

Z. Seminarium Matematycznego I Wydz. Mat.-Fiz.-Chem. UMCS

Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki

MIECZYŚLAW BIERNACKI

Sur l'équation différentielle $y^{(4)} + A(x)y = 0$

O równaniu różniczkowym $y^{(4)} + A(x)y = 0$

O дифференциальном уравнении $y^{(4)} + A(x)y = 0$

§ 1. On sait que si n est pair et $A(x)$ continue et supérieure à une constante positive pour $x > x_0$ toute intégrale de l'équation $y^{(4)} + A(x)y = 0$ est oscillante c.-à-d. possède une infinité de zéros qui s'accumulent à l'infini.

Dans un article «Sur l'équation différentielle $x'' + A(t)x = 0$ »¹⁾ j'ai établi que si $A(t)$ est une fonction positive et non décroissante pour $t > t_0$ toute intégrale de cette équation est bornée lorsque $t \rightarrow +\infty$. L'exemple de la fonction $A(x) = \text{const.}$ montre que si $A(x)$ est positive et non décroissante pour $x > x_0$ il y a des intégrales de l'équation

$$(1) \quad y^{(4)} + A(x)y = 0$$

qui ne sont pas bornées lorsque $x \rightarrow +\infty$. Je vais cependant établir le résultat suivant.

Théorème I. *Si $A(x)$ est positive, non décroissante et continument dérivable pour $x > x_0$ il existe toujours une intégrale de (1) qui tend vers zéro lorsque $x \rightarrow +\infty$.*

Il résulte de l'étude du cas où $A(x) = \text{const.}$ qu'il y a probablement deux intégrales linéairement indépendantes qui tendent vers zéro et qu'il y a autant d'intégrales linéairement indépendantes qui ne sont pas bornées.

§ 2. Avant d'établir le théorème I nous allons étudier la distribution des zéros des dérivées de trois premiers ordres des intégrales de (1), en supposant seulement que $A(x)$ est continue et supérieure à une constante positive. On sait que dans ces conditions toute intégrale de (1) est oscillante c.-à-d. possède une infinité de zéros s'accumulant à l'infini. Supposons pour simplifier que les zéros de $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ et $y'''(x)$ sont tous simples. En vertu du théorème de Rolle l'intervalle entre deux

¹⁾ Prace Matematyczno-Fizyczne 40, 1933, p. 163-171.

zéros consécutifs d'une intégrale de (1) contient 1 ou 3 zéros de $y'(x)$, au plus 2 zéros de $y''(x)$ et au plus 1 zéro de $y'''(x)$. Nous pouvons d'ailleurs supposer $y(x)$ positive dans l'intervalle considéré. On peut distinguer quatre espèces d'intervalles.

1° L'intervalle contient un seul zéro de $y'(x)$ et un seul zéro de $y''(x)$ (fig. 1 ou 1').

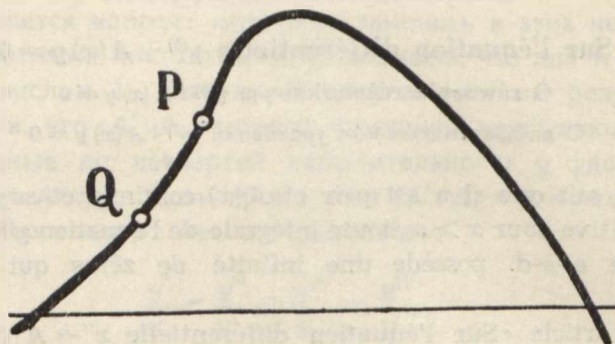


fig. 1

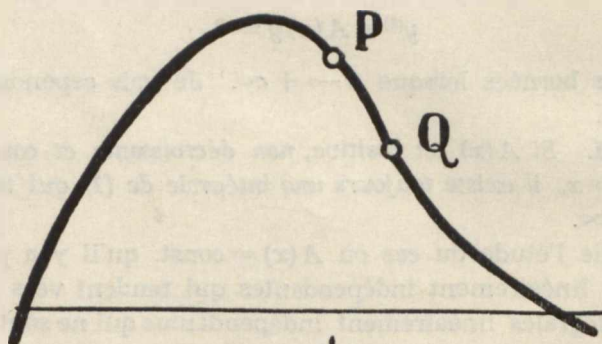


fig. 1'

2° L'intervalle contient un seul zéro de $y'(x)$, tandis que $y''(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle (fig. 2).

