ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. VIII, 1 SECTIO A 1954

Z Zakładu Matematyki III, Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: doc. dr Krzysztof Tatarkiewicz

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

Sur les puissances des entiers

O potęgach liczb naturalnych

О степенях целых чисел

1. Soit un entier a. Nous allons désigner par $R_a(k, n)$ le reste du nombre a^n modulo 10^k. M. Sierpiński [4] a démontré que pour k et a fixe la suite $R_a(k, n)$ est périodique, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres p et r tels que

$$R_a(k, \nu p + r) = R_a(k, r) \qquad \text{pour} \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

C'est-à-dire que

$$(1,1) \qquad a^{\nu p + r} \equiv a^r \pmod{10^k}$$

Désignons par $p(a, k)$ le plus petit nombre positif p vérifiant (1,1) et par $r(a, k)$ le plus petit nombre non négatif r vérifiant (1,1).

M. Sierpiński a démontré dans son travail [5] que

$$p(2, k) = 4.5^{k-1}, \qquad r(2, k) = k \qquad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

C'est-à-dire que

$$(1,2) \qquad 2^{\nu 4 \cdot 5^{k-1} + k} \equiv 2^k \pmod{10^k}$$

M. Hampel [1] à démontré des résultats semblables pour $a = 3$, 5, 11, 2^λ (pour $a = 3$ et 2^λ ses résultats ne sont pas complet).

Le but de cette Note est de généraliser ces résultats pour des bases a quelconques.

Posons

$$\sigma(a, k) \underset{df}{=} \frac{p(a, k+1)}{p(a, k)}$$

Le résultat de M. Sierpiński montre que $\sigma(2, k) = 5$. Nous allons démontrer que

Si $(a, 10)$ *désigne le plus grand commun diviseur de* a *et de* 10, *alors*

$$\sigma(a, k) \leqslant \frac{10}{(a, 10)} \quad pour \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{1,3}$$

Pour chaque a *il existe un plus petit nombre* $N(a)$ *tel que*

$$\sigma(a, k) = \frac{10}{(a, 10)} \quad pour \quad k \geqslant N(a) \tag{1,4}$$

De plus, nous allons exposer une méthode permettant de déterminer $N(a)$ et les nombres $p(a, 1)$, $p(a, 2)$ ..., $p(a, N(a))$ (où $p(a, 1)$ ne peut admettre que les valeurs 1, 2, 4). Il suffira, pour l'appliquer, de calculer les puissances a^n pour des valeurs de n relativement très petites [1]).

La démonstration exigera la considération d'un certain nombre de cas et de sous-cas, (le cas $(a, 10) = 1$ sera traité aux §§ 8-10, $(a, 10) = 2$ au § 7, $(a, 10) = 5$ aux §§ 2-6, enfin $(a, 10) = 10$ au § 11).

Au § 12 nous établirons les formules (12,1), qui donnent les valeurs précises de $r(a, k)$. En les simplifiant nous obtenons l'estimation

$$r(a, k) \leqslant k$$

Au dernier paragraphe nous allons démontrer la formule suivante ($a = 2$):

$$2^{\nu \cdot 2 \cdot 5^{k-1} + k} \equiv (-1)^{\nu} 2^k \pmod{10^k} \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Notre formule est plus forte que celle de M. Sierpiński (1,2), mais elle ne se laisse par généraliser — par exemple, pour $a = 3$ ou $a = 5$.

2. Dans ce paragraphe nous nous occuperons de la base $a = 5$ (voir [1]) et nous allons démontrer que

$$p(5,1) = 1, \qquad p(5, k) = 2^{k-2} \qquad \text{pour} \qquad k \geqslant N(5) = 2 \tag{2,1}$$

(c'est-à-dire que $p(5,1) = p(5,2) = 1$ et $\sigma(5,k) = 2 = 10:(5,10)$ pour $k \geqslant N(5) = 2$) et

$$r(5, k) = k \tag{2,2}$$

[1]) Après avoir rédigé cette Note et après avoir présenté les résultats obtenus pendant une séance de PTM, nous avons eu connaisance des résultats (encore non publiés) de M. Jakóbczyk, M. Jakóbczyk a obtenu a peu près les mêmes résultats à l'aide d'une autre méthode (en employant la fonction $\lambda_g(m)$ — pour sa définition voir ces Annales, sec. A, 5 (1951) p. 97).

Chaque puissance de 5 se terminant par le chiffre 5, les formules $p(5,1) = 1$ et $r(5,1) = 1$ sont évidentes. Il est aussi facile à vérifier que $p(5,2) = 1$ et $r(5,2) = 2$. Supposons que $k > 2$.

Il est bien connu que le nombre 5 pour $k \geqslant 2$ appartient modulo 2^k à l'exposant 2^{k-2} (voir par exemple [6] p. 194). C'est-à-dire

$$5^{2^{k-2}} \equiv 1 \pmod{2^k}$$

et $5^\delta \not\equiv 1 \pmod{2^k}$ pour $0 < \delta < 2^{k-2}$. D'où

$$5^{2^{k-2}+k} \equiv 5^k \pmod{10^k} \tag{2, 3}$$

Donc, par induction,

$$5^{\nu 2^{k-2}+k} \equiv 5^k \pmod{10^k} \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

C'est-à-dire

$$R_5(k, \nu 2^{k-2} + k) = R_5(k, k).$$

Pour démontrer (2,1) et (2,2) il nous faut montrer que 2^{k-2} est la longueur de la plus courte période et que k est le plus petit nombre pour lequel la formule (2,3) soit vraie.

Supposons que nous avons

$$5^{2^{k-2}+m} \equiv 5^m \pmod{10^k} \tag{2,4}$$

pour $m = m_0 < k$, alors 2^{k-2} étant une période, (2, 4) sera vérifiée par

$$m = m_0, m_0 + 1, \ldots, k - 1, k.$$

Il suffit donc de démontrer que (2,4) est impossible pour $m = k-1$. Supposons donc que (2,4) soit vérifié par $m = k-1$, c'est-à-dire que

$$5^{2^{k-2}+k-1} - 5^{k-1} = \tau\, 10^k$$

Vu que $2^{k-2} > 1$, nous avons $\tau > 0$. Il s'ensuit que

$$5^k \mid 5^{k-1}(5^{2^{k-2}} - 1),$$

ce qui est impossible.

