ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. IV, 8 SECTIO A 1950

Z Seminarium Matematycznego I Wydziału Matem.-Przyr. U. M. C. S.
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki.

Witold JANOWSKI

Le maximum d'argument des fonctions univalentes bornées

Maksimum argumentu funkcyj różnowartościowych ograniczonych

Termes et notations.

Les notations et les termes de ce travail sont empruntées à la note de Z. Charzyński et W. Janowski „Sur l'équation générale des fonctions extrémales dans la famille des fonctions univalentes bornées" ce vol. 7, p. 41—56.

Introduction.

Dans ce travail nous obtenons certains résultats concernant le maximum de l'argument des fonctions univalentes bornées et non bornées, résultats qui appartiennent à la catégorie des théorèmes sur la déformation.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance profonde à M. le prof. dr. Mieczysław Biernacki et à M. le prof. dr. Franciszek Leja de l'interêt bienveillant qu'ils ont accordé à ce travail.

Je dédie cet ouvrage à Mr. le dr. Zygmunt Charzyński.

A. 1. Considérons les fonctions holomorphes univalentes dans le cercle $|z|<1$ (c. à. d des fonctions qui ne prennent qu'une fois chacune de leurs valeurs dans ce cercle) de la forme

(1) $$F(z)=z+A_2z^2+\dots$$

Soit M un nombre positif quelconque, F_M — la famille de toutes les fonctions bornées de la forme (1) assujetties à la condition $|F(z)|<M$, et F_∞ — la famille de toutes les fonctions de la forme (1).

La valeur de z étant fixée, nous considérons l'expression

(2) $$\arg\frac{F(z)}{z}$$

où l'on prend la branche de l'argument qui est égale à 0 pour $z=0$. Ainsi formée l'expression (2) est une fonctionnelle définie dans la famille F_∞ et par conséquent dans F_M.

Nous démontrons les théorèmes fondamentaux suivants:

I. *Pour les fonctions de la famille F_M on a l'inégalité*:

$$\arg \frac{F(z)}{z} \leqslant \varphi_M, \tag{3}$$

où φ_M et ϱ_M $(0<\varrho_M<|z|)$ satisfont aux équations:

$$\varphi_M = \frac{1-\left(\frac{\varrho_M}{M}\right)^2}{1+\left(\frac{\varrho_M}{M}\right)^2} \log\left(\frac{1-\frac{\varrho_M}{M}}{1+\frac{\varrho_M}{M}} : \frac{1-|z|}{1+|z|}\right) \tag{4}$$

$$\frac{2\frac{\varrho_M}{M}}{1+\left(\frac{\varrho_M}{M}\right)^2} \log\left(\frac{1-\frac{\varrho_M}{M}}{1+\frac{\varrho_M}{M}} : \frac{1-|z|}{1+|z|}\right) + \log M \frac{1-|z|^2}{|z|\left(\frac{M}{\varrho_M}-\frac{\varrho_M}{M}\right)} = 0, \tag{5}$$

et cette limite est atteinte.

II. *Pour les fonctions de la famille F_∞ on a l'inégalité*;

$$\arg \frac{F(z)}{z} \leqslant \varphi_\infty \tag{6}$$

où

$$\varphi_\infty = \log\frac{1+|z|}{1-|z|}, \tag{7}$$

et cette limite est atteinte.

2. Interprétation géométrique. Considérons dans le plan z deux demi-droites issues du point 0 et passant respectivement par les points z et $F(z)$, la différence de leurs angles respectifs avec le demi-axe réel positif du plan z est égal à $\arg \frac{F(z)}{z}$. Les théorèmes I et II montrent, que z étant fixé et $F(z)$ parcourant les fonctions de la famille F_M, respectivement F_∞, l'angle égal à $\arg \frac{F(z)}{z}$ est borné selon (3) respectivement (6).

B. Avant de procéder à la démonstration il y a lieu de remarquer que les théorèmes conservent leur généralité si l'on suppose que

$z=r>0$ (ce qui dans l'interprétation geométrique se réduit à une rotation du plan de la variable z). Nous utiliserons cette remarque dans notre démonstration.

Remarquons en outre que les théorèmes cités sont équivalents à ceux qui établissent l'existence de la fonction extrémale par rapport à la fonctionnelle (2) dans la famille F_M, respectivement dans F_∞ et dont l'argument est égal à l'expression située de côté droit de la formule (4), resp. (7).