3° L'intervalle contient 3 zéros de $y'(x)$ et 2 zéros de $y''(x)$ (fig. 3).

4° L'intervalle contient un seul zéro de $y'(x)$ et 2 zéros de $y''(x)$ (fig. 4).

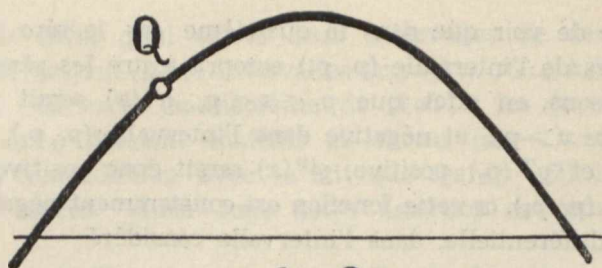


fig. 2

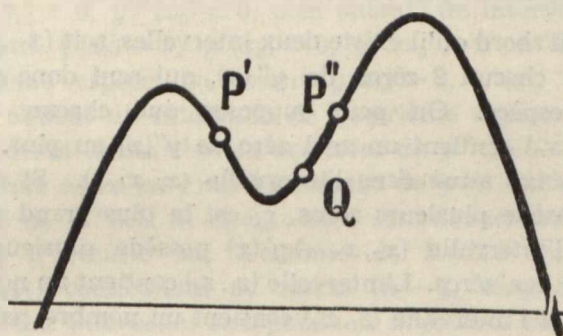


fig. 3

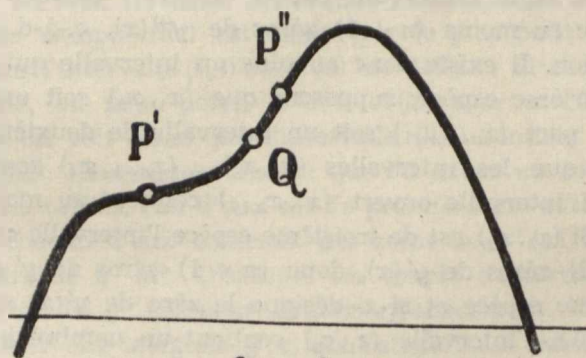


fig. 4

(Les points P , d'abscisses p , correspondent aux valeurs de x qui annulent $y''(x)$, tandis que les points Q , d'abscisses q , correspondent aux valeurs de x qui annulent $y'''(x)$).

Il est aisé de voir que dans le quatrième cas le zéro z de $y'(x)$ est situé en dehors de l'intervalle (p_1, p_2) compris entre les zéros p_1 et p_2 de $y''(x)$. Supposons, en effet, que $p_1 < z < p_2$, $y''(x)$ serait positive pour $x < p_1$ et pour $x > p_2$, et négative dans l'intervalle (p_1, p_2) , $y'''(p_1)$ serait donc négative et $y'''(p_2)$ positive, $y^{(4)}(x)$ serait donc positive en un point de l'intervalle (p_1, p_2) , or cette fonction est constamment négative, en vertu de l'équation différentielle, dans l'intervalle considéré

Nous allons voir maintenant que *tous les intervalles entre les zéros consécutifs d'une intégrale sont de première espèce, sauf un seul au plus.* Ce résultat a été établi par M. J. G. Mikusiński.

