ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. V, 2 SECTIO A 1951

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Matem.-Przyr. U. S. C. S. w Lublinie
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki.

MIECZYSŁAW BIERNACKI

Sur une inégalité entre les intégrales due à Tchébyscheff

O nierówności całkowej Czebyszewa

Об интегральном неравенстве Чебышева

Tchébycheff a publié en 1882[1]) le théorème suivant: si $f(x)$ et $g(x)$ sont intégrables[2]) et monotones dans le même sens dans un intervalle (a, b), tandis que $p(x)$ est positive et intégrable on a l'inégalité

$$\int_a^b p(x) f(x) g(x)\, dx \cdot \int_a^b p(x)\, dx \geqslant \int_a^b p(x) f(x)\, dx \cdot \int_a^b p(x) g(x)\, dx$$

Si l'une des fonctions f et g est croissante et l'autre décroissante dans (a, b) c'est l'inégalité contraire qui a lieu. Le signe d'égalité n'a lieu que si l'une des fonctions f et g se réduit à une constante.

Depuis on a montré[3]) que l'inégalité (1) subsiste lorsque les fonctions f et g sont „également croissantes" dans (a, b), ceci signifiant que pour tout couple x, y des valeurs de cet intervalle on a: $[f(x) - f(y)]\ [g(x) - g(y)] \geqslant 0$. Lorsque les fonctions f et g sont „contrairement croissantes" c'est l'inégalité contraire qui a lieu.

Dans un article „*Sur le 2 théorème de la moyenne et sur l'iné-*

---

[1]) cf l'article „*Sur l'aproximation des intégrales par d'autres*" et „*Oeuvres Complètes*", t. III, 1948, p. 128—131. L'inégalité (1) ci dessus n'est qu'un cas particulier des résultats de cet article.

[2]) au sens de Riemann, donc bornées, c'est ce que nous supposerons aussi dans la suite de cet article.

[3]) cf p. ex. Hardy-Littlewood-Pólya. *Inequalities*. Cambridge, 1934, p. 43.

galité de Tchébycheff" pu'olie dans ces Annales (sectio A tom IV, 12, 1950, p. 123—130) j'ai montré que l'inégalité (1) subsiste lorsque les fonctions:

$$g(x) \quad \text{et} \quad f_1(x) = \frac{\int_a^x p(x)\, f(x)\, dx}{\int_a^x p(x)\, dx}$$

sont non croissantes ou bien lorsque les fonctions:

$$g(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{\int_x^b p(x)\, f(x)\, dx}{\int_x^b p(x)\, dx}$$

sont non décroissantes dans (a, b). Lorsque $g(x)$ est non croissante et $f_1(x)$ non décroissante ou bien lorsque $g(x)$ est non décroissante et $f_2(x)$ non croissante le signe d'inégalité (1) change. On peut évidemment échanger les rôles des fonctions $f(x)$ et $g(x)$[4]). Actuellement j'ai généralisé ces résultats en établissant le théorème suivant:

Théorème

L'inégalité

$$\int_a^b p(x) f(x) g(x)\, dx \cdot \int_a^x p(x)\, dx \geqslant \int_a^b p(x) f(x)\, dx \cdot \int_a^b p(x) g(x)\, dx$$

dans laquelle $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$ sont des fonctions intégrables dans (a, b) et $p(x)$ est positive dans cet intervalle a lieu lorsque les fonctions:

$$f_1(x) = \frac{\int_a^x p(x)\, f(x)\, dx}{\int_a^x p(x)\, dx} \quad \text{et} \quad g_1(x) = \frac{\int_a^x p(x)\, g(x)\, dx}{\int_a^x p(x)\, dx}$$

n'atteignent leur valeurs extrémales dans (a, b) qu'en un nombre fini

---

[4]) Il résultait de la démonstration qu'il n'est pas nécessaire de supposer p(x) positive, il suffit que l'on ait: $\int_a^x p(x)\, dx > o$ $(a < x \leqslant b)$ dans le cas où l'on considère $f_1(x)$ ou $g_1(x)$ et $\int_x^b p(x)\, dx > o$ $(a \leqslant x < b)$ dans le cas ou l'on considère $f_2(x)$ ou $g_2(x)$.