Il nous reste à démontrer que 2^{k-2} est la longueur de la plus courte période. Soit $m < 2^{k-2}$ et supposons que $R_5(k, \nu m + k) = R_5(k, k)$. C'est-à-dire

$$5^{m+k} \equiv 5^k \pmod{10^k}$$

ou bien

$$5^k(5^m - 1) = \omega\, 10^k$$

Il s'ensuit que

$$5^m - 1 = \omega\, 2^k$$

donc

$$5^m \equiv 1 \pmod{2^k}$$

ce qui est impossible, puisque pour $k > 2$ le nombre 5 appartient modulo 2^k à l'exposant 2^{k-2}.

3. Dans ce paragraphe nous nous occuperons des bases $a = 5^\lambda$ pour $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$.

En vertu d'un théorème bien connu (voir par exemple [3] p. 227) si a appartient modulo m à l'exposant h et $d = (\lambda, h)$, alors a^λ appartient modulo m à l'exposant h/d. C'est-à-dire que

$$[a^\lambda]^{\frac{h}{d}} \equiv 1 \pmod{m}$$

et

$$[a^\lambda]^\delta \not\equiv 1 \pmod{m} \quad \text{pour} \quad 0 < \delta < h/d\,.$$

Puisque 5 appartient modulo 2^k à l'exposant 2^{k-2} pour $k \geqslant 2$, le nombre 5^λ appartient modulo 2^k à l'exposant $\dfrac{2^{k-2}}{(\lambda, 2^{k-2})}$ pour $k \geqslant 2$

C'est-à-dire

$$[5^\lambda]^{\frac{2^{k-2}}{(\lambda,\, 2^{k-2})}} \equiv 1 \pmod{2^k}$$

d'où

$$[5^\lambda]^{\frac{2^{k-2}}{(\lambda,\, 2^{k-2})}} \cdot 5^k \equiv 5^k \pmod{10^k}$$

et

(3, 1)
$$[5^\lambda]^{\frac{2^{k-2}}{(\lambda,\, 2^{k-2})} + \left\{\frac{k}{\lambda}\right\}} \equiv [5^\lambda]^{\left\{\frac{k}{\lambda}\right\}} \pmod{10^k}$$

où $\{\mu\}$ désigne le plus petit entier $\geqslant \mu$.

Le même raisonnement qu'au paragraphe précédent appliqué à la formule (3,1) nous donne pour $k > 2$

(3, 2)
$$p(5^\lambda, k) = \frac{2^{k-2}}{(\lambda, 2^{k-2})}$$

(3, 3)
$$r(5^\lambda, k) = \left\{\frac{k}{\lambda}\right\}.$$

Il est évident que pour $\lambda \geqslant 2$ on a

$$p(5^\lambda, 1) = p(5^\lambda, 2) = 1$$

et

$$r(5^\lambda, 1) = 1 = \left\{\frac{1}{\lambda}\right\}, \qquad r(5^\lambda, 2) = 1 = \left\{\frac{2}{\lambda}\right\}$$

Soit un nombre t tel que $2^t \mid \lambda$ et $\sim 2^{t+1} \mid \lambda$. Alors

(3,4) $$N(5^\lambda) = t + 2$$

et pour $k \geqslant N(5^\lambda)$ nous avons

(3,5) $$\sigma(5^\lambda, k) = 2\,.$$

4. Dans ce paragraphe nous allons considérer les nombres

(4,1) $$a = 5^\lambda (2\chi + 1) \quad \text{où} \quad \lambda \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \sim 5 \mid 2\chi + 1$$

(Les nombres $a = 5^\lambda$ considérés au paragraphe précedent sont des cas particuliers des nombres (4,1).)

On a

$$\frac{2^{k-2}}{(\lambda, 2^{k-2})} \,\Big|\, 10^{k+1}$$

Vu la formule (3,1)

(4,2) $$a^{10^{k+1}+\left\{\frac{k}{\lambda}\right\}} = [5^\lambda]^{10^{k+1}+\left\{\frac{k}{\lambda}\right\}} (2\chi+1)^{10^{k+1}+\left\{\frac{k}{\lambda}\right\}} \equiv$$

$$\equiv [5^\lambda]^{\left\{\frac{k}{\lambda}\right\}} (2\chi+1)^{10^{k+1}+\left\{\frac{k}{\lambda}\right\}} \pmod{10^k}$$

(4,1) entraîne $(2\chi+1, 10) = 1$. Vu que $\varphi(10^k) = 4.10^{k-1} \mid 10^{k+1}$ du Théorème d'E u l e r il résulte

$$(2\chi+1)^{10^{k+1}} \equiv 1 \pmod{10^k}$$

et

(4,3) $$(2\chi+1)^{10^{k+1}+\delta} \equiv (2\chi+1)^\delta \pmod{10^k}.$$

Les formules (4,2) et (4,3) pour $\delta = \left\{\frac{k}{\lambda}\right\}$ donnent

$$a^{10^{k+1}+\left\{\frac{k}{\lambda}\right\}} \equiv [5^\lambda]^{\left\{\frac{k}{\lambda}\right\}} (2\chi+1)^{\left\{\frac{k}{\lambda}\right\}} = a^{\left\{\frac{k}{\lambda}\right\}} \pmod{10^k}$$

Il s'ensuit que

$$r(a, k) \leqslant \left\{\frac{k}{\lambda}\right\} \qquad \text{pour } k \geqslant 2$$

Si $g \not\equiv h \pmod m$ et $(j, m) = 1$, alors $jg \not\equiv jh \pmod m$. Vu la formule (3,3) si nous remplaçons le nombre $\left\{\frac{k}{\lambda}\right\}$ dans (4,2) par un nombre $\delta < \left\{\frac{k}{\lambda}\right\}$

la congruence (4,2) deviendra fausse. Mais évidemment (4,3) restera vraie et nous aurons

$$a^{10^{k-1}+\delta} \not\equiv a^{\delta} \pmod{10^k}$$

et

(4,4) $$r(a,k) = \left\{ \frac{k}{\lambda} \right\} \quad \text{pour } k > 2$$

Dans le paragraphe suivant nous allons voir que cette formule reste valable pour $k = 1$, et $k = 2$.