Supposons d'abord qu'il existe deux intervalles, soit (x_1, x_2) et (x_n, x_{n+1}) , qui contiennent chacun 2 zéros de $y''(x)$, qui sont donc de troisième ou de quatrième espèce. On peut supposer que chacun des intervalles $(x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ contient un seul zéro de $y''(x)$ au plus. Désignons par z_i le zéro de $y'(x)$ situé dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}) . Si dans l'intervalle (x_1, x_2) $y'(x)$ possède plusieurs zéros, z_1 est le plus grand de ces zéros, de même si dans l'intervalle (x_n, x_{n+1}) $y'(x)$ possède plusieurs zéros, z_n est le plus petit de ces zéros. L'intervalle (z_1, z_2) contient un nombre impair de zéros de $y''(x)$ et l'intervalle (z_1, x_2) contient un nombre pair de ces zéros, l'intervalle (x_2, z_2) contient donc un zéro de $y''(x)$; on voit de la même façon que l'intervalle (z_{n-1}, x_n) contient aussi un zéro de $y''(x)$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $y'(x)$ et à l'intervalle (z_2, z_{n-1}) on voit que l'intervalle ouvert (x_1, x_{n+1}) contient $(n+3)$ zéros de $y''(x)$, donc au moins $(n+1)$ zéros de $y^{(4)}(x)$, c.-à-d. de $y(x)$, d'où une contradiction. Il existe donc au plus un intervalle qui est de troisième ou de quatrième espèce; supposons que (x_1, x_2) soit un tel intervalle et que d'autre part (x_n, x_{n+1}) soit un intervalle de deuxième espèce. On peut supposer que les intervalles $(x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ sont tous de première espèce. L'intervalle ouvert (x_1, x_{n+1}) contient au moins $(n+1)$ zéros de $y''(x)$. Si (x_1, x_2) est de troisième espèce l'intervalle ouvert (x_1, x_{n+1}) contient $(n+2)$ zéros de $y'(x)$, donc $(n+1)$ zéros de $y''(x)$. Si (x_1, x_2) est de quatrième espèce et si z_i désigne le zéro de $y'(x)$ situé dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}) , l'intervalle (z_1, z_2) contient un nombre impair de zéros de $y''(x)$, donc l'intervalle (x_1, z_2) en contient 3 (fig. 4) et l'intervalle (z_2, z_n) contient $(n-2)$ zéros de $y''(x)$, donc l'intervalle ouvert (x_1, x_{n+1}) contient encore $(n+1)$ de ces zéros. Ainsi donc les $(n-1)$ intervalles $(x_2, x_3), \dots, (x_n, x_{n+1})$ devraient contenir $(n-1)$ zéros de $y''(x)$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse, selon laquelle l'intervalle (x_n, x_{n+1}) est de deuxième espèce.

Supposons enfin qu'il existe deux intervalles de deuxième espèce, soit (x_1, x_2) et (x_n, x_{n+1}) , les intervalles $(x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ étant de première espèce. En vertu du théorème de Rolle les $(n-2)$ intervalles $(x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ devraient contenir au moins $(n-1)$ zéros de $y''(x)$, ce qui est en contradiction avec le fait que ces $(n-2)$ intervalles sont de première espèce. Ainsi donc notre assertion est complètement démontrée.

Remarquons d'ailleurs que les intervalles de deuxième, de troisième et de quatrième espèce se présentent effectivement dans le cas de toute équation (1). Il suffit de choisir les conditions initiales suivantes: $y(x_0)=0$, $y'(x_0)>0$, $y''(x_0)<0$, $y'''(x_0)<0$, pour obtenir un intervalle de deuxième espèce. En posant $y(x_0)>0$, $y'(x_0)=0$, $y''(x_0)>0$ on obtient un intervalle de troisième espèce; en posant $y(x_0)>0$, $y'(x_0)>0$, $y''(x_0)=0$, $y'''(x_0)>0$ on obtient un intervalle de quatrième espèce.

Étudions encore la distribution des zéros de $y'''(x)$.

Tout intervalle entre les zéros consécutifs de $y(x)$ contient évidemment au plus un zéro de $y'''(x)$. Si $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ sont des zéros consécutifs d'une intégrale $y(x)$, il résulte du théorème de Rolle que les intervalles $(x_1, x_2), \dots, (x_n, x_{n+1})$ contiennent au moins $(n-2)$ zéros de $y'''(x)$. Donc il y a au plus deux intervalles exceptionnels dépourvus de zéros de $y'''(x)$. Ces intervalles sont évidemment de première ou de deuxième espèce. Un intervalle exceptionnel ne peut être situé entre deux intervalles ordinaires, car entre deux zéros de $y'''(x)$ il y a un nombre impair de zéros de $y(x)$. Donc ou bien les deux intervalles exceptionnels sont voisins, ou bien l'intervalle exceptionnel est limité par le plus petit (le plus grand) zéro de $y(x)$ dans l'intervalle (k, l) où $A(x)$ est définie. Si c'est le second cas qui se présente, on peut poser $A(x)=A(k)$ pour $x<k$, $A(x)=A(l)$ pour $x>l$, et on voit ainsi que l'intervalle (k, l) contient un seul intervalle exceptionnel. Remarquons encore que s'il existe un couple d'intervalles exceptionnels voisins, l'un d'eux est de première et l'autre de deuxième espèce, car si chacun d'eux contenait des zéros de $y''(x)$, l'un d'eux contiendrait un zéro de $y'''(x)$. D'ailleurs un couple d'intervalles voisins dépourvus de zéros de $y'''(x)$ peut exister effectivement. Il suffit, pour le voir, de considérer une intégrale $y(x)$ qui satisfait aux conditions $y(x_0)=0$, $y'(x_0)>0$, $y''(x_0)<0$, $y'''(x_0)<0$ et de supposer que $A(x)$, supérieure à une constante positive, est définie sur tout l'axe réel. On voit encore que si p. ex. l'intervalle de la fig. 1 est exceptionnel, l'intervalle exceptionnel voisin sera situé à gauche de celui-ci. Remarquons pour terminer que dans le cas de la fig. 1', par exemple, le point Q, où $y'''(x)$ s'annule, se trouve nécessairement à droite du point P, où s'annule $y''(x)$, car