de points, les mêmes pour ces deux fonctions et croissent ou décroissent simultanément dans (a, b). *Dans le cas où* $f_1(x)$ *croit lorsque* $g_1(x)$ *décroit et* $f_1(x)$ *décroit lorsque* $g_1(x)$ *croit c'est l'inégalité contraire qui a lieu.*

On peut remplacer dans cet énoncé $f_1(x)$ *par*

$$f_2(x) = \frac{\int_x^b p(x) f(x)\, dx}{\int_x^b p(x)\, dx} \text{ et en même temps } g_1(x) \text{ par } g_2(x) = \frac{\int_x^b p(x) g(x)\, dx}{\int_x^b p(x)\, dx};$$

Remarques. Dans le cas où f_1 et g_1 (ou bien f_2 et g_2) sont monotones dans (a, b) ce théorème constitue bien une généralisation de l'inégalité de Tchébycheff car si f par exemple est monotone f_1 et f_2 le sont aussi et dans le même sens que f (mais non pas inversement). Dans le cas général les hypothèses faites au sujet de f_1 et g_1 sont évidemment moins restrictives que celles de „croissance égale resp. contraire" mais le théorème ne constitue plus une généralisation de l'énoncé dans lequel on suppose f et g également ou controirement croissantes. En particulier le théorème n'est plus exact lorsque l'on remplace dans son énoncé f_1 et g_1 par f et g respectivement. On le voit par exemple, en posant $a = 0$, $b = 1, p(x) = 1$, $f = 2x$ pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ et $f = 1 - \varepsilon x$ pour $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, $g = 1 + \varepsilon x$ pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ et $g = 2 + \frac{1}{2}\varepsilon - 2x$ pour $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, ε étant un nombre positif suffisamment petit. Une généralisation de l'inégalité de Tchébycheff dans une autre direction vient d'être obtenue par N.A. Sapogoff (Uspiehi Mat. Nauk, tom VI, 1951, p. 157—160).

Démonstration. Nous commencerons par établir un théorème analogue mais relatif au cas des suites finies.

Considérons les suites:

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \quad g_1, g_2, \ldots, g_n, \quad p_1, p_2, \ldots, p_n$$

où $p_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et telles que les suites:

$$\varphi_i = \frac{p_1 f_1 + \ldots + p_i f_i}{p_1 + \ldots + p_i} \qquad \gamma_i = \frac{p_1 g_1 + \ldots + p_i g_i}{p_1 + \ldots + p_i}$$

croissent ou décroissent en même temps c. à. d. telles que l'inégalité

$\varphi_{i+1} \geqslant \varphi_i$ entraine $\gamma_{i+1} \geqslant \gamma_i$ et inversement[5]) Dans ces conditions on a l'inégalité:

$$(1') \qquad (p_1 f_1 g_1 + \ldots + p_n f_n g_n)(p_1 + \ldots + p_n) \geqslant \\ \geqslant (p_1 f_1 + \ldots + p_n f_n)(p_1 g_1 + \ldots + p_n g_n)$$

Cette proposition est évidente pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit exacte pour n et faisons voir qu'elle subsiste pour $n + 1$. Nous devons donc démontrer que:

$$E_{n+1} = (p_1 f_1 g_1 + \ldots + p_{n+1} f_{n+1} g_{n+1})(p_1 + \ldots + p_{n+1}) - \\ - (p_1 f_1 + \ldots + p_{n+1} f_{n+1})(p_1 g_1 + \ldots + p_{n+1} g_{n+1}) \geqslant 0$$

pourvu que l'on ait:

$$E_n = (p_1 f_1 g_1 + \ldots + p_n f_n g_n)(p_1 + \ldots + p_n) - \\ - (p_1 f_1 + \ldots + p_n f_n)(p_1 g_1 + \ldots + p_n g_n) \geqslant 0$$

