

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Matem.-Przyr. U. S. C. S. w Lublinie
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki.

MIECZYŚLAW BIERNACKI

Sur une inégalité entre les intégrales due à Tchébyscheff

O nierówności całkowej Czebyszewa

Об интегральном неравенстве Чебышена

Tchébyscheff a publié en 1882¹⁾ le théorème suivant: si $f(x)$ et $g(x)$ sont intégrables²⁾ et monotones dans le même sens dans un intervalle (a, b) , tandis que $p(x)$ est positive et intégrable on a l'inégalité

$$\int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \cdot \int_a^b p(x) dx \geq \int_a^b p(x) f(x) dx \cdot \int_a^b p(x) g(x) dx$$

Si l'une des fonctions f et g est croissante et l'autre décroissante dans (a, b) c'est l'inégalité contraire qui a lieu. Le signe d'égalité n'a lieu que si l'une des fonctions f et g se réduit à une constante.

Depuis on a montré³⁾ que l'inégalité (1) subsiste lorsque les fonctions f et g sont „également croissantes“ dans (a, b) , ceci signifiant que pour tout couple x, y des valeurs de cet intervalle on a: $[f(x) - f(y)] [g(x) - g(y)] \geq 0$. Lorsque les fonctions f et g sont „contrairement croissantes“ c'est l'inégalité contraire qui a lieu.

Dans un article „Sur le 2^e théorème de la moyenne et sur l'iné-

¹⁾ cf l'article „Sur l'approximation des intégrales par d'autres“ et „Oeuvres Complètes“, t. III, 1948, p. 128—131. L'inégalité (1) ci dessus n'est qu'un cas particulier des résultats de cet article.

²⁾ au sens de Riemann, donc bornées, c'est ce que nous supposons aussi dans la suite de cet article.

³⁾ cf p. ex. Hardy-Littlewood-Pólya. *Inequalities*. Cambridge, 1934, p. 43.

galité de Tchébycheff" pu'olie dans ces Annales (sectio A tom IV, 12, 1950, p. 123—130) j'ai montré que l'inégalité (1) subsiste lorsque les fonctions:

$$g(x) \text{ et } f_1(x) = \frac{\int_a^x p(x) f(x) dx}{\int_a^x p(x) dx}$$

sont non croissantes ou bien lorsque les fonctions:

$$g(x) \text{ et } f_2(x) = \frac{\int_x^b p(x) f(x) dx}{\int_x^b p(x) dx}$$

sont non décroissantes dans (a, b) . Lorsque $g(x)$ est non croissante et $f_1(x)$ non décroissante ou bien lorsque $g(x)$ est non décroissante et $f_2(x)$ non croissante le signe d'inégalité (1) change. On peut évidemment échanger les rôles des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ ⁴⁾. Actuellement j'ai généralisé ces résultats en établissant le théorème suivant:

Théorème

L'inégalité

$$\int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \cdot \int_a^x p(x) dx \geq \int_a^b p(x) f(x) dx \cdot \int_a^b p(x) g(x) dx$$

dans laquelle $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$ sont des fonctions intégrables dans (a, b) et $p(x)$ est positive dans cet intervalle a lieu lorsque les fonctions:

$$f_1(x) = \frac{\int_a^x p(x) f(x) dx}{\int_a^x p(x) dx} \text{ et } g_1(x) = \frac{\int_a^x p(x) g(x) dx}{\int_a^x p(x) dx}$$

n'atteignent leur valeurs extrémales dans (a, b) qu'en un nombre fini

⁴⁾ Il résultait de la démonstration qu'il n'est pas nécessaire de supposer $p(x)$ positive, il suffit que l'on ait: $\int_a^x p(x) dx > 0$ ($a < x \leq b$) dans le cas où l'on considère $f_1(x)$ ou $g_1(x)$ et $\int_x^b p(x) dx > 0$ ($a \leq x < b$) dans le cas où l'on considère $f_2(x)$ ou $g_2(x)$.

de points, les mêmes pour ces deux fonctions et croissent ou décroissent simultanément dans (a, b) . Dans le cas où $f_1(x)$ croit lorsque $g_1(x)$ décroît et $f_1(x)$ décroît lorsque $g_1(x)$ croît c'est l'inégalité contraire qui a lieu.