autrement la fonction $y''(x)$ aurait un minimum négatif et, par suite, $y'''(x)$ serait croissante en certains points de l'intervalle considéré.

§ 3. Passons à la démonstration du théorème 1. Considérons dans ce but une intégrale $u_n(x)$, satisfaisant aux conditions initiales $u_n(x_n) > 0$, $u'_n(x_n) = 0$, $u''_n(x_n) > 0$ et à la condition

$$(*) \quad u_n^2(x_0) + u_n'^2(x_0) + u_n''^2(x_0) + u_n'''^2(x_0) = 1.$$

Cette intégrale aura évidemment un minimum en x_n , donc ce point appartient à un intervalle I de troisième espèce (fig. 3). Nous avons vu au § 2 que tous les intervalles entre les zéros consécutifs, situés à gauche de I, seront de première espèce. Il est aisé de constater qu'ils correspondent tous au cas de la fig. 1' (ou de la figure symétrique par rapport à l'axe Ox). Supposons maintenant que $x_n \rightarrow +\infty$. En vertu de l'égalité (*) on peut extraire de la suite $\{x_n\}$ une suite partielle telle que les nombres $u_n(x_0)$, $u'_n(x_0)$, $u''_n(x_0)$, $u'''_n(x_0)$ tendent tous vers des limites finies et non toutes nulles, soit z_0, z_1, z_2, z_3 . On sait que dans tout intervalle fini $u_n(x)$ et ses dérivées des trois premiers ordres tendent uniformément vers $y(x)$, respectivement ses dérivées, $y(x)$ étant l'intégrale qui correspond aux conditions initiales $y(x_0) = z_0$, $y'(x_0) = z_1$, $y''(x_0) = z_2$, $y'''(x_0) = z_3$. Il est clair que $y(x)$ n'a que des intervalles de première espèce, correspondant au cas de la fig. 1'. C'est cette intégrale que nous allons considérer. Je vais établir d'abord que cette intégrale est bornée. Nous utilisons un résultat général dû à J. Mikusiński²⁾ «Si $f(a) = f(b) = 0$ et $|f^{(n)}| \geq m|f|$ pour $a \leq x \leq b$, on a $b - a < N \cdot m^{-1/n}$. N est un facteur qui dépend uniquement de n , dont J. Mikusiński a précisé une limite supérieure. Il résulte de cette proposition que si x_n et x_{n+1} sont des zéros consécutifs d'une intégrale de (1), on a, dans les hypothèses du théorème, l'inégalité

$$(2) \quad x_{n+1} - x_n \leq \frac{K}{\sqrt[n]{A(x_n)}}$$

où K est une constante numérique. En particulier, on voit que si $A(x) \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$, la longueur de l'intervalle entre les zéros consécutifs tend vers zéro. Supposons que l'intégrale $y(x)$ ne soit pas bornée. Alors on a nécessairement

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y y' = -\infty.$$

²⁾ Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 222, 1946, p. 359-361.

