ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. VIII, 6 SECTIO A 1954

Z Katedry Zespołowej Matematyki Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik prof. dr. M. Biernacki

KONSTANTY RADZISZEWSKI

Sur les cordes qui partagent le périmètre d'un ovale en 2 parties égales.

O cięciwach dzielących obwód owalu na dwie części równe.

О хордах делящих периметр овала на две равные части.

Dans le travail „Sur quelques propriétés des ovales", Annales UMCS, vol. VII, 1953, M. Biernacki a posé le problème suivant:

En désignant par d la corde maxima de l'ovale R, qui partage la frontière de l'ovale en deux parties égales, et par D son diamètre, trouver un ovale tel que le rapport $\frac{d}{D}$ soit minimum.

Avant de résoudre ce problème nous démontrerons quelques lemmes.

Lemme 1. — *Dans le triangle ABC, où $AC = BC$, $AB = 2a \geqslant AC$, la plus grande des cordes qui partagent la frontière du triangle ABC en deux parties égales est la corde AF, le point F, situé sur le segment BC, étant tel que $CF = a$.*

Démonstration — Nous distinguerons deux cas: a) et b) suivant que les deux extrémités de la corde qui partage la périmètre du triangle en deux parties égales sont situées sur les côtés AC et CB, ou que l'une d'elles est située sur le côté AB.

a) Introduisons un système de coordonnées rectangulaires dont l'origine O est le milieu du segment AB, l'axe Ox ayant la direction de OB et l'axe Oy la direction de OC. Désignons par φ l'angle $\sphericalangle\, OCB$. Sur la frontière ABC portons, à partir des points F et A, des segments de longueur, b, $b \leqslant a$, dans le sens de la rotation positive du système de coordonnées. Appelons F' resp. A' les extrémités de ces segments.

$$A'\{-(a-b),\, 0\} \qquad F'\{(a-b)\sin\varphi,\, a\operatorname{ctg}\varphi-(a-b)\cos\varphi\}$$

$$(A'F')^2 = l(b) = [(a-b)\sin\varphi+(a-b)]^2+[a\operatorname{ctg}\varphi-(a-b)\cos\varphi]^2$$

$$\frac{dl}{db} = -2\,[(a-b)\sin\varphi+(a-b)]\,(1+\sin\varphi)+2\,[a\operatorname{ctg}\varphi - (a-b)\cos\varphi]\cos\varphi\,.$$

Donc

$$\frac{dl(o)}{db} < 0 \qquad \frac{dl(a)}{db} > 0$$

$l(b)$ a donc, comme fonction de b exactement un extremum, c'est-à-dire un minimum dans l'intervalle $0 \leqslant b \leqslant a$. Puisque $l(o) > l(a)$ l'on a aussi $l(b) \leqslant l(o)$, $o \leqslant b \leqslant a$.

b) Portons maintenant les segments $AA'' = b$ et $FF'' = b$ sur la frontière du triangle ABC dans le sens de la rotation négative du système de coordonnées

$$A''\left\{b \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - a\,,\, b \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right\};$$

$$F''\ \{(a + b)\sin\varphi\,,\, a \operatorname{ctg}\varphi - (a + b)\cos\varphi)\}$$

$$(A''F'')^2 = l(b) = a^2(1 + \sin\varphi)^2 + (2b\cos\varphi + a\cos\varphi - a\operatorname{ctg}\varphi)^2$$

$$\frac{dl}{db} = 2\,(2b\cos\varphi + a\cos\varphi - a\operatorname{ctg}\varphi)\,2\cos\varphi$$

$$\frac{dl(0)}{db} < 0 \qquad l(0) = l(FB) = AF$$

$l(b)$ n'ayant, comme fonction de b qu'un seul extremum, à savoir un minimum, l'on a

$$l(0) > l(b) \quad \text{lorsque} \quad 0 < b < FB$$

Le lemme est ainsi démontré.

Lemme 2. — *Parmi les triangles ABC, $AC = BC$, $AB = 2a \geqslant AC$, de diamètre $2a$, il existe un triangle et un seul, tel que la corde maxima AF (lemme 1) ait une longueur minima.*

Démonstration — Introduisons un système de coordonnées rectangulaires, dont l'origine O est au point C, l'axe Oy est dirigé suivant CD, D étant le milieu du segment AB et l'axe Ox ayant la direction DB. Appelons φ l'angle $\sphericalangle DCB$.

$$A\{-a\,,\, a\operatorname{ctg}\varphi\}; \qquad F\{a\sin\varphi\,,\, a\cos\varphi\}$$

$$(AF)^2 = l(\varphi) = (a\sin\varphi + a)^2 + (a\operatorname{ctg}\varphi - a\cos\varphi)^2$$

$$\frac{dl}{d\varphi} = 2a^2\cos\varphi\left[1 + \sin\varphi + \left(\frac{1}{\sin\varphi} - 1\right)\left(\sin\varphi - \frac{1}{\sin^2\varphi}\right)\right]$$

$$2\sin^3\varphi + \sin\varphi - 1 = 0$$

$$x = \sin\varphi$$

$f(x) = 2x^3 + x - 1$ ne prend la valeur O qu'en un seul point. La valeur de l y est minima.