Pour démontrer ces derniers théorèmes considérons d'abord la famille F_T[1]) des fonctions $f(z)$ en y déterminant $\arg \frac{f(z)}{z}$ pour $z=r$ de la même manière, que la fonctionnelle (2) dans F_M resp. F_∞. Nous démontrerons que cette famille F_T possède aussi les propriétés qui permettent de conclure à l'existence et l'équation des fonctions extrémales $f^*(z)$ de la famille; d'où, en vertu de certaines propriétés de cette équation, nous obtiendrons, tous les calculs faits, deux équations, auxquelles satisfait $\arg \frac{f(z)}{z}$ pour $z=r$ (avec le nombre $\varrho=|f^*(r)|$).

Enfin, en normalisant les fonctions de la famille F_T par leur premier coefficient, nous obtiendrons aisément le théorème I et ensuite en passant à la limite le théorème II.

C. Nous allons démontrer maintenant successivement les théorèmes I et II.

I. 1. Dans ce but considérons la famille F_T et la fonctionnelle qui y est déterminée:

$$K(f)=(\arg \frac{f(z)}{z})\ z=r\,. \tag{8}$$

Nous constatons que la fonctionnelle (8) a dans chaque point f de la famille F_T la différentielle

$$L(h)\equiv \mathrm{I}\left\{\frac{h(r)}{f(r)}\right\} \qquad h=h(z)\in H\,, \tag{9}$$

qui ne s'annule pas identiquement dans aucun point de F_T.

---

[1]) F_T où $0<T<1$ est la famille de toutes les fonctions univalentes bornées dans $|z|<1$ de la forme $f(z)=a_1z+a_2z^2+\dots$, où $a_1\geq T$ et assujetties à la condition $|f(z)|<1$ pour tout $|z|<1$; comparer Z. Charzyński „Sur les fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes bornées", (à paraitre dans les Annales de la Soc. Pol. de Math. tome 24).

En effet, on a

$$\lim_{\|\Delta f\|_n \to 0} \frac{|k(f+\Delta f) - k(f) - L(\Delta f)|}{\|\Delta f\|_n} = \tag{10}$$

$$= \lim_{\|\Delta f\|_n \to 0} \frac{\left| l\left\{\log \frac{f(r)+\Delta f(r)}{r}\right\} - l\left\{\log \frac{f(r)}{r}\right\} - l\left\{\frac{\Delta f(r)}{f(r)}\right\}\right|}{\|\Delta f\|_n}$$

$$= \lim_{\|\Delta f\|_n \to 0} \left| l\left\{ \frac{\log \frac{f(r)+\Delta f(r)}{r} - \log \frac{f(r)}{r}}{\Delta f(r)} - \frac{1}{f(r)} \right\} \frac{|\Delta f(r)|}{\|\Delta f\|_n} \right| = 0,$$

parce que

$$\lim_{\Delta f(r) \to 0} \frac{\log \frac{f(r)+\Delta f(r)}{r} - \log \frac{f(r)}{r}}{\Delta f(r)} = \frac{1}{f(r)} \tag{11}$$

et

$$|\Delta f(r)| \leqslant \|\Delta f\|_n \qquad \text{pour n assez grand}, \tag{12}$$

ce qui démontre que (9) est la différentielle de la fonctionnelle (8) au point f et qui ne s'annule identiquement. On voit aisément, que la différentielle (9) prise en un point quelconque de la famille F_T se prolonge sur la famille linéaire

$$\mathfrak{S} \tag{13}$$

de toutes les fonctions méromorphes dans le cercle $K(0,1)$ possédant de pôles dans l'ensemble

$$E^* \tag{14}$$

qui se compose des points appartenant à ce cercle et différents de r, la frontière de l'ensemble E^* contient la circonférence $K^*(0,1)$ et aucun point de cette circonférence n'est pas un point d'accumulation des points essentiels[2]) de l'ensemble complémentaire de E^*.

I. 2. On peut donc appliquer à la fonctionnelle $K(f)$ les résultats obtenus dans le travail cité ci-dessus et relatifs aux fonctions extrémales par rapport à la fonctionnelle $K(f)$ dans la famille F_T (corollaire II).[3])

---

[2]) Comparer Z. Charzyński „Sur les fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes bornées".

[3]) Z. Charzyński et W. Janowski „Sur l'équation générale des fonctions extrémales dans la famille des fonctions univalentes bornées".