Dans le cas contraire, en effet, il résulte de la formnle

$$y^2(z_n) = 2 \int_{x_{n+1}}^{z_n} y y' dx,$$

où z_n désigne l'abscisse de l'extrémum unique de $y(x)$, situé dans l'intervalle (x_n, x_{n+1}) , et de (2) que $y(x)$ serait bornée. De (3) il résulte l'existence d'une suite $\{\xi_n\}$ indéfiniment croissante, telle que yy' possède en ξ_n un minimum et que l'on a $y(x)y'(x) > y(\xi_n)y'(\xi_n)$ pour $x_0 < x < \xi_n$. Je poserai pour simplifier $\xi_n = X$. Soit a un nombre quelconque $> x_0$, tel que $y''(a) = 0$. En multipliant le premier membre de l'équation (1) par y'' et en intégrant par parties on obtient

$$(4) \quad (y'''y'' + Ayy')_a^X - \int_a^X A'yy' dx = \int_a^X (y'''' + Ay'^2) dx.$$

Or le premier membre de (4) est égal à l'expression suivante:

$$(4') \quad y'''(X)y''(X) + [y(X)y'(X) - y(0)y'(0)]A(a) + \\ + \int_a^X A'(x)[y(X)y'(X) - y(x)y'(x)] dx.$$

Puisque yy' possède un minimum en X , on a $y'^2(X) + y(X)y''(X) = 0$, donc $y(X)y''(X) < 0$. X appartient à un intervalle de première espèce, si l'intégrale a dans cet intervalle la forme de la fig. 1', on a $y''(X) < 0$, donc $X < p < q$, c.-à-d. $y'''(X) > 0$. Si l'intégrale a dans l'intervalle la forme de la figure symétrique de la fig. 1' par rapport à l'axe Ox , on a $y''(X) < 0$, donc encore $X < p < q$ et $y'''(X) > 0$. En tout cas on a $y''(X)y'''(X) < 0$. De la définition du point X il résulte que les deux autres termes de l'expression (4') sont également négatifs. Cette expression serait donc négative. Or c'est impossible, car elle est égale au membre droit de (4), évidemment positif. Ainsi notre assertion est démontrée.

Nous allons prouver maintenant que l'intégrale $y(x)$ tend vers zéro lorsque $x \rightarrow +\infty$. $A(x)$ étant non décroissante, cette fonction tend vers l'infini ou vers une limite finie. Dans le premier cas il suffit de remarquer que d'après l'inégalité (2) la longueur de l'intervalle entre les zéros consécutifs d'une intégrale tend vers zéro; en admettant que $y(x)$ ne tend pas vers zéro, on obtient comme plus haut la relation (3) et on aboutit comme auparavant à une contradiction. Supposons maintenant que $A(x)$

tende vers une limite finie. Si (3) était remplie, on raisonnerait comme dans le cas précédent, on peut donc supposer que l'on a

$$(5) \quad yy' > -C,$$

où C est une constante positive. Il résulte de l'inégalité (5) et de l'hypothèse selon laquelle $y(x)$ ne tend pas vers zéro, qu'il existe une infinité d'intervalles (x_n, x_{n+1}) entre des zéros consécutifs de $y(x)$ pour lesquels

$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y^2 dx$ est supérieure à une constante positive (il résulte, en effet, de (5)

et de l'inégalité $\text{Max } y^2 > c_1 > 0$, que l'intégrale en question dépasse $c_1^2/2c$). Nous profiterons maintenant de la proposition suivante ³⁾: «Si $y(0) = y(\pi) = 0$ et $(y')^2$ est intégrable au sens de Lebesgue, on a

$$\int_0^\pi y^2 dx \leq \int_0^\pi y'^2 dx.$$

Par un changement de variable on en déduit que si $y(a) = y(b) = 0$ l'on a:

$$\int_a^b y^2 dx \leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b y'^2 dx.$$

En posant $a = x_n$, $b = x_{n+1}$ et en tenant compte de (2), on constate que les intégrales

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'^2 dx$$

sont aussi supérieures, pour les valeurs considérées de n , à une constante positive, donc que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} A y'^2 dx$$

est divergente. Or si a est assez grand, il existe une suite $\{\xi_n\}$, indéfiniment croissante, telle que yy' possède un minimum en ξ_n et que l'on a $y(x)y'(x) > y(\xi_n)y'(\xi_n) - 1$ pour $a < x < \xi_n$. Si X désigne une valeur ξ_n , on voit comme auparavant que $y'''(X)y''(X) < 0$, tandis que la somme des deux autres termes de l'expression (4') ne dépasse pas $2A_0$, où A_0 est la limite finie de $A(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Ainsi l'expression (4') se-

³⁾ Cf. Hardy-Littlewood-Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, 1934, théorème 257, p. 185.

rait bornée supérieurement, tandis que le membre droit de (4), qui lui est égal, augmenterait indéfiniment.