5. Nous allons déterminer maintenant les valeurs de $p\,(a, k)$ et $r\,(a, k)$, $k = 1$, 2 pour les nombres $a = 5^{\lambda}\,(2\,\chi + 1)$ considerés au paragraphe précédent. Nous avons pour eux

$$a = 5^{\lambda}\,(2\chi+1) = 10.5^{\lambda-1}\,\chi + 5^{\lambda} \equiv 5^{\lambda} \equiv 5 \pmod{10}.$$

Ils sont donc de la forme

$$a = 10\,\gamma + 5$$

Nous avons

$$a^2 = 25 + 100\,\gamma + 100\,\gamma^2 = 25 + 100\,(\gamma+1)\,\gamma \equiv 5 \equiv a \pmod{10}$$

Donc

(5,1) $$p\,(a, 1) = 1, \qquad r\,(a, 1) = 1.$$

Nous avons

$$a^3 = 125 + 250\,\gamma\,(3 + 6\,\gamma + 4\,\gamma^2).$$

Etant donné que $3 + 6\,\gamma + 4\,\gamma^2 = 3 + 2\,(3\,\gamma + 2\,\gamma^2)$ est impair, on a:

I. Si γ est *pair*, alors $p\,(a, 2) = 1$ et

(5,2) $$r(a, 2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma \equiv 2 \pmod{10} \\ 2 & \phantom{\text{si }} \gamma \not\equiv 2 \pmod{10} \end{cases}$$

Or, si $\gamma \equiv 2 \pmod{10}$ alors $5^2 \mid a$ et si γ est pair et $\gamma \not\equiv 2 \pmod{10}$ alors $\sim 5^2 \mid a$; nous voyons donc que les formules (4,4) restent vraies pour γ pair et $k = 1{,}2$.

II. Si γ est *impair*, alors $p\,(a, 2) > 1$.

$$a^4 = 625 + 5000\,\gamma\,(1 + 3\,\gamma + 4\,\gamma^2 + 2\,\gamma^3) \equiv 25 \equiv a^2 \pmod{10^2}.$$

Donc, pour γ impair, $p\,(a, 2) = 2$ et $r\,(a, 2) = 1$ ou 2. Nous voyons comme ci-dessus, que pour γ impair la formule (4,4) reste aussi vraie.

6. Si a est de la forme $a = 10\,\gamma + 5$, alors $5 \mid a$ et $\sim 2 \mid a$. Supposons que le nombre $k \geqslant 2$ est tel que

$$\sigma\,(a, k) > 1$$

et admettons que

$$r \geqslant k+2 \geqslant r(a,k) \quad p \underset{df}{=} p(a,k)$$

Alors

(6,1) $$a^{p+r} = a^r + 10^k \varrho$$

Vu l'hypothèse $\sigma(a,k) > 1$, nous avons $\sim 10 | \varrho$. Alors

$$a^{2p+2r} = (a^{p+r})^2 = (a^r + 10^k \varrho)^2 = 2^{2r} + 10^{k+1} \varrho \left[\frac{a^r}{5} + 10^{k-1} \varrho\right] = a^{2r} + 10^{k+1} \varrho_1$$

où

$$\varrho_1 \underset{df}{=} \varrho \left[\frac{a^r}{5} + 10^{k-1} \varrho\right].$$

On voit que $\sim 2 \left| \frac{a^r}{5} + 10^{k-1} \varrho \right.$ et comme $r > 2$, $k > 2$, il vient $5 \left| \frac{a^r}{5} + 10^{k-1} \varrho \right.$.

Il s'ensuit que

$$a^{2p+2r} \equiv a^{2r} \pmod{10^{k+1}}$$

La longueur de la période modulo 10^{k+1} est un multiple entier de la longueur de la période modulo 10^k. Donc, puisque $\sigma(a,k) > 1$, on a $p(a,k) = 2p$ et $\sigma(a,k) = 2$.

I. Si $\sim 2 | \varrho$, alors $\sim 10 | \varrho_1$ et

$$a^{2p+2r} \not\equiv a^{2r} \pmod{10^{k+2}}$$

Vu que $2r \geqslant 2k+4 \geqslant k+2 \geqslant r(a, k+2)$ nous avons $\sigma(a,k+1) > 1$.

II. Si $2^s | \varrho$, $(s \geqslant 1)$ et $\sim 2^{s+1} | \varrho$, alors $\varrho_1 = 10^w \varrho_2$ où $1 \leqslant w \leqslant s$ et $\sim 10 | \varrho_2$. Evidemment $2^{s-w} | \varrho_2$ et $\sim 2^{s-w+1} | \varrho_2$. Nous avons

$$\sigma(a,k+1) = \ldots = \sigma(a,k+w) = 1, \qquad \sigma(a,k+w+1) > 1$$

et

(6,2) $$a^{2p+2r} = a^{2r} + 10^{k+w+1} \varrho_2$$

où $$\sim 2^s | \varrho_2.$$

Il s'ensuit que $2r \geqslant r(a, k+w+1)$. Si $2 | \varrho_2$, nous appliquons à la formule (6,2) le même raisonnement que nous avons appliqué à (6,1) et ainsi de suite, et nous arrivons enfin à la formule

$$a^{p^*+r^*} = a^{r^*} + 10^{k^*} \varrho^*$$

où $\sim 2 | \varrho^*$ — nous sommes alors dans le cas I.

Il est facile à voir que pour chaque a — donc pour chaque γ — il existe un K tel que $\sigma(a, K) > 1$ et

$$(6,3) \qquad p(a,2) = \ldots = p(a,K) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \gamma \text{ paire} \\ 2 & \text{pour } \gamma \text{ impaire} \end{cases}$$

Par exemple, si $a = 15$ (c'est-à-dire $\gamma = 1$), alors $K = 5$, si $a = 25$ (c'est-à-dire $\gamma = 2$) alors $K = 3$ etc. (voir tableau p. 19).

Soit donc

$$a^{P+R} = a^R + 10^K \bar{\varrho}$$

Supposons que $2^s | \bar{\varrho}$ et $\sim 2^{s+1} | \bar{\varrho}$. Alors, pour $K \leqslant k \leqslant K + 2s$, les nombres $\sigma(a, k)$ forment lą suite

$$(6,4) \qquad 2, 1, \ldots, 1, 2, 1, \ldots, 1, 2, 1, \ldots, 1, 2, 2, \ldots, 2.$$

Le nombre total des unités est égal à s.

Ou voit que $K + 2s \geqslant N(a) \geqslant K + s$ et pour $k \geqslant N(a)$ on a

$$(6,5) \qquad \sigma(a,k) = 2 = \frac{10}{(a, 10)}.$$

Evidemment les résultats de ce paragraphe s'appliquent aux nombres du type 5^λ considérés déjà au § 3 — nous y avons énoncé la formule explicite (3,4) pour $N(a)$.