On peut remplacer dans cet énoncé $f_1(x)$ par

$$f_2(x) = \frac{\int_x^b p(x)f(x) dx}{\int_x^b p(x) dx} \text{ et en même temps } g_1(x) \text{ par } g_2(x) = \frac{\int_x^b p(x)g(x) dx}{\int_x^b p(x) dx};$$

Remarques. Dans le cas où f_1 et g_1 (ou bien f_2 et g_2) sont monotones dans (a, b) ce théorème constitue bien une généralisation de l'inégalité de Tchébycheff car si f par exemple est monotone f_1 et f_2 le sont aussi et dans le même sens que f (mais non pas inversement). Dans le cas général les hypothèses faites au sujet de f_1 et g_1 sont évidemment moins restrictives que celles de „croissance égale resp. contraire“ mais le théorème ne constitue plus une généralisation de l'énoncé dans lequel on suppose f et g également ou contrairement croissantes. En particulier le théorème n'est plus exact lorsque l'on remplace dans son énoncé f_1 et g_1 par f et g respectivement. On le voit par exemple, en posant $a = 0, b = 1, p(x) \equiv 1, f = 2x$ pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

et $f = 1 - \varepsilon x$ pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 1, g = 1 + \varepsilon x$ pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ et $g = 2 + \frac{1}{2} \varepsilon - 2x$ pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 1, \varepsilon$ étant un nombre positif suffisamment petit. Une généralisation de l'inégalité de Tchébycheff dans une autre direction vient d'être obtenue par N.A. Sapogoff (Uspiehi Mat. Nauk, tom VI, 1951, p. 157—160).

Démonstration. Nous commencerons par établir un théorème analogue mais relatif au cas des suites finies.

Considérons les suites:

$f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_n, p_1, p_2, \dots, p_n$
 où $p_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) et telles que les suites:

$$\varphi_i = \frac{p_1 f_1 + \dots + p_i f_i}{p_1 + \dots + p_i} \quad \gamma_i = \frac{p_1 g_1 + \dots + p_i g_i}{p_1 + \dots + p_i}$$

croissent ou décroissent en même temps c. à. d. telles que l'inégalité

$\varphi_{i+1} \geq \varphi_i$ entraîne $\gamma_{i+1} \geq \gamma_i$ et inversement⁵⁾ Dans ces conditions on a l'inégalité:

$$(1') \quad (p_1 f_1 g_1 + \dots + p_n f_n g_n) (p_1 + \dots + p_n) \geq \\ \geq (p_1 f_1 + \dots + p_n f_n) (p_1 g_1 + \dots + p_n g_n)$$

Cette proposition est évidente pour $n=1$. Supposons qu'elle soit exacte pour n et faisons voir qu'elle subsiste pour $n+1$. Nous devons donc démontrer que:

$$E_{n+1} = (p_1 f_1 g_1 + \dots + p_{n+1} f_{n+1} g_{n+1}) (p_1 + \dots + p_{n+1}) - \\ - (p_1 f_1 + \dots + p_{n+1} f_{n+1}) (p_1 g_1 + \dots + p_{n+1} g_{n+1}) \geq 0$$

pourvu que l'on ait:

$$E_n = (p_1 f_1 g_1 + \dots + p_n f_n g_n) (p_1 + \dots + p_n) - \\ - (p_1 f_1 + \dots + p_n f_n) (p_1 g_1 + \dots + p_n g_n) \geq 0$$