§ 4. Nous allons préciser maintenant l'ordre de grandeur de l'intégrale qui tend vers zéro, en établissant la proposition suivante:

Théorème II. Si $A(x)$ satisfait aux conditions du théorème I et si, de plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = \infty$, alors l'intégrale $y(x)$, qui tend vers zéro et dont il est question dans la démonstration du théorème I, satisfait, quel que soit $\varepsilon > 0$, à la condition

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) [A(x)]^{\frac{1}{3}-\varepsilon} = 0,$$

pourvu que x ne parcoure pas certains intervalles exceptionnels, situés entre les zéros successifs de $y(x)$ et dont l'étendue totale est finie.

Si l'on suppose, de plus, que $A''(x) \leq 0$ pour $x \geq x_0$, on trouve que le produit

$$y(x) [A(x)]^{\frac{1}{3}}$$

est borné lorsque $x \rightarrow +\infty$, sans aucune restriction.

Remarque. Lorsque A'/A est non croissante, les intervalles exceptionnels, dont il est question dans la première partie de l'énoncé n'existent pas. Il est probable que dans le cas général ils peuvent exister effectivement (cf. le renvoi ⁶⁾ ci-dessous).

Avant de passer à la démonstration nous préciserons la notion d'intervalle (x_n, x_{n+1}) ordinaire (x_n est la suite des zéros de l'intégrale). Les raisonnements employés sont analogues à ceux que j'ai exposé dans mon article cité sous ¹⁾ dans le cas de l'équation du deuxième ordre. Nous utiliserons le théorème suivant, dû à E. Borel ⁴⁾ et complété par R. Nevanlinna ⁵⁾:

« Si $u(x)$ est une fonction positive et non décroissante pour $x > 0$, tandis que $\varphi(u)$ est positive et décroissante pour $u \geq 0$ de manière que

$$\int_0^{\infty} \varphi(u) du$$

soit finie, alors on a

$$u \{x + \varphi[u(x)]\} < u(x) + 1$$

⁴⁾ Acta Math. 20, 1896.

⁵⁾ Bull. Sc. Math. 55, 1930.

pour $x > 0$, sauf au plus dans les intervalles dont la longueur totale est finie».

Posons dans cet énoncé $u(x) = [\log A(x)]^2$, $\varphi(u) = 2Ke^{-\frac{1}{4}\sqrt{u}}$, où K est la constante de l'inégalité (2); on aura l'inégalité

$$\left\{ \log A \left(x + \frac{2K}{4\sqrt{A(x)}} \right) \right\}^2 < [\log A(x)]^2 + 1$$

En divisant les deux membres par $\log A(x)$ on a, *a fortiori*

$$\log A \left(x + \frac{2K}{4\sqrt{A(x)}} \right) < \log A(x) + \frac{1}{\log A(x)}$$

c.-à-d.

$$A \left(x + \frac{2K}{4\sqrt{A(x)}} \right) < A(x) e^{\frac{1}{\log A(x)}}$$

Or $e^t < 1 + 2t$ pour t assez petit, donc on a

$$(6) \quad A \left(x + \frac{2K}{4\sqrt{A(x)}} \right) < [1 + \varepsilon(x)] A(x)$$

pour tout $x > x_0$, sauf au plus pour des x remplissant des intervalles d'étendue totale finie. $\varepsilon(x)$ est une fonction décroissante de x qui tend vers zéro lorsque $x \rightarrow \infty$.

Soit donc $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ la suite des zéros consécutifs d'une intégrale quelconque de l'équation (1). Il est clair que l'étendue totale des intervalles (x_n, x_{n+1}) où l'on ne peut trouver un point y_n , tel que $x_n < y_n < \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$ et que l'inégalité (6) soit satisfaite pour $x = y_n$, est finie; autrement (6) ne serait pas remplie dans les intervalles d'étendue infinie. Pour la même raison on peut trouver, sauf peut-être pour les indices n correspondant aux intervalles (x_n, x_{n+1}) d'étendue totale finie, un point w_n tel que $x_n - \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n) < w_n < x_n$ et que l'inégalité (6) soit satisfaite pour $x = w_n$. Ainsi donc la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_{n_i+1} - x_{n_i})$$

où figurent les indices n_i pour lesquels les points y_{n_i} ou w_{n_i} n'existent pas, est convergente. Nous appellerons tous les autres indices n «ordinai-

res» et les intervalles correspondants (x_n, x_{n+1}) seront dits «ordinaires». Supposons que n soit ordinaire, on a, en tenant compte de (2):

$$y_n < \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}) < w_n + x_{n+1} - x_n \leq w_n + \frac{K}{\sqrt[4]{A(x_n)}} \leq w_n + \frac{K}{\sqrt[4]{A(w_n)}}$$