Il suffit évidemment d'établir que:

$$H = \frac{E_{n+1} - E_n}{p_{n+1}} \geqslant 0$$

Or on trouve que:

$$H = f_{n+1} g_{n+1}(p_1 + \ldots + p_n) + (p_1 f_1 g_1 + \ldots + p_n f_n g_n) - \\ - f_{n+1}(p_1 g_1 + \ldots + p_n g_n) - g_{n+1}(p_1 f_1 + \ldots + p_n f_n).$$

Considérons f_{n+1} et g_{n+1} comme variables, on a en dérivant:

$$\frac{\partial H}{\partial f_{n+1}} = g_{n+1}(p_1 + \ldots + p_n) - (p_1 g_1 + \ldots + p_n g_n) = \\ = (p_1 + \ldots + p_n)(g_{n+1} - \gamma_n)$$

et d'une manière analogue: $\dfrac{\partial H}{\partial g_{n+1}} = (p_1 + \ldots + p_n)(f_{n+1} - \varphi_n)$.

Un calcul aisé montre que les inegalités: $g_{n+1} \geqslant \gamma_n$ et $f_{n+1} \geqslant \varphi_n$ sont equivalentes aux inegalités: $\gamma_{n+1} \geqslant \gamma_n$ et $\varphi_{n+1} \geqslant \varphi_n$ respectivement, il résulte donc des hypothèses faites que l'on a soit $g_{n+1} - \gamma_n \geqslant 0$ et $f_{n+1} - \varphi_n \geqslant 0$ soit $g_{n+1} - \gamma_n \leqslant 0$ et $f_{n+1} - \varphi_n \leqslant 0$. Dans les deux cas on diminue H en remplaçant

[5]) Cette condition est évidemment moins restrictive que celle d'égale croissance qui exige que l'on ait: $\varphi_i \geqslant \varphi_k$ en même temps que $\gamma_i \geqslant \gamma_k$ et inversement (i, k = 1,2, . . . , n).

f_{n+1} et g_{n+1} par φ_n et γ_n respectivement, or apres cette substitution on trouve que:

$$H = (p_1 f_1 g_1 + \ldots + p_n f_n g_n) - \varphi_n \gamma_n (p_1 + \ldots + p_n)$$

expression non négative en vertu da la définition des nombres φ_n et γ_n et de l'hypothèse $E_n \geqslant 0$.

Pour établir maintenant le théorème dans le cas où $f_1(x)$ et $g_1(x)$ croissent ou décroissent simultanément, désignons par s le nombre des extréma des fonctions f_1 et g_1 dans (a, b). Divisons cet intervalle en n parties à l'aide de s points où f_1 et g_1 ont des extréma et de $(n-s-1)$ points: $a + \frac{b-a}{n-s} \cdot k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-s-1)$. En désignant le points de divisions ainsi obtenus et rangés dans l'ordre croissant par $x_1\, x_2, \ldots, x_{n-1}$ nous définissons dans chaque intervalle partiel les nombres f_k et g_k à l'aide de relations:

$$f_k \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x)\, dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x)\, f(x)\, dx$$

$$(k = 1, \ldots, n;\ x_0 = a,\ x_n = b)$$

$$g_k \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x)\, dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x)\, g(x)\, dx$$

et nous construisons la suite $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en posant

$$p_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x)\, dx \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Si dans un intervalle (x_{k-1}, x_k) $f_1(x)$ croit on a dans cet intervalle:

$$M_f(x) \geqslant \frac{\int_a^x p(x)\, f(x)\, dx}{\int_a^x p(x)\, dx} = f_1(x),\ ^{6)}$$

donc en particulier:

$$f_k = \frac{\int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x)\, f(x)\, dx}{\int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x)\, dx} \geqslant \frac{\int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x)\, f_1(x)\, dx}{\int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x)\, dx} > f_1(x_{k-1}) =$$

$$= \frac{p_1 f_1 + \ldots + p_{k-1} f_{k-1}}{p_1 + \ldots + p_{k-1}} = \varphi_{k-1}$$