7. Passons maintenant aux nombres a tels que $(a, 10) = 2$ (c'est-à-dire aux nombres pairs, non divisibles par 10). M. Sierpiński [5] a considéré déjà le cas $a = 2$. Il a obtenu les formules

$$(7,1) \qquad p(2,1) = 4, \qquad \sigma(2,k) = 5, \qquad r(2,k) = k.$$

Comme au § 3 (voir [1]), nous arrivons aux formules

$$(7,2) \qquad p(2^\lambda, k) = \frac{4.5^{k-1}}{(\lambda, 4.5^{k-1})}, \qquad r(2^\lambda, k) = \left\{\frac{k}{\lambda}\right\}.$$

C'est-à-dire il existe un nombre $N(2^\lambda)$ tel que pour $k \geqslant N(2^\lambda)$ on a $\sigma(2^\lambda, k) = 5$.

Des raisonnements analogues à ceux du § 4 donnent pour $a = 2^\lambda(2\chi + 1)$, où $\lambda \geqslant 1$ et $\sim 5 | 2\chi + 1$, la formule

$$(7,3) \qquad r(a,k) = \left\{\frac{k}{\lambda}\right\}$$

(voir la formule (4,4)).

Chaque nombre pair, non divisible par 10 est de la forme

$$a = 10\gamma + w$$

où $w = 2, 4, 6, 8$.

Comme au § 5 nous obtenons les formules

$$p(10\gamma+2,1)=p(10\gamma+8,1)=4$$

$$p(10\gamma+4,1)=2, \qquad p(10\gamma+6,1)=1.$$

Le même raisonnement qu'au § 6, bien que plus compliqué (car il faut considérer 4 cas, correspondant à $w=2, 4, 6, 8$ respectivement) conduit au résultat suivant:

Pour chaque a pair et non divisible par 10, *il existe un* $N(a)$ (facile à calculer) *tel que*

$$\sigma(a,k)=5=\frac{10}{(a,10)} \tag{7,4}$$

pour $k\geqslant N(a)$.

8. Supposons maintenant que $(a,10)=1$. Alors, en vertu du Théorème d'Euler, on a

$$a^{\varphi(10^k)}\equiv 1 \pmod{10^k}$$

Il s'ensuit que

$$r(a,k)=0 \tag{8,1}$$

et que

$$p(a,k)\leqslant 2^{k+1}\cdot 5^{k-1}. \tag{8,2}$$

Il est assez facile de montrer que le signe d'égalité dans (8,2) ne peut avoir lieu que pour $k=1$ et pour a se terminant par les chiffres 2, 3, 7, 8.

Dans le paragraphe suivant nous allons évaleur la valeur exacte de $p(a,k)$ pour $(a,10)=1$.

9. Les nombres tels que $(a,10)=1$ peuvent se terminer par les chiffres 1, 3, 7, 9. Nous allons considérer ces cas séparément.

Soit

$$a=10^n\gamma+w$$

où $\sim 10\,|\,\gamma$.

A. Supposons que $w=1$, $n\geqslant 2$, $(\gamma,10)=1$. Nous avons

$$p(a,1)=\ldots=p(a,n)=1$$

Alors

$$a^N=(10^n\gamma+1)^N=1+N\cdot 10^n\gamma+\frac{N(N-1)}{2}10^{2n}\gamma^2+\ldots+10^{10n}\gamma^{10}. \tag{9,1}$$

Donc, pour $N=1, 2, \ldots, 9$ on a

$$\sim 10^{n+1}\,|\,a^N-1=10^nN\gamma+\frac{N(N-1)}{2}10^{2n}\gamma^2+\ldots+10^{10n}\gamma^{10}.$$

Mais pour $N = 10$

$$a^{10} = (10^n\gamma + 1)^{10} = 1 + 10^{n+1}\gamma + 10^{2n+1}\cdot 45\gamma^2 + 12\cdot 10^{3n+1}\gamma^3 + \ldots + 10^{10n}\gamma^{10}.$$

Posons

$$\gamma_1 \underset{df}{=} \frac{a^{10}-1}{10^{n+1}} = \gamma(1 + 45\cdot 10^{n-1}\gamma + \ldots + 10^{9n-1}\gamma^9).$$

Alors

$$a^{10} = 10^{n+1}\gamma_1 + 1$$

où $(\gamma_1, 10) = 1$. Il s'ensuit que

$$p(a, n+1) = 10$$

Par induction

$$p(a, k) = 10^{k-n} \qquad \text{pour } k > n.$$

On voit que

$$\sigma(a, k) = 10 \tag{9,2}$$

pour $k \geqslant N(a) = n$

B. Suppsons que $w = 1$, $n \geqslant 2$, $5 \mid \gamma$, donc $\sim 2 \mid \gamma$, c'est-à-dire que

$$\gamma = 5\bar{\gamma}.$$

Alors

$$a^2 = (10^n\gamma + 1)^2 = 1 + 10^{n+1}\bar{\gamma} + 25\cdot 10^{2n}\bar{\gamma}^2.$$

Posons

$$\gamma_1 \underset{df}{=} \frac{a^2-1}{10^{n+1}} = \bar{\gamma}(1 + 25\cdot 10^{n-1}\bar{\gamma}).$$

On a

$$a^2 = 10^{n+1}\gamma_1 + 1.$$

Étant donné que $\sim 5 \mid 1 + 25\cdot 10^{n-1}\bar{\gamma}$ le nombre γ_1 est divisible par la même puissance de 5 que $\bar{\gamma}$. De plus, puisque $n \geqslant 2$, on a $\sim 2 \mid 1 + 25\cdot 10^{n-1}\bar{\gamma}$. Si $\sim 5^2 \mid \gamma$ (posons dans ce cas $r = 1$), alors $(\gamma_1, 10) = 1$, et $a^2 = 10^{n+1}\gamma_1 + 1$ sera du type A avec l'exposant $n + 1 \geqslant 3$. Si $5^r \mid \gamma$ et $\sim 5^{r+1} \mid \gamma$, $r \geqslant 2$, alors $a^2 = 10^{n+1}\gamma_1 + 1$ sera du type B, mais $\sim 5^r \mid \gamma_1$ et $5^{r-1} \mid \gamma_1$. Ainsi aprés avoir répété ce procédé exactement r fois on sera ramené au cas A et

$$p(a, k) = \begin{cases} 1 & k = 1, \ldots, n \\ 2^{k-n} & k = n+1, \ldots, n+r \\ 2^r\cdot 10^{k-n-r} & k \geqslant n+r+1 \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\sigma(a, 1) = \ldots = \sigma(a, n-1) = 1, \quad \sigma(a, n) = \ldots = \sigma(a, n+r-1) = 2$$

et

$$\sigma(a, k) = 10 \quad \text{pour} \quad k \geqslant N(a) = n + r. \tag{9, 3}$$