Or l'inégalité (6) a lieu au point $x = w_n$, on aura donc, quelque petit que soit ε , pourvu que n soit assez grand:

$$A(y_n) < (1 + \varepsilon) A(w_n) < (1 + \varepsilon) A(x_n)$$

donc

$$x_{n+1} - y_n < x_{n+1} - x_n \leq \frac{K}{\sqrt[4]{A(x_n)}} < \frac{K\sqrt[4]{1+\varepsilon}}{\sqrt[4]{A(y_n)}} \text{ et } x_{n+1} < y_n + \frac{2K}{\sqrt[4]{A(y_n)}}$$

pourvu que ε soit assez petit. L'inégalité (6), appliquée au point $x = y_n$, fournit alors les inégalités:

$$A(x_{n+1}) < (1 + \varepsilon) A(y_n) < (1 + \varepsilon)^2 A(x_n).$$

En définitive nous avons l'énoncé suivant:

Théorème III. Si $A(x)$ est non décroissante et positive pour $x > x_0$ et si $\{x_n\}$ est la suite des zéros d'une intégrale quelconque de l'équation

$$y^{(4)} + A(x)y = 0,$$

on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(x_{n+1})}{A(x_n)} = 1$ lorsque n ne parcourt pas les indices exceptionnels n_i qui sont tels que la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_{n_{i+1}} - x_{n_i})$$

converge ⁶⁾.

Revenons maintenant à l'intégrale particulière $y(x)$, étudiée au § 3 et qui tend vers zéro lorsque $x \rightarrow +\infty$. Nous avons vu que cette intégrale satisfait à la condition

$$(5) \quad yy' > -C.$$

⁶⁾ Il résulte de la démonstration que l'on a le même énoncé dans le cas d'une équation $y^{(n)} + A(x) \cdot y = 0$, où n est pair. Dans le cas où $n=2$ A. Bielecki a montré que les intervalles exceptionnels peuvent exister effectivement (Annales U. M. C. S., sectio A, vol. IV, 1950).

C étant une constante positive. Supposons que l'intervalle (x_n, x_{n+1}) soit ordinaire et que le maximum de $|y|$ dans cet intervalle, atteint au point z_n , soit égal ou supérieur à $[A(z_n)]^{-s}$ (s est un nombre positif fixe). En intégrant $2yy'$ entre les limites z_n et x_{n+1} et en tenant compte de l'inégalité (2) et du théorème III on a

$$[A(z_n)]^{-2s} \leq \text{Max } |y^2| < 2(x_{n+1} - x_n) \text{Max } |yy'| < \frac{2KC}{\sqrt{A(x_n)}} < \frac{2KC(1+\varepsilon)}{\sqrt{A(z_n)}}.$$

Ainsi donc $[A(z_n)]^{-2s + \frac{1}{4}}$ serait borné, ce qui est impossible si $s < \frac{1}{8}$. Le nombre $|y(z_n)|$ est inférieur à $[A(z_n)]^{-\frac{1}{8} + \frac{\varepsilon}{2}}$ quelque petit que soit ε positif, donc le rapport $|y(z_n)| : [A(z_n)]^{-\frac{1}{8} + \varepsilon}$ tend vers zéro. Ainsi l'assertion de la première partie du théorème II est établie au point z_n ; en vertu du théorème III elle s'étend à tout intervalle (x_n, x_{n+1}) .

Supposons maintenant que A'/A soit non croissante. Dans ce cas tous les intervalles sont ordinaires; cela résulte de suite de ce que l'inégalité (6) est valable sans aucune restriction. On le voit en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $\log A(x)$ et en remarquant que A'/A est bornée.