---

6) $M_f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup f(t)$ $(|t - x| < \varepsilon)$

et ceci équivaut à l'inégalité: $\varphi_k > \varphi_{k-1}$. Au contraire, si $f_1(x)$ décroit dans (x_{k-1}, x_k) on a dans cet intervalle:

$$f_k = \frac{\int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x)\, f(x)\, dx}{\int_{x_{k-1}}^{\zeta_k} p(x)\, dx} \leqslant \frac{\int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x)\, f_1(x)\, dx}{\int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x)\, dx} < f_1(x_{k-1}) =$$

$$= \varphi_{k-1}, \quad \text{donc} \quad \varphi_k < \varphi_{k-1}.$$

D'une manière analogue on trouve que $\gamma_k > \gamma_{k-1}$ si $g_1(x)$ croit dans l'intervalle (x_{k-1}, x_k) et $\gamma_k < \gamma_{k-1}$ si $g_1(x)$ décroit dtns cet intervalle. Ainsi donc les suites f_i, g_i, p_i remplissent les conditions du théorème relatif aux suites et l'inégalité (1') a donc lieu. Or les sommes $p_1 + \ldots p_n$, $p_1 f_1 + \ldots + p_n f_n$, $p_1 g_1 + \ldots + p_n g_n$ sont égales à des intégrales correspondantes entre des limites a et b. La somme $p_1 f_1 g_1 + \ldots + p_n f_n g_n$ est égale à

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} p f\, dx \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} p g\, dx \cdot \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} p\, dx \right)^{-1} \right]$$

et elle tend vers $\int_a^b p f g\, dx$ lorsque $n \to \infty$. Nous obtenons donc bien l' inégalité (1).

Le théorème est ainsi démontré dans le cas où $f_1(x)$ et $g_1(x)$ croissent ou décroissent simultanément. Le cas où $f_1(x)$ croit et $g_1(x)$ décroit (ou inversement) se ramène au cas précedent en remplaçant $g(x)$ par $-g(x)$.

La cas où l'on considère $f_2(x)$ et $g_2(x)$ se ramène au cas où l'on considère $f_1(x)$ et $g_1(x)$ par le changement de variable $x = a + b - y$.

Streszczenie

Uogólniając nierówność całkową Czebyszewa dowodzę, że jeśli $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$ są funkcjami całkowalnymi w przedziale (a, b), przy czym $p(x)$ jest także dodatnią, a funkcje:

$$f_1(x) = \frac{\int_a^x p(x)\, f(x)\, dx}{\int_a^x p(x)\, dx} \quad \text{i} \quad g_1(x) = \frac{\int_a^x p(x)\, g(x)\, dx}{\int_a^x p(x)\, dx}$$

osiągają wartości extremalne w (a, b) w skończonej liczbie punktów, które są te same dla obu funkcji i jednocześnie rosną lub maleją w (a, b), to zachodzi nierówność:

$$\int_a^b p(x)\, f(x)\, g(x)\, dx \cdot \int_a^b p(x)\, dx \geqslant \int_a^b p(x)\, f(x)\, dx \cdot \int_a^b p(x)\, g(x)\, dx$$

Jeśli $g_1(x)$ maleje, gdy $f_1(x)$ rośnie i na odwrót, to znak nierówności się zmienia.

Резюме

Обобщая интегральное неравенство Чебышева доказываю, что если $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$ являются функциями интегрируемыми в интервале (a, b), причём $p(x)$ есть положительная а функции:

$$f_1(x) = \frac{\int_a^x p(x)\, f(x)\, dx}{\int_a^x p(x)\, dx} \quad \text{и} \quad g_1(x) = \frac{\int_a^x p(x)\, g(x)\, dx}{\int_a^x p(x)\, dx}$$

достигают экстремальных значений в (a, b) в конечном числе точек, которые являются те же для обеих функций и одновременно возрастают или убывают в (a, b), то имеет место неравенство

$$\int_a^b p(x)\, f(x)\, g(x)\, dx \cdot \int_a^b p(x)\, dx \geqslant \int_a^b p(x)\, f(x)\, dx \cdot \int_a^b p(x)\, g(x)\, dx$$

Если $g_1(x)$ убывает, когда $f_1(x)$ возрастает и наоборот, то знак неравенства изменяется.