C. Supposons que $w = 1$, $n \geqslant 1$, $2 \mid \gamma$, donc $\sim 5\gamma$. C'est-à-dire

$$\gamma = 2\bar{\gamma}.$$

Il est facile à voir que

$$\sim 10^{n+1} \mid a^N - 1 \quad \text{pour} \quad N = 1, 2, 3, 4.$$

Mais

$$a^5 = (10^n \gamma + 1)^5 = 10^{n+1} \gamma_1 + 1,$$

où nous avons posé

$$\gamma_1 \underset{df}{=} \frac{a^5 - 1}{10^{n+1}} = \bar{\gamma} \cdot \Gamma$$

et

$$\Gamma \underset{df}{=} 1 + 10^n (2\gamma + 2 \cdot 10^n \gamma^2 + 10^{2n} \gamma^3 + 10^{3n-1} \gamma^4).$$

Il est évident que $\sim 2 \mid \Gamma$ et $\sim 5 \mid \Gamma$. Donc, si $\sim 2^2 \mid \gamma$ (posons dans ce cas $r = 1$), alors $a^5 = 10^{n+1}\gamma_1, + 1$ sera du type A avec l'exposant $n + 1 \geqslant 2$. Si $2^r \mid \gamma$ et $\sim 2^{r+1} \mid \gamma$, $r \geqslant 2$, alors $a^5 = 10^{n+1}\gamma_1 + 1$ sera du type C, mais $\sim 2^r \mid \gamma_1$ et $2^{r-1} \mid \gamma_1$. Ainsi après avoir appliqué ce procédé exactement r fois, nous serons dans le cas A et

$$p(a, k) = \begin{cases} 1 & k = 1, \dots, n \\ 5^{k-n} & k = n + 1, \dots, n + r \\ 5^r \cdot 10^{k-n-r} & k \geqslant n + r + 1 \end{cases}$$

C'est-à-dire que

$$\sigma(a, 1) = \dots = \sigma(a, n - 1) = 1, \qquad \sigma(a, n) = \dots = \sigma(a, n + r - 1) = 5$$

et

(9, 4) $\qquad \sigma(a, k) = 10 \quad$ pour $\quad k \geqslant N(a) = n + r.$

A1. Supposons que $w = 1$, $n = 1$, $(\gamma, 10) = 1$, c'est-à-dire que

$$a = 10\gamma + 1.$$

Comme dans le cas A (voir (9,1)), nous voyons que $\sim 10 \mid n^N - 1$ pour $N = 1, 2, \dots, 9$ et que

$$a^{10} = (10\gamma + 1)^{10} = 100\gamma_1 + 1$$

où nous avons posé

$$\gamma_1 \underset{df}{=} \frac{a^{10} - 1}{100} = \gamma\Gamma$$

et

$$\Gamma \underset{df}{=} 1 + 45\gamma + 100(12\gamma^2 + \dots + 10^6 \gamma^9).$$

Mais γ est impair, donc $1+45\gamma$ pair et γ_1 est pair et non divisible par 5 donc $\sim 10 \mid \gamma_1$. On voit que

$$a^{10} = 100\,\gamma_1 + 1$$

où $\sim 10 \mid \gamma_1$ et $2 \mid \gamma_1$. Nous sommes dans le cas C.

Soit $2^r \mid \gamma_1$ et $\sim 2^{r+1} \mid \gamma_1$ $2 \geqslant 1$ Après avoir répété ce procédé r fois nous sommes ramenés au cas A et

$$p(a,k) = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ 10 \cdot 5^{k-2} & k = 2, 3, \dots, r+2 \\ 5^r \cdot 10^{k-r-2} & k \geqslant r+3 \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\sigma(a,1) = 10\,, \qquad \sigma(a,2) = \dots = \sigma(a, r+1) = 5$$

et

(9,5) $\qquad \sigma(a,k) = 10 \quad \text{pour} \quad k \geqslant N(a) = r+2.$

B1. Supposons que $w = 1$, $n = 1$ et $5 \mid \gamma$, donc $\sim 2 \mid \gamma$. C'est-à-dire que $a = 10\gamma + 1$ où $\gamma = 5\bar{\gamma}$. Alors

$$a^2 = (10\gamma + 1)^2 = 100\,\gamma_1 + 1$$

où

$$\gamma_1 \underset{df}{=} \frac{a^2 - 1}{100} = \bar{\gamma}\,(25\,\bar{\gamma} + 1)$$

Supposons que $5^r \mid \gamma$ et $\sim 5^{r+1} \mid \gamma$, $r \geqslant 1$ et que $2^s \mid 25\,\bar{\gamma} + 1$, $\sim 2^{s+1} \mid 25\,\bar{\gamma} + 1$. Vu que $\sim 2 \mid \gamma$ on a $\sim 2 \mid \bar{\gamma}$. Donc $\bar{\gamma}$ est impair et $25\,\bar{\gamma} + 1$ est pair. On voit que $s \geqslant 1$.

Posons $m = \min\,[r-1, s]$, $M = \max\,[r-1, s]$ et $\bar{r} = M - m \geqslant 0$. Il est $0 \leqslant m \leqslant r-1$, $10^m \mid \gamma_1$, $\sim 10^{m+1} \mid \gamma_1$, $M \geqslant 1$.

Soit $r = 1$. Alors $m = 0$; a^2 sera du type C et après s pas on sera ramené au cas A.

Soit $r > 1$. Alors $m \geqslant 1$. Si $\bar{r} = 0$ (c'est-à-dire si $r-1 = s$) nous serons dans le cas A. Si $\bar{r} > 0$, nous serons dans le cas B ($r-1 > s$) ou bien dans le cas C ($r-1 < s$) et après $\bar{r}$ pas nous serons ramenés au cas A. (Tous ces cas sont effectivement possibles — voir la table p. 19).