Il résulte de ces considérations qu'il existe des fonctions extrémales respectives et qu'elles satisfont à l'équation

$$\text{(15)}\qquad \left[\frac{f^{*\prime}(z)}{f^{*}(z)}\right]^{2}\mathfrak{M}\left[f^{*}(z)\right]=\frac{1}{z^{2}}\,\mathfrak{N}(z)\qquad \text{pour } z\in E^{*},$$

où

$$\text{(16)}\qquad \mathfrak{M}(w)=D^{*}\left[\psi\left(f^{*}(\zeta),\frac{1}{w}\right)\right]+\hat{D}^{*}\left[\psi\left(\hat{f}^{*}(\zeta),w\right)\right]-2\mathfrak{P}$$

$$\text{(17)}\qquad \mathfrak{N}(z)=D^{*}\left[\psi\left(\zeta,\frac{1}{z}\right)\cdot f^{*\prime}(\zeta)\right]+\hat{D}^{*}\left[\psi(\zeta,z)\cdot\hat{f}^{*\prime}(\zeta)\right]-2\mathfrak{P}$$

ζ désigne la variable apparente de l'opération tandis que z joue dans (16)—(17) le rôle d'un paramètre.

$$\text{(18)}\qquad \begin{aligned}&\psi(w,\lambda)=\frac{1+w\lambda}{1-w\lambda}\\ &D^{*}(h)=L^{*}(h)-i\,L^{*}(hi)\\ &\hat{D}^{*}(\hat{h})=L^{*}(h)+i\,L^{*}(hi)\end{aligned}\quad {}^{4)}$$

$L^{*}(h)$ — la différentielle de la fonctionelle (8) au point f^{*}

$$\text{(19)}\qquad \mathfrak{P}=\underset{0\leq y<2\pi}{\text{Minim}}\ \frac{1}{2}\left\{D^{*}\left[\psi\left(f^{*}(\zeta),\frac{1}{e^{iy}}\right)\right]+\hat{D}^{*}\left[\psi\left(\hat{f}^{*}(\zeta),e^{iy}\right)\right]\right\},$$

D'après (18):

$$\text{(20)}\qquad D^{*}(h)+\hat{D}^{*}(\hat{h})=2\,L^{*}(h)\,.$$

Vu (20) et (10), les formules (16) et (17) prendront la forme:

$$\text{(21)}\quad \mathfrak{M}(w)=2I\left\{\frac{\psi\left[f^{*}(r),\frac{1}{w}\right]}{f^{*}(r)}\right\}-2\mathfrak{P}=\frac{1}{i}\left[\frac{\psi\left[f^{*}(r),\frac{1}{w}\right]}{f^{*}(r)}-\overline{\frac{\psi\left[f^{*}(r),\frac{1}{w}\right]}{f^{*}(r)}}\right]-2\mathfrak{P}$$

(22)

$$\mathfrak{N}(z)=2I\left\{\frac{\psi\left(r,\frac{1}{z}\right)\cdot f^{*\prime}(r)}{f^{*}(r)}\right\}-2\mathfrak{P}=\frac{1}{i}\left[\frac{\psi\left(r,\frac{1}{z}\right)f^{*\prime}(r)}{f^{*}(r)}-\overline{\frac{\psi\left(r,\frac{1}{z}\right)f^{*\prime}(r)}{f^{*}(r)}}\right]-2\mathfrak{P},$$

d'où, en posant successivement dans (18) $w=f^{*}(r)$, $\lambda=\frac{1}{w}$ et $w=r$, $\lambda=\frac{1}{z}$ on a, vu (21) et (22) et après des calculs faciles

[4] Comparer le renvoi 3, page 43.

$$\mathfrak{M}(w) = \frac{1}{i}\left[\frac{w+f^*(r)}{w-f^*(r)} - \frac{1+\overline{f^*(r)}\,w}{1-\overline{f^*(r)}\,w}\right] - 2\mathfrak{P} \tag{23}$$

$$\mathfrak{N}(z) = \frac{1}{i}\left[r\frac{f^{*\prime}(r)}{f^*(r)}\frac{z+r}{z-r} - r\frac{\overline{f^{*\prime}(r)}}{\overline{f^*(r)}}\frac{1+rz}{1-rz}\right] - 2\mathfrak{P}. \tag{24}$$

