inscrit P jouisse d'une des propriétes suivantes:

(A) un angle plan de P est droit,
(B) un angle dièdre de P est droit,
(C) quatre faces de P sont rectangles.

On peut aussi admettre que le corps R doit satisfaire aux conditions:

(H) R possède un axe de symétrie,
(K) R possède un centre de symétrie.

Supposons que la condition (H) soit remplie. La méthode de démonstration exposée dans la note précédente [2] s'applique ici et donne un résultat un peu plus fort. L'axe des z étant un axe de symétrie de R, on vérifie sans peine que le parallélépipède P satisfait à la condition (C). L'exemple suivant montre qu'il n'existe pas, en général, de parallélépipède rectangle P inscrit.

Exemple

L'ensemble R des points dont les coordonnées cartésiennes satisfont aux inégalités

$$(x-2y)^2-\frac{1}{400}\leqslant z\leqslant\frac{1}{400}-(x+2y)^2 \tag{R}$$

est un corps convexe, dont la frontière se compose de deux nappes cylindriques: une nappe inférieure Σ et une nappe supérieure Σ'.

Supposons qu'il existe un parallélépipède rectangle P inscrit dans R. La somme des carrés des cosinus directeurs de l'axe des z par rapport aux trois arêtes du parallélépipède rectangle P est égale à un. Il existe donc quatre arêtes parallèles A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3' et A_4A_4' de P ayant la direction d'une droite l_0 qui forme avec l'axe des z un angle γ tel que $3\cos^2\gamma\geqslant 1$. On vérifie facilement que toute droite l, parallèle à l_0 et passant par un point intérieur du domaine R, n'a qu'un point A commun avec Σ et un point A' commun avec Σ'. Les ordonnées correspondantes z et z' satisfont à l'inégalité $z<z'$. Nous pouvons donc admettre que les points A_1, A_2, A_3 et A_4 sont les sommets d'une face σ et sont situés sur la surface Σ, tandis que les points A_1', A_2', A_3' et A_4' sont les sommets de la face parallèle σ' et appartiennent à Σ'.

D'autre part, l'intersection de la surface Σ et du plan σ est un couple de deux droites parallèles, le cas de l'intersection parabolique étant évidemment exclu. Soient A_1A_2 et A_3A_4 ces deux droites. Pareillement, l'intersection de la surface Σ' et du plan σ' est un couple de deux autres droites parallèles, qui ont la direction des arêtes $A_2'A_3'$ et $A_4'A_1'$, ou bien A_2A_3 et A_4A_1. Mais les directions des deux familles de génératrices des surfaces Σ et Σ' ne sont pas perpendiculaires et, par suite, la face $A_1A_2A_3A_4$ n'est pas rectangulaire. Nous avons ainsi démontré qu'il n'existe aucun parallélépipède rectangle inscrit dans R.

Les cas (K) n'est pas aussi simple. La méthode de M. Radziszewski permet ici de démontrer qu'il existe un parallélépipède inscrit P de volume $v\geqslant\frac{2}{9}V$, satisfaisant à la condition (A), et un parallélépipède inscrit P de volume $v\geqslant\frac{2}{9}V$, satisfaisant à la condition (B), mais il ne semble pas facile de construire un exemple de corps R pour lequel il n'existerait aucun parallélépipède inscrit de volume $v\geqslant\frac{2}{9}V$, jouissant de la propriété (C). Les résultats positifs mentionnés s'obtiennent presque immédiatement grâce au fait que, la condition (K) étant remplie, on a identiquement $\delta(\varphi)=0$ et à tout $P'(\varphi)$ il correspond un parallélépipède $P(\varphi)$ bien déterminé inscrit dans R et ayant le même centre de symétrie *).

*) Voir la note précédente, p. 99.

Dans le cas général, où l'on n'introduit aucune hypothèse sur la symétrie de R, je n'ai pas réussi à trouver d'exemple qui donnerait plus que le précédent, où le corps convexe avait un axe de symétrie, ou bien à démontrer que la proposition concernant les parallélépipèdes inscrits dans des corps convexes quelconques peut être renforcée. Ces questions restent encore ouvertes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Radziszewski, *Sur un problème extrémal relatif aux figures inscrites et circonscrites aux figures convexes*, Annales Universitatis M. Curie-Skłcdowska, Sectio A, **6**, 1, (1952), p. 5—18.

[2] A. Bielecki et K. Radziszewski, *Sur les parallélépipèdes inscrits dans les corps convexes*, Annales Universitatis M. Curie-Skłodowska Sectio A. **8**, 7, (1954), p. 97—100.

Streszczenie

W poprzedniej nocie *) udowodniono, że w dowolny owal przestrzenny o objętości $V > 0$ można wpisać równoległościan o objętości $v \geqslant \frac{2}{9} V$.

Tutaj zaś podana jest dyskusja niektórych przypadków szczególnych. W przypadku gdy dany owal posiada oś symetrii, istnieje wpisany równoległościan o objętości $v \geqslant \frac{2}{9} V$, którego dwie pary ścian są prostokątami i podany został przykład, z którego wynika, że może w ogóle nie istnieć żaden prostopadłościan wpisany.

W przypadku gdy dany owal ma środek symetrii, istnieje równoległościan wypisany o objętości $v \geqslant \frac{2}{9} V$ mający jeden kąt płaski lub jeden kąt dwuścienny prosty.

Резюме

В предыдущем сообщении**) было доказано, что в произвольный пространственный овал объёма $V > 0$ можно вписать параллелепипед объёма $v \geqslant \frac{2}{9} V$.

В этом труде дан разбор некоторых частных случаев. В случае, когда данный овал имеет ось симметрии, существует вписанный параллелепипед объёма $v \geqslant \frac{2}{9} V$, у которого две пары граней прямоугольники, и дан пример, показывающий, что может вообще не существовать вписанный прямоугольный параллелепипед.

В случае, когда данный овал имеет центр симметрии, существует вписанный параллелепипед объёма $v \geqslant \frac{2}{9} V$, имеющий один плоский или один двухгранный угол прямой.

*) „O równoległościanach wpisanych w owale".

**) „О параллелепипедах, вписанных в выпуклые тела".