Nous avons donc $p(a,1) = 1$, $\sigma(a,1) = 2$. La suite $\sigma(a,2), \dots, \sigma(a, M+1)$ aura la forme $5, 5, \dots, 5$ ou $1, 1, \dots, 1$ ou $1, 1, \dots, 1, 2, 2, \dots, 2$ ou bien $1, 1, \dots, 1, 5, 5, \dots, 5$ (dans cette suite le nombre des unités est égal a m). Enfin

(9,6) $\qquad \sigma(a,k) = 10 \quad \text{pour} \quad k \geqslant N(a) = M + 2$

où $M + 2 \geqslant 3$

D. Il nous reste à considérer le cas

$$a = 10^n \gamma + w$$

où $\sim 10 \mid \gamma$, $n \geqslant 1$, $(10, a) = 1$, $w \neq 1$, c'est-à-dire $w = 3, 7, 9$.

D1. $w = 3$. On voit que $\sim 10 \mid a^N - 1$ pour $N = 1, 2, 3$ et que

$$a^4 = (10^n \gamma + 3)^4 = 10 \gamma_1 + 1,$$

où nous avons posé

$$\gamma_1 \underset{df}{=} \frac{a^4 - 1}{10} = 8 + 108 \cdot 10^{n-1} \gamma + 54 \cdot 10^{2n-1} \gamma^2 + 12 \cdot 10^{3n-1} \gamma^3 + 10^{4n-1} \gamma^4.$$

On voit que

$$p(a, 1) = 4$$

et que $2 \mid \gamma_1$.

Si $\sim 5 \mid \gamma_1$, nous sommes dans le cas C

Si $5 \mid \gamma_1$, alors $a^4 = 10^m \bar{\gamma} + 1$ où $m \geqslant 2$. $p(a, 2) = 4$ et nous sommes dans le cas C ou B ou A.

D2. $w = 9$. On a

$$a^2 = (10^n \gamma + 9)^2 = 10 \gamma_1 + 1$$

où nous avons posé

$$\gamma_1 \underset{df}{=} \frac{a^2 - 1}{10} = 8 + 18 \cdot 10^{n-1} \gamma + 10^{2n-1} \gamma^2$$

On voit que $p(a, 1) = 2$ et que le nombre a^2 appartient à l'un des cas considérés ci-dessus. Une étude plus approfondie montre que nous serons alors dans le cas C ou B ou A.

D3. $w = 7$. On voit que $\sim 10 \mid a^N - 1$ pour $N = 1, 2, 3$. Mais

$$a^4 = (10^n \gamma + 7)^4 = 10 \gamma_1 + 1$$

où nous avons posé

$$\gamma_1 = \frac{a^2 - 1}{10} = 240 + 1372 \cdot 10^{n-1} \gamma + 294 \cdot 10^{2n-1} \gamma^2 + 28 \cdot 10^{3n-1} \gamma^3 + 10^{4n-1} \gamma^4.$$

On voit que $p(a, 1) = 4$ et que a^4 appartient à l'un des cas considérés ci-dessus. Une analyse plus approfondie, montre comme dans le cas D1 et D2 que a^4 ne peut pas être du type A1 ou B1, mais qu'il est du type C ou B ou A.

10. En résumant les résultats des paragraphes 8 et 9, nous voyons que si $(a, 10) = 1$, alors $r(a, k) = 0$ et $p(a, 1)$ ne peut prendre que les valeurs 1, 2, 4. Il existe un nombre $N(a) \geqslant 1$ le plus petit possible, tel que

$$\sigma(a, k) = 10 = \frac{10}{(a, 10)} \qquad \text{pour } k \geqslant N(a) \tag{10,1}$$

Si $N(a) > 1$, alors la suite des $\sigma(a, k)$ ne peut avoir pour $k = 1, 2, \ldots, N(a) - 1$ que l'une des neuf formes possibles:

$$\begin{array}{llll} & 1, 1, \ldots, 1 & 2, 1, 1, \ldots, 1 & 5, 5, \ldots, 5 \\ (10{,}2) & 1, 1, \ldots, 1, 2, 2, \ldots, 2 & 2, 1, 1, \ldots, 1, 2, 2, \ldots, 2 & 2, 5, 5, \ldots, 5 \\ & 1, 1, \ldots, 1, 5, 5, \ldots, 5 & 2, 1, 1, \ldots, 1, 5, 5, \ldots, 5 & 10, 5, 5, \ldots, 5 \end{array}$$

Le tableau p. 19 nous offre des exemples de toutes les suites (10,2) En plus nous avons démontre que $\sigma(a, 1) = 2$ ou $\sigma(a, 1) = 10$ ne peut avoir lieu que si $p(a, 1) = 1$.

11. Remarquons enfin que si

$$a = 10^{\lambda}\gamma, \qquad \sim 10 \mid \gamma,$$

alors

$$p(a, k) = 1 \quad \text{et} \quad r(a, k) = \left[\frac{k}{\lambda}\right] \tag{11,1}$$

12. Nous avons considéré tous les types des nombres possibles. En recueillant tous les résultats obtenus (formules (2,1), (3,2), (3,5), (5,1), (6,3), (6.4), (6,5), (7,1), (7,2), (7,4), (9,2), (9,3), (9,4), (9,5), (9,6), (9,7), (10,1), (11,1)) nous voyons qu'il existe, en effet, pour chaque a un $N(a)$ tel que

$$\sigma(a, k) = \frac{10}{(a, 10)}$$

pour $k \geqslant N(a)$, ce qui achève le démonstration de la formule (1,4); nous voyons aussi que pour chaque k, $\sigma(a, k) \leqslant 10 : (a, 10)$, ce qui achève la démonstration de la formule (1,3)

Il s'ensuit que

$$p(a, k) \leqslant 4.10^{k-1} \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots$$