Il suffit évidemment d'établir que:

$$H = \frac{E_{n+1} - E_n}{p_{n+1}} \geq 0$$

Or on trouve que:

$$H = f_{n+1} g_{n+1} (p_1 + \dots + p_n) + (p_1 f_1 g_1 + \dots + p_n f_n g_n) - \\ - f_{n+1} (p_1 g_1 + \dots + p_n g_n) - g_{n+1} (p_1 f_1 + \dots + p_n f_n).$$

Considérons f_{n+1} et g_{n+1} comme variables, on a en dérivant:

$$\frac{\partial H}{\partial f_{n+1}} = g_{n+1} (p_1 + \dots + p_n) - (p_1 g_1 + \dots + p_n g_n) = \\ = (p_1 + \dots + p_n) (g_{n+1} - \gamma_n)$$

et d'une manière analogue: $\frac{\partial H}{\partial g_{n+1}} = (p_1 + \dots + p_n) (f_{n+1} - \varphi_n)$.

Un calcul aisé montre que les inégalités: $g_{n+1} \geq \gamma_n$ et $f_{n+1} \geq \varphi_n$ sont équivalentes aux inégalités: $\gamma_{n+1} \geq \gamma_n$ et $\varphi_{n+1} \geq \varphi_n$ respectivement, il résulte donc des hypothèses faites que l'on a soit $g_{n+1} - \gamma_n \geq 0$ et $f_{n+1} - \varphi_n \geq 0$ soit $g_{n+1} - \gamma_n \leq 0$ et $f_{n+1} - \varphi_n \leq 0$. Dans les deux cas on diminue H en remplaçant

⁵⁾ Cette condition est évidemment moins restrictive que celle d'égale croissance qui exige que l'on ait: $\varphi_i \geq \varphi_k$ en même temps que $\gamma_i \geq \gamma_k$ et inversement ($i, k = 1, 2, \dots, n$).

f_{n+1} et g_{n+1} par φ_n et γ_n respectivement, or après cette substitution on trouve que:

$$H = (p_1 f_1 g_1 + \dots + p_n f_n g_n) - \varphi_n \gamma_n (p_1 + \dots + p_n)$$

expression non négative en vertu de la définition des nombres φ_n et γ_n et de l'hypothèse $E_n \geq 0$.

Pour établir maintenant le théorème dans le cas où $f_1(x)$ et $g_1(x)$ croissent ou décroissent simultanément, désignons par s le nombre des extréma des fonctions f_1 et g_1 dans (a, b) . Divisons cet intervalle en n parties à l'aide de s points où f_1 et g_1 ont des extréma et de $(n-s-1)$ points: $a + \frac{b-a}{n-s} \cdot k$ ($k = 1, 2, \dots, n-s-1$). En désignant les points de divisions ainsi obtenus et rangés dans l'ordre croissant par x_1, x_2, \dots, x_{n-1} nous définissons dans chaque intervalle partiel les nombres f_k et g_k à l'aide de relations:

$$f_k \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) f(x) dx$$

$$(k = 1, \dots, n; x_0 = a, x_n = b)$$

$$g_k \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) g(x) dx$$

et nous construisons la suite p_1, p_2, \dots, p_n en posant

$$p_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Si dans un intervalle (x_{k-1}, x_k) $f_1(x)$ croit on a dans cet intervalle:

$$M_f(x) \geq \frac{\int_a^x p(x) f(x) dx}{\int_a^x p(x) dx} = f_1(x), ^6)$$

donc en particulier:

$$f_k = \frac{\int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) f(x) dx}{\int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) dx} \geq \frac{\int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) f_1(x) dx}{\int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) dx} > f_1(x_{k-1}) =$$

$$= \frac{p_1 f_1 + \dots + p_{k-1} f_{k-1}}{p_1 + \dots + p_{k-1}} = \varphi_{k-1}$$