Posons maintenant pour abréger

$$f^*(z) = w, \quad f^{*\prime}(z) = w' \tag{25}$$

et soit

$$\arg\frac{f^*(r)}{r} = \varphi, \quad f^*(r) = \varrho e^{i\varphi}, \quad \overline{f^*(r)} = \varrho e^{-i\varphi}, \tag{26}$$

$$f^{*\prime}(r) = \tau e^{i\vartheta}, \quad \overline{f^{*\prime}(r)} = \tau e^{-i\vartheta}, \quad \mathfrak{P} = i\alpha \text{ [5]})$$

L'équation (15) prendra alors (en multipliant les deux membres par i), vu (23), (24), (25) et (26) la forme suivante:

$$\frac{w'^2}{w^2}\left(\frac{w+\varrho e^{i\varphi}}{w-\varrho e^{i\varphi}} - \frac{1+\varrho e^{-i\varphi}w}{1-\varrho e^{-i\varphi}w} + 2\alpha\right) = \frac{1}{z^2}\left(r\frac{\tau}{\varrho}e^{i(\vartheta-\varphi)}\frac{z+r}{z-r} + \right. \tag{27}$$

$$\left. - r\frac{\tau}{\varrho}e^{i(\varphi-\vartheta)}\frac{1+rz}{1-rz} + 2\alpha\right)$$

L'équation que nous avons obtenue peut être écrite sous une forme plus simple en vertu de certaines propriétés des expressions (23) et (24), que nous allons examiner maintenant.

I. 3. $\mathfrak{M}(w)$ et $\mathfrak{N}(z)$, comme il a été démontré dans le travail cité ci dessus prennent sur la circonférence du cercle $|w| = 1$, respectivement, $|z| = 1$, des valeurs réelles non négatives[6]), $\mathfrak{M}(w) = 0$ ayant, comme cela résulte de la définition de $\mathfrak{P}$, une racine double sur la circonférence du cercle $|w| = 1$, n'a pas d'autres racines, ni à l'intérieur du cercle $|w| = 1$, ni sur sa circonférence, puisqu'elle n'a que deux racines, c'est ce qui résulte directement de la forme de $\mathfrak{M}(w)$ (formule (23)).

$\mathfrak{N}(z) = 0$ a deux racines, c'est ce qui résulte aussi directement de la forme de $\mathfrak{N}(z)$ (formule (24)). $\mathfrak{N}(z) = 0$ ne peut pas posséder de racine a l'intérieur du cercle $|z| < 1$, car alors, en vertu de (15) et vu $f'(z) \neq 0$, $\mathfrak{M}(w) = 0$ aurait une racine à l'intérieur de cercle $|w| < 1$, ce qui est contraire à ce que nous venons de démontrer. Cela posé,

---

[5]) $\mathfrak{P} \leqq 0$ comme minimum de la fonction, dont l'intégrale dans l'intervalle est égale à zéro (comparer le renvoi 3, page 48). De là $I\{\alpha\} \geqq 0$; nous utiliserons cette remarque plus loin.

[6]) Comparer le renvoi 3, page 52.

$\mathfrak{R}(z)=0$ n'a de racines que sur la circonférence du cercle $|z|=1$. Comme la fonction $\mathfrak{R}(z)$ n'est pas négative sur la circonférence $|z|=1$, $\mathfrak{R}(z)=0$ ne possède qu'une seule racine double.

Il s'ensuit de ce que nous venons de démontrer qu'il existe de nombres p_i, q_i $(i=1,2)$, différents de zero et tels, que les expressions contenues entre les parenthèses de l'équation (27) prennent respectivement les formes suivantes:

$$\frac{w+\varrho e^{i\varphi}}{w-\varrho e^{i\varphi}}-\frac{1+\varrho e^{-i\varphi}w}{1-\varrho e^{-i\varphi}w}+2a=\frac{(p_1 w-q_1)^2}{(w-\varrho e^{i\varphi})(1-\varrho e^{-i\varphi}w)} \tag{28}$$

$$r\frac{\tau}{\varrho}e^{i(\vartheta-\varphi)}\frac{z+r}{z-r}-r\frac{\tau}{\varrho}e^{i(\varphi-\vartheta)}\frac{1+rz}{1-rz}+2a=\frac{(p_2 z-q_2)^2}{\varrho(z-r)(1-rz)}, \tag{29}$$

par suite l'équation (27) prendra la forme:

$$\frac{w'^2}{w^2}\frac{(p_1 w-q_1)^2}{(w-\varrho e^{i\varphi})(1-\varrho e^{-i\varphi}w)}=\frac{1}{z^2}\frac{(p_2 z-q_2)^2}{\varrho(z-r)(1-rz)} \tag{30}$$