Dans ce qui suit nous désignerons par $A_0B_0C_0$ le triangle isoscèle, pour lequel $\sqrt{l} = AF$ est minimum, et par A_0F_0 la corde maxima correspondante, qui partage la frontière en deux parties égales.

Lemme 3. — *Soit le triangle $A_0B_0C_0$. Traçons deux arcs de cercle de centres A_0 et B_0 et de rayon A_0F_0; ces arcs se coupent du côté du point C_0 en S et ils coupent le segment A_0B_0 aux points L et K. Supposons que la frontière d'un triangle quelconque A_0B_0C de diamètre $2a = A_0B_0$ ait avec les arcs $\overset{\frown}{KS}$ et $\overset{\frown}{LS}$ les points P et R, les plus rapprochés de la droite A_0B_0, en commun. La longueur de la ligne brisée PCR est alors inférieure ou égale à $2a$.*

D é m o n s t r a t i o n — Remarquons que le lemme est vrai pour les triangles issoscèles, car, dans le cas contraire, A_0F serait inférieur à A_0F_0 (le point F serait à l'intérieur de la ligne brisée PCR).

Considérons maintenant un triangle quelconque A_0B_0C où C est situé du même côté de A_0B_0 que C_0 (évidemment il doit satisfaire aux conditions du lemme). Soit C_0D_0 la hauteur de $A_0B_0C_0$. Supposons que C soit situé *p. ex.* à droite de C_0D_0 et désignons par M le point d'intersection de A_0C et C_0D_0. Evidemment $PM \leqslant a$ (triangle A_0MB_0). Prolongeons B_0C jusqu'au point d'intersection N avec D_0C_0. L'on a $NC > MC$, car $\sphericalangle MNC < \sphericalangle NMC$. Donc $RN > RC + CM$. Mais $RN \leqslant a$ (car il est possible de construire le triangle isoscèle correspondant). On a donc

$$PM + MC + CR \leqslant 2a$$

Soit maintenant W un ovale quelconque de diamètre $A_0B_0 = 2a$. Désignons par P' et R' le points d'intersection de la frontière de l'ovale avec les arcs de cercles $\overset{\frown}{KS}$ et $\overset{\frown}{LS}$, les plus rapprochés de la droite A_0B_0. En menant les droites A_0P' et B_0R' nous obtenons le triangle A_0B_0C. Il est évident que la longueur de la ligne brisée $P'CR'$ est supérieure à celle de l'arc correspondant $P'R'$ de la frontière de l'ovale W. On a donc le

Lemme 4. — *Le lemme 3 est vrai pour tout ovale de diamètre $A_0B_0 = 2a$.*

Théorème. — *Si l'on désigne par d la corde maxima, dont les extrémités partagent la frontière de l'ovale W en deux parties égales, alors parmi tous les ovales de diamètres $2a$ la corde minima du type d appartient au triangle $A_0B_0C_0$, $A_0B_0 = 2a$, $\sphericalangle A_0B_0C_0 = 2\varphi$, qui satisfait à l'équation*

$$2\sin^3\varphi + \sin\varphi - 1 = 0\,.$$

D é m o n s t r a t i o n — En vertu du lemme 4 l'arc $\widehat{P'R'}$ de la frontière de l'ovale W est inférieur ou égal à $2a$; donc au moins l'une des extrémités X ou Y des cordes A_0Y et B_0X, qui partagent la frontière de l'ovale W en deux parties égales, doit tomber en dehors de l'arc $P'R'$. Car si les deux points X et Y tombaient sur l'arc $P'R'$ et *si p. ex.* on avait $\widehat{A_0P'} \leqslant \widehat{B_0R'}$ alors on aurait $\widehat{A_0P'} + \widehat{P'Y} < \widehat{B_0R'} + 2a = A_0B_0 + \widehat{B_0R'} < A_0B_0 + \widehat{B_0Y}$. Supposons que l'arc $A_0P'R'B_0$ de la frontière de l'ovale soit supérieur à la moitié de la longueur totale de la frontière; alors le point Y *p. ex.*, se trouve sur l'arc $\widehat{R'B_0}$ et $A_0Y \geqslant A_0F_0$.

Les autres cas sont triviaux.

Il existe donc une corde, partageant la frontière en deux parties égales, supérieure ou égale à A_0F_0, ce qui a lieu, a fortiori, pour la corde maxima.

On calcule aisément que Min $\frac{d}{D} \simeq 0{,}829$.

Instytut Matematyczny
Polskiej Akademii Nauk

Institut Mathématique
de l'Académie Polonaise
des Sciences

S t r e s z c z e n i e

Niech D oznacza średnicę owalu R, zaś d największą cięciwę, której końce dzielą obwód owalu R na dwie równe części.

W pracy tej dowodzi się, że dla każdego owalu R zachodzi nierówność $\frac{d}{D} \geqslant 0{,}8\ldots$

Р е з ю м е

Пусть D обозначает диаметр овала R, а d — максимальную хорду, которой концы делят контур овала на две равные части.

В этом труде доказано, что для всякого овала имеет место неравенство $\frac{d}{D} \geqslant 0{,}8\ldots$