ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VIII. 5 SECTIO A 1954

Z Katedry Zespołowej Matematyki Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik prof. dr M. Biernacki

KONSTANTY RADZISZEWSKI

Sur les cordes qui partagent l'aire d'un ovale en 2 parties égales.

O cięciwach dzielących pole owalu na dwie części równe.

О хордах делящих площадь овала на две равные части.

Dans le travail „Sur quelques propriétés des ovales", Annales UMCS, (A) vol. VII, 1953, M. Biernacki a posé le problème suivant:

En désignant par d la corde maxima, partageant l'aire de l'ovale plan W en deux parties égales, et par D son diamètre, trouver le nombre λ le plus grand possible tel que l'inégalité $\lambda \leqslant \frac{d}{D}$ ait lieu pour tous les W.

Nous commencerons par démontrer quelques lemmes.

Lemme 1. — *Soient $\sphericalangle AOB < \pi$ et K une circonférence de rayon r et de centre 0. La longueur du segment de la tangente à K, intercepté par l'angle AOB, est une fonction continue du point de la circonférence K (évidemment entre les limites où cette fonction existe). Cette fonction n'a qu'un seul extremum, à savoir un minimum au point d'intersection de la circonférence K avec la bissectrice de l'angle AOB.*

La démonstration est immédiate, car on peut exprimer cette longueur en fonction de l'angle polaire φ et examiner cette fonction, ce qui est tout à fait élémentaire.

Lemme 2. — *Si ABC est un triangle tel que $AB \geqslant BC$, $AC = BC$ alors la corde maxima, partageant l'aire en deux parties égales, est AF, où F est le milieu du segment BC.*

Démonstration — Distinguons deux cas a) et b) suivant que les deux extrémités de la corde qui partage l'aire du triangle en deux parties égales sont situées sur les côtés AC et CB, ou que l'une d'elles est située sur le côté AB. a) Considérons la corde MN qui partage l'aire du triangle ABC en deux parties égales, et dont les extrémités sont situées respectivement sur AC et BC. Traçons une circonférence K de centre C, et de rayon r, égal à la distance de C à la droite AF. Soit P le point de contact de AF avec K et P' le point symétrique de P par rapport à la bissectrice de l'angle ACB. Le segment ST, tangent à K au point R et parallèle à MN, aura, en vertu du lemme 1, une longueur inférieure à AF. Le point R étant sur la circonférence K entre P et P' (sinon ST couperait AB), l'aire du triangle STC sera inférieure à celle du triangle AFC. Comme l'aire du triangle MNC est égale à celle du triangle AFC, donc plus grande que celle du triangle STC, la hauteur du triangle MNC, menée par le point C, sera plus grande que la hauteur correspondante du triangle STC, donc plus grande que la hauteur du triangle AFC. Les bases satisfont donc à la condition $MN \leqslant AF$, car les aires sont égales et les hauteurs inégales.

b) Considérons maintenant la corde MN, partageant l'aire du triangle ABC en deux parties égales, dont les extrémités sont situées sur les segments AB et BC. Soit K une circonférence, de rayon r et de centre B, tangente à AF. Menons une tangente à K parallèle à MN. Il résulte aisément du lemme 1 que la longueur du segment de cette tangente, contenu dans l'angle ABC, est inférieure à AF. En répétant le raisonnement de l'alinéa a) on trouve que $MN \leqslant AF$.

Lemme 3. — *Dans le triangle isoscèle ABC, $AC = BC$, $AB \geqslant BC$ le rapport de la corde maxima, partageant l'aire en deux parties égales, au diamètre est plus grand que $^3/_4$.*

D é m o n s t r a t i o n — En vertu du lemme 2 la corde maxima, partageant l'aire du triangle en deux parties égales, est la médiane AF. Lorsque le sommet C se rapproche de la base AB, le point F se déplace sur une droite perpendiculaire à AB, ayant en commun avec la base AB le point F_0 qui partage la base dans le rapport $3:1$. Evidemment $AF_0 < AF$, le lemme est donc vrai.

Théorème. — *Le corde maxima d'un ovale quelconque W, partageant son aire en deux parties égales, est plus grande que $\frac{3}{4} D$, où D désigne le diamètre de W.*

D é m o n s t r a t i o n — Soit un ovale W de diamètre AB. Traçons des arcs de cercle de centres A et B et de rayon $^3/_4\, AB$ et désignons par S leur point d'intersection situé du côté de la droite AB contenant la plus grande partie de l'aire de l'ovale. Désignons encore par E et F les points d'intersection de ces arcs avec AB. La frontière de W coupe les arcs ES et FS aux points K et L, les plus rapprochés de la droite AB. Menons les droites AK, BK, AL et BL. Les droites AK et BL se coupent au point C, les droites AL et BK an point Z. Nous désignons par $\{x\}$ l'aire de la figure x.