En recueillant tous les résultats obtenus pour les valeurs de $r(a, k)$ (formules (2,2), (3,3), (4,4), (5,1), (5,2), (7,3), (8,1) et (11,1)) nous voyons que

$$r(a, k) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad a = \gamma \\ \left[\dfrac{k}{\lambda}\right] & \text{pour} \quad \begin{cases} a = 2^{\lambda}\gamma \\ a = 5^{\lambda}\gamma \end{cases} \text{où } (\gamma, 10) = 1 \\ & \phantom{\text{pour}} \quad a = 10^{\lambda}\gamma \quad \text{où} \quad \sim 10 \mid \gamma \end{cases} \tag{12,1}$$

a	$p(a,1)$	$N(a)$	$\sigma(a,k)$ $k=1,2,\dots,N(a)-1$	type (pour a impair)	$\sigma(a,k)$ $k\geqslant N(a)$	$r(a,k)$
2	4	1	—	—	5	k
3	4	4	5, 5, 5	D1; C, $n=1$, $r=3$	10	0
4	2	1	—	—	5	$\{k/2\}$
5	1	2	1	$\gamma=0$, $K=2$	2	k
6	1	1	—	—	5	k
7	4	5	1, 5, 5, 5	D3; C, $n=2$, $r=3$	10	0
8	4	1	—	—	5	$\{k/3\}$
9	2	4	5, 5, 5	D2; C, $n=1$, $r=3$	10	0
10	1	1	—	—	1	k
11	1	3	10, 5	A1; C, $n=1$, $r=1$	10	0
12	4	1	—	—	5	$\{k/2\}$
13	4	4	5, 5, 5	D1; C, $n=1$, $r=3$	10	0
14	2	1	—	—	5	k
15	1	5	2, 1, 1, 1	$\gamma=1$, $K=5$	2	k
16	1	1	—	—	5	$\{k/4\}$
17	4	6	5, 5, 5, 5, 5	D3; C, $n=1$, $r=5$	10	0
18	4	2	1	—	5	k
19	2	3	5, 5	D1; C, $n=1$, $r=2$	10	0
20	1	1	—	—	1	k
21	1	2	5	C; $n=1$, $r=1$	10	0
22	4	1	—	—	5	k
23	4	5	5, 5, 5, 5	D1; C, $n=1$, $r=4$	10	0
24	2	2	1	—	5	$\{k/3\}$
25	1	3	1, 1	$\gamma=2$, $K=3$	2	$\{k/2\}$
26	1	2	1	—	5	k
27	4	4	5, 5, 5	D3; C, $n=1$, $r=3$	10	0
28	4	1	—	—	5	$\{k/2\}$
29	2	3	5, 5	D2; C, $n=1$, $r=2$	10	0
30	1	1	—	—	1	k
31	1	6	10, 5, 5, 5, 5	A1; C, $n=2$, $r=4$	10	0
32	4	2	1	—	5	$\{k/5\}$
51	1	3	2, 5	B1; $r=1$, $s=1$; C, $n=3$, $\bar{r}=1$	10	0
101	1	2	1	A; $n=2$	10	0
251	1	3	2, 1	B1; $r=2$, $s=1$	10	0
501	1	2	1, 2	B; $n=2$, $r=1$	10	0
751	1	5	2, 1, 5, 5	B1; $r=2$, $s=3$; C, $n=3$, $\bar{r}=2$	10	0
1251	1	4	2, 1, 2	B1; $r=3$, $s=1$; B, $n=3$, $\bar{r}=1$	10	0

13. Tableau — remarques. Le tableau ci-joint [2]) donne pour quelques a les valeurs des nombres $p(a, 1)$, $N(a)$, $\sigma(a, k)$, pour $k = 1, 2, \ldots N(a) - 1$, $r(a, k)$ et dans la colonne intitulée „type" on trouve, pour les nombres a impairs, les différents types auxquels appartient

$$a, \quad a^{p(a,1)}, \quad a^{p(a,2)}, \ldots, a^{p(a, N(a))}.$$

14. On peut considérer la plus courte période de la suite des restes de a^n modulo m^k. Alors comme l'a remarqué M. A. Schinzel la formule (1,4), dans laquelle on a posé, m a la place de 10, sera en général *fausse*. En effet, admettons $a = 2$, $m = 4$. On $a^n \equiv 0 \pmod{m^k}$ pour $n \geqslant 2k$, donc $p(2, k) \equiv 1$ et $\sigma(2, k) = 1$. Cependant $4 : (2,4) = 2$.

15. Considérons la suite $u_n(k)$ des restes modulo 10^k de la suite n^n. M. Sierpiński [4] a démontré que la suite $u_n(k)$ est périodique pour chaque k. Désignons par $\Pi(k)$ la longueur de sa plus courte période. Pour k fixe, le nombre $\Pi(k)$ n'est pas plus grand que le plus petit commun multiple de 10^k, $p(1, k)$, $p(2, k)$, ..., $p(10^k, k)$. Nos formules donnant les valeurs de $p(a, k)$ montrent que

$$\Pi(1) \leqslant 20, \qquad \Pi(k) \leqslant 10^k \quad \text{pour } k \geqslant 2.$$

(voir la remarque finale du § 10). En effet nous avons $\Pi(1) = 20$ et $\Pi(k) = 10^k$ pour $k \geqslant 2$ exactement — voir Hampel [2].

16. Il nous reste à démontrer la formule annoncée:

$$2^{\nu 2 \cdot 5^{k+1} + k} \equiv (-1)^\nu 2^k \pmod{10^k} \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{16,1}$$

Avant d'aborder la démonstration de la formule (16,1) nous allons démontrer que si β est un entier $\geqslant 2$ et si $1 \leqslant \nu \leqslant k$, alors

$$\beta^{k-\nu+1} \,\Big|\, \binom{\beta^k}{\nu} \tag{16,2}$$

En effet, nous avons

$$\binom{\beta^k}{\nu} = \frac{\beta^k!}{\nu!\,(\beta^k - \nu)!} = \frac{\beta^k}{\nu} \cdot \frac{\beta^k - 1}{1} \cdot \frac{\beta^k - 2}{2} \cdots \frac{\beta^k - (\nu - 1)}{\nu - 1}.$$

Pour $\nu = 1$ la formule (16,2) est évidente

[2]) Je tiens à remercier M. Olekiewicz, d'avoir eu l'obligeance de me faciliter l'accès d'un arithmomètre, ce qui m'a permis de vérifier facilement tous les calculs nécessaires.

Soit $1 \leqslant \mu < \nu \leqslant k < \beta^k$. Si $\beta^s \mid \mu$, alors $\beta^s \mid \beta^k - \mu$. Donc, si nous posons

$$\prod_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{\beta^k - \mu}{\mu} = \frac{A}{B}, \qquad (A, B) = 1$$

alors $\sim \beta \mid B$. Il s'ensuit que si $\beta^l \left| \frac{\beta^k}{\nu} \right.$ alors $\beta^l \left| \binom{\beta^k}{\nu} \right.$.