Passons au cas où $A''(x) \leq 0$ pour $x > x_0$; il résulte de cette hypothèse que A'/A est non croissante, donc tous les intervalles sont encore ordinaires. En effectuant une intégration par parties dans le membre gauche de l'égalité (4) et en y remplaçant X par x et a par x_0 on obtient l'égalité:

$$(7) \quad \left(y''' y'' + A y y' - A' \frac{y^2}{2} \right)_{x_0}^x = \int_{x_0}^x \left(y'''' - A'' \frac{y^3}{2} + A y'^2 \right) dx.$$

Considérons maintenant l'intégrale particulière $y(x)$, dont il était question au § 3. Tous les intervalles entre les zéros consécutifs sont de première espèce et correspondent au cas de la fig. 1' (ou de la figure symétrique par rapport à l'axe $0x$). Dans l'intervalle situé entre le point z_n où $|y(x)|$ atteint, par exemple, le maximum, et le point p_n où $y''(x)$ s'annule (point qui correspond au point P de la figure) on a $y''' \cdot y'' < 0$, $A \cdot y \cdot y' < 0$, donc, le membre droit de (7) étant positif,

$$y''' y'' + A y y' - A' \frac{y^2}{2} > -h$$

où h est une constante positive (la même pour tous les intervalles). *A fortiori*, on a donc dans l'intervalle considéré $|A \cdot y \cdot y'| < h$. Cette iné-

galité s'étend tout de suite à tout l'intervalle (z_n, x_{n+1}) , pourvu que l'on y remplace h par $h(1 + \varepsilon)$, car, pour $p_n < x < x_{n+1}$, on a $|y'(x)| < |y'(p_n)|$ et $|y(x)| < |y(p_n)|$ et, d'autre part, l'intervalle (x_n, x_{n+1}) étant ordinaire, le rapport des valeurs de A en deux points de cet intervalle ne dépasse pas $1 + \varepsilon$. En intégrant l'inégalité

$$\left| \frac{1}{2} y y' \right| < \frac{h(1 + \varepsilon)}{2 A(z_n)}$$

entre les limites x_{n+1} et z_n , on obtient, en tenant compte de l'inégalité (2)

$$y^2(z_n) < \frac{Kh(1 + \varepsilon)}{2 [A(z_n)]^{\frac{5}{4}}}.$$

L'intervalle (x_n, x_{n+1}) étant ordinaire, on a donc en tout point de cet intervalle

$$y^2(x) < \frac{Kh(1 + \varepsilon)^{\frac{9}{4}}}{2 [A(x)]^{\frac{5}{4}}}$$

Cette inégalité équivaut à la deuxième partie de l'énoncé II.

Streszczenie

Udowadniam, że jeśli funkcja $A(x)$ jest dodatnia, nierosnąca i ciągle różniczkowalna dla $x > x_0$, to istnieje zawsze całka $y(x)$ równania różniczkowego $y^{(4)} + A(x) \cdot y = 0$, która dąży do zera gdy $x \rightarrow +\infty$. Jeżeli ponad to $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = +\infty$, to zachodzi związek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) [A(x)]^{\frac{1}{8} - \varepsilon} = 0$$

przy każdym $\varepsilon > 0$, o ile x nie przebiega pewnych przedziałów wyjątkowych, których suma długości jest skończona.

Jeżeli ponad to $A''(x) \leq 0$ dla $x > x_0$, to iloczyn

$$y(x) [A(x)]^{\frac{1}{8}}$$

jest ograniczony gdy $x \rightarrow +\infty$ (przedziały wyjątkowe w tym przypadku nie istnieją).

Резюме

Доказываю что если $A(x)$ является положительной, невозрастающей и непрерывно дифференцируемой для $x > x_0$ функцией, то существует всегда интеграл $y(x)$ дифференциального уравнения $y^{(4)} + A(x)y = 0$ который стремится к нулю, когда $x \rightarrow +\infty$. Если кроме того $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = +\infty$ то имеет место зависимость

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) [A(x)]^{\frac{1}{8}-\varepsilon} = 0$$

для всякого $\varepsilon > 0$, при предположении, что x не перебегают некоторых исключительных интервалов, которых сумма длин является конечной.

Если кроме того $A''(x) \leq 0$ для $x > x_0$, то произведение

$$y(x) [A(x)]^{\frac{5}{8}}$$

является ограниченным, когда $x \rightarrow +\infty$ (исключительные интервалы в этом случае не существуют).