Si la frontière d'une figure contient un arc de la frontière de W nous désignons l'arc correspondant par $\frown$ p. ex. $\overset{\frown}{KL}Z$ désigne une figure où $\overset{\frown}{KL}$

est un arc de la frontière de R, alors que les autres parties KZ et LZ sont des segments de droite.

Nous allons démontrer qu'au moins l'une des extrémités U ou V des cordes AU et BV, qui partagent l'aire de l'ovale en deux parties égales, tombe en dehors de l'arc $\widehat{KL}$ de la frontière de l'ovale R. Pour cela il suffit de démontrer que l'aire du triangle curviligne $\widehat{KLZ}$, où $\widehat{KL}$ est un arc de la frontière de R, est inférieure à celle du triangle AZB. En effet, si *p. ex.* l'aire du triangle curviligne

$$\{\widehat{AKZ}\} \leqslant \{\widehat{BLZ}\} \qquad \text{et} \qquad \{\widehat{KLZ}\} \leqslant \{AZB\}$$

alors, en ajoutant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\{\widehat{AKLZ}\} \leqslant \{AZ\widehat{LB}\} ;$$

pour que les aires $\{\widehat{AKUA}\}$ et $\{\widehat{ABU}\}$ soient égales, il faudra que le point U tombe sur l'arc $\widehat{LB}$, c'est-à-dire que $AU \geqslant {}^3/_4\, AB$.

Passons à la démonstration de l'inégalité

$$\{\widehat{KLZ}\} \leqslant \{AZB\}$$

Par le milieu O du segment AB menons une perpendiculaire à AB. La droite KB la coupe en M, AL en N et KC en R. Prolongeons BC jusqu'au point d'intersection P avec la perpendiculaire ON. Il suffit de prouver que l'aire du quadrilatère $KZLC$ est inférieure ou égale à celle du triangle AZB, c'est-à-dire

$$A) \qquad \{KZLC\} \leqslant \{AZB\} .$$

Remarquons que l'inégalité A) a lieu pour les triangles isoscèles, car, autrement, le point U, où AU désigne la corde maxima, partageant l'aire du triangle en deux parties égales, serait sur la ligne brisée KCL, et l'on aurait $AU < AF$, ce qui est impossible en vertu du lemme 3. Nous obtenons ainsi les inégalités

$$\{MKR\} \leqslant \{AMO\} \quad \text{(triangle } ARB\text{)} \quad \text{et}$$
$$\{NLP\} \leqslant \{ONB\} \quad \text{(triangle } APB\text{)}$$

mais

$$\{ONB\} = \{OMB\} + \{MNB\} = \{AMO\} + \{AMN\}$$
$$\{MKR\} = \{KZNR\} + \{ZNM\} \leqslant \{AMO\}$$

ou

$$\{KZNR\} \leqslant \{AMO\} - \{ZNM\}$$
$$\{RNLC\} \leqslant \{NLP\}$$

donc

$$\{KCLZ\} = \{KZNR\} + \{RNLC\} \leqslant \{AMO\} - \{ZNM\} + \{NLP\} \leqslant$$
$$\leqslant \{AMO\} - \{ZNM\} + \{ONB\} = \{AMO\} - \{ZNM\} + \{ANO\} =$$
$$= \{AZB\}.$$

Dans la démonstration nous avons admis que la droite ON sépare les points A et C, ainsi que B et Z, ces conditions sont toujours possibles à réaliser en modifiant convenablement les notations.

Instytut Matematyczny
Polskiej Akademii Nauk

Institut Mathématique
de l'Académie Polonaise
des Sciences

Streszczenie

Niech D oznacza średnicę owalu płaskiego R, zaś d największą cięciwę, dzielącą pole owalu R na dwie równe części.

W pracy tej dowodzi się, że dla każdego owalu R zachodzi nierówność $\frac{d}{D} > \frac{3}{4}$.

Резюме

Пусть D обозначает диаметр плоского овала R, а d — максимальную хорду, делящую площадь овала R на две равные части.

В этом труде доказано, что для всякого овала имеет место неравенство $\frac{d}{D} > \frac{3}{4}$.