On a $\nu \leqslant s^{\nu-1}$. Il en résulte qui si $\beta^s \mid \nu$, alors $\beta^s \mid \beta^{\nu-1}$. Puisque

$$\beta^{k-\nu+1} \left| \frac{\beta^k}{\beta^{\nu-1}} \right.$$

on a

$$\beta^{k-\nu+1} \left| \frac{\beta^k}{\nu} \right. \quad \text{et} \quad \beta^{k-\nu+1} \left| \binom{\beta^k}{\nu} \right..$$

Ainsi la formule (16,2) est démontrée

Remarquons maintenant que pour $k \geqslant 1$

(16,3) $$2^{2 \cdot 5^{k-1}} \equiv -1 \pmod{5^k}$$

En effet,

$$2^{2 \cdot 5^{k-1}} + 1 = (5-1)^{5^{k-1}} + 1 = \sum_{\nu=1}^{5^{k-1}} a_\nu$$

où

$$a_\nu = (-1)^{5^{k-1} - \nu} \binom{5^{k-1}}{\nu} 5^\nu .$$

De la formule (16,2) il s'ensuit que

$$5^k \mid a_\nu$$

et $5^k \mid 2^{2 \cdot 5^{k-1}} + 1$, d'où on obtient (16,3).

En multipliant (16,3) par 2^k nous obtenons la formule

$$2^{2 \cdot 5^{k-1} + k} \equiv -2^k \pmod{10^k}$$

d'ou, il s'ensuit par simple induction, la formule (16,1).

Supposons que m et n soient les plus petits nombres qui vérifient la congruence

$$2^{m-n} \equiv -2^n \pmod{10^k}.$$

Nous avons démontre que de tels nombres existent. Alors

$$2^{2m+n} \equiv 2^m \cdot (-2^n) \equiv -2^{m+n} \equiv 2^n \quad (\bmod 10^k).$$

Donc vu le résultat de M. S i e r p i ń s k i [5], on doit avoir $n = k$, $2m = 4 \cdot 5^{k-1}$ et $m = 2 \cdot 5^{k-1}$; ce sont bien les valeurs obtenues ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. H a m p e l *Wyznaczanie najkrótszego okresu liczb 3^n, 5^n, 11^n oraz $(2^l)^n$* modulo. 10^k, Zeszyty Nauk. Polit. Warszawskiej, Elektryka **1**, (1953) str. 95—102.

[2] ——— *The length of the shortest period of rests of numbers n^n*, Ann. Pol. Math. **1**, (1954) p. 360—366.

[3] M. A. H e a s l e t, J. V. U s p e n s k y *Elementary Number Theory*, New-York — London 1939.

[4] W. S i e r p i ń s k i *Sur la périodicité* mod m *de certaines suites infinies d'entiers*, Ann. Soc. Pol. Math. **23** (1950) p. 252—258.

[5] ——— *Sur les puissances du nombre* 2, Ann. Soc. Pol. Math. **23** (1950) p. 248—251.

[6] ——— *Teoria Liczb*, Warszawa 1950.

S t r e s z c z e n i e

Jak wiadomo istnieją dwie najmniejsze liczby $p > 0$ i $r \geqslant 0$ takie że

$$a^{\nu p + r} \equiv a^r \quad (\bmod 10^k) \qquad \text{dla} \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Oznaczamy je przez $p(a, k)$ i $r(a, k)$. Połóżmy ponadto

$$\sigma(a, k) \underset{df}{=} \frac{p(a, k+1)}{p(a, k)}$$

W. S i e r p i ń s k i dowiódł że $p(2,1) = 4$ i że $\sigma(2, k) = 5$, $(k = 1, 2, \ldots)$. Analogiczne wyniki dla $a = 3, 5, 11$ i 2^λ podał R. H a m p e l. W pracy tej uogólniam te wyniki na dowolne zasady a i otrzymuję twierdzenie:

Jeżeli $(a, 10)$ *oznacza największy wspólny dzielnik* a *i* 10 *to*

$$\sigma(a, k) \leqslant \frac{10}{(a, 10)} \tag{1}$$

przyczym dla każdego a *istnieje takie* $N(a)$ *że dla* $k \geqslant N(a)$ *w* (1) *zachodzi znak równości.*

Ponadto podaję sposób wyznaczania $N(a)$ oraz ciągu $p(a, 1)$, $p(a, 2)$, ..., $p(a, N(a))$; przyczym $p(a, 1) = 1$, 2 lub 4.

Wzory (12,1) podają dokładne wartości $r(a, k)$. Wynika z nich następujące proste szacowanie

$$r(a,k) \leqslant k$$

W ostatnim paragrafie udowadniam wzór

$$2^{\nu 2 \cdot 5^{k-1} + k} \equiv (-1)^{\nu} 2^k \pmod{10^k}$$

wzmacniający wynik W. Sierpińskiego.

Резюме

Как известно, существуют два минимальные числа $p > 0$ и $r \geqslant 0$ такие, что

$$a^{\nu p + r} \equiv a^r \pmod{10^k} \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

Обозначим их через $p(a, k)$ и $r(a, k)$. Кроме того пусть

$$\sigma(a,k) \underset{df}{=} \frac{p(a, k+1)}{p(a,k)}$$

В. Серпинский доказал, что $p(2,1) = 4$ и $\sigma(2,k) = 5$, $k = 1, 2, \ldots$ Аналогичные результаты дла $a = 3, 5, 11$ и 2^{λ} получил Р. Гампел. В настоящем труде я обобщаю эти результаты на произвольные основания a и получаю теорему:

Если $(a, 10)$ *обозначает наиболший общий делитель чисел* a *и* 10 *то*

$$\sigma(a,k) \leqslant \frac{10}{(a,10)} \tag{1}$$

причём для всякого a *существует такое число* $N(a)$, *что для* $k \geqslant N(a)$ *в формуле* (1) *имееш место знак равенства.*

Сверх того я даю способ нахождения $N(a)$, а также последовательности $p(a,1)$, $p(a,2), \ldots,$ $p(a, N(a))$; причём $p(a,1) = 1, 2$ или 4.

Формулы (12,1) дают точные значения $r(a,k)$. Из них вытекает следующая простая оценка

$$r(a,k) \leqslant k.$$

В последнием параграфе я доказываю формулу

$$2^{\nu 2 \cdot 5^{k-1}} \equiv (-1)^{\nu} 2^k \pmod{10^k},$$

усиливающую результат В. Серпинского.