⁶⁾ $M_f(x) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} f(t) \quad (|t - x| < \epsilon)$

et ceci équivaut à l'inégalité: $\varphi_k > \varphi_{k-1}$. Au contraire, si $f_1(x)$ décroît dans (x_{k-1}, x_k) on a dans cet intervalle:

$$f_k = \frac{\int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) f(x) dx}{\int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) dx} \leq \frac{\int_{x_{k-1}}^{x_{k-1}} p(x) f_1(x) dx}{\int_{x_{k-1}}^{x_{k-1}} p(x) dx} < f_1(x_{k-1}) = \varphi_{k-1}, \text{ donc } \varphi_k < \varphi_{k-1}.$$

D'une manière analogue on trouve que $\gamma_k > \gamma_{k-1}$ si $g_1(x)$ croît dans l'intervalle (x_{k-1}, x_k) et $\gamma_k < \gamma_{k-1}$ si $g_1(x)$ décroît dans cet intervalle. Ainsi donc les suites f_i, g_i, p_i remplissent les conditions du théorème relatif aux suites et l'inégalité (1) a donc lieu. Or les sommes $p_1 + \dots + p_n, p_1 f_1 + \dots + p_n f_n, p_1 g_1 + \dots + p_n g_n$ sont égales à des intégrales correspondantes entre des limites a et b . La somme $p_1 f_1 g_1 + \dots + p_n f_n g_n$ est égale à

$$\sum_{k=1}^n \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} p f dx \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} p g dx \cdot \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} p dx \right)^{-1} \right]$$

et elle tend vers $\int_a^b p f g dx$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Nous obtenons donc bien l'inégalité (1).

Le théorème est ainsi démontré dans le cas où $f_1(x)$ et $g_1(x)$ croissent ou décroissent simultanément. Le cas où $f_1(x)$ croît et $g_1(x)$ décroît (ou inversement) se ramène au cas précédent en remplaçant $g(x)$ par $-g(x)$.

La cas où l'on considère $f_2(x)$ et $g_2(x)$ se ramène au cas où l'on considère $f_1(x)$ et $g_1(x)$ par le changement de variable $x = a + b - y$.

Streszczenie

Uogólniając nierówność całkową Czebyszewa dowodzę, że jeśli $f(x), g(x), p(x)$ są funkcjami całkowanymi w przedziale (a, b) , przy czym $p(x)$ jest także dodatnią, a funkcje:

$$f_1(x) = \frac{\int_a^x p(x) f(x) dx}{\int_a^x p(x) dx} \quad \text{i} \quad g_1(x) = \frac{\int_a^x p(x) g(x) dx}{\int_a^x p(x) dx}$$

osiągają wartości ekstremalne w (a, b) w skończonej liczbie punktów, które są te same dla obu funkcji i jednocześnie rosną lub maleją w (a, b) , to zachodzi nierówność:

$$\int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \cdot \int_a^b p(x) dx \geq \int_a^b p(x) f(x) dx \cdot \int_a^b p(x) g(x) dx$$

Jeśli $g_1(x)$ maleje, gdy $f_1(x)$ rośnie i na odwrót, to znak nierówności się zmienia.

Резюме

Обобщая интегральное неравенство Чебышева доказываю, что если $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$ являются функциями интегрируемыми в интервале (a, b) , причём $p(x)$ есть положительная а функции:

$$f_1(x) = \frac{\int_a^x p(x) f(x) dx}{\int_a^x p(x) dx} \quad \text{и} \quad g_1(x) = \frac{\int_a^x p(x) g(x) dx}{\int_a^x p(x) dx}$$

достигают экстремальных значений в (a, b) в конечном числе точек, которые являются те же для обеих функций и одновременно возрастают или убывают в (a, b) , то имеет место неравенство

$$\int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \cdot \int_a^b p(x) dx \geq \int_a^b p(x) f(x) dx \cdot \int_a^b p(x) g(x) dx$$

Если $g_1(x)$ убывает, когда $f_1(x)$ возрастает и наоборот, то знак неравенства изменяется.