En posant dans l'équation (30):

$$\frac{q_1}{p_1}=w_0,\quad \frac{q_2}{p_2}=z_0, \tag{31}$$

et en divisant les deux membres de l'équation (30) par p_1^2, puis en posant

$$\frac{p_2^2}{p_1^2}=t \tag{32}$$

nous obtenons l'équation

$$\frac{w'^2}{w^2}\frac{(w-w_0)^2}{(w-\varrho e^{i\varphi})(1-\varrho e^{-i\varphi}w)}=\frac{t}{z^2}\frac{(z-z_0)^2}{(z-r)(1-rz)} \tag{33}$$

Posons maintenant

$$\sqrt{\varrho e^{i\varphi}}=\sqrt{\varrho}\,e^{i\frac{\varphi}{2}},\quad \sqrt{e^{-2i\varphi}}=e^{-i\varphi},\quad \sqrt{-\varrho e^{i\varphi}}=i\sqrt{\varrho e^{i\varphi}}, \tag{34}$$
$$\sqrt{-\varrho e^{-i\varphi}}=i\sqrt{\varrho e^{-i\varphi}}=i\sqrt{\varrho}\,e^{-i\frac{\varphi}{2}},\quad \sqrt{-r}=i\sqrt{r}$$

De (33) on obtient

$$\frac{w'}{w}\frac{w-w_0}{\sqrt{(w-\varrho e^{i\varphi})(1-\varrho e^{-i\varphi}w)}}=\frac{\sqrt{t}}{z}\frac{z-z_0}{\sqrt{\varrho}\sqrt{(z-r)(1-rz)}}, \tag{35}$$

où l'on a pris les branches de radicaux:

$\sqrt{(z-r)(1-rz)}$, $\sqrt{(w-\varrho e^{i\varphi})(1-\varrho^{-i\varphi} w)}$, qui sont égales pour $w=0$ et $z=0$ à $i\cdot\sqrt{\varrho e^{i\varphi}}$ resp. $i\cdot\sqrt{r}$.

Ces branches existent respectivement dans le cercle $K(0,r)$ et dans le domaine $w[K(0,r)]$ où les expressions sous les signes des radicaux sont différentes de zéro.

Puisque $w(0)=0$, il s'ensuit de (35) que

(36)
$$\sqrt{t}=\frac{w_0}{z_0}\sqrt{r}\, e^{-i\frac{\varphi}{2}}$$

En intégrant les deux membres de cette équation, nous obtiendrons, après des calculs aisés et vu (36):

$$\log\frac{\varrho e^{-i\varphi}w-1+\sqrt{(\varrho e^{-i\varphi}w-1)(\varrho e^{-i\varphi}w-\varrho^2)}}{\varrho e^{-i\varphi}w-1-\sqrt{(\varrho e^{-i\varphi}w-1)(\varrho e^{-i\varphi}w-\varrho^2)}}+$$

(37)
$$+w_0 e^{-i\varphi}\log\frac{\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi}w)+\sqrt{\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi}w)(\varrho e^{i\varphi}-w)}}{\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi}w)-\sqrt{\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi}w)(\varrho e^{i\varphi}-w)}}$$

$$=\frac{w_0}{z_0}e^{-i\varphi}\left|\log\frac{rz-1+\sqrt{r(rz-1)(z-r)}}{rz-1-\sqrt{r(rz-1)(z-r)}}+\right.$$

$$\left.+z_0\log\frac{r(1-rz)+\sqrt{r(1-rz)(r-z)}}{r(1-rz)-\sqrt{r(1-rz)(r-z)}}\right|+C^{7)},$$

où l'on a pris les branches logarithmiques qui, pour $w=f(r)$ et $z=r$ respectivement, ont des valeurs principales.

Ces branches existent dans les domaines simplement connexe $K(o,r)$ et $w[K(o,r)]$.

En tenant compte de ce que $w(z)\to f(r)$ lorsque $z\to r$, nous obtenons immédiatement de (37) que $C=0$.

I. 4. Notre but consiste dans la détermination de l'argument φ. Examinons dans ce but l'équation (37) dans l'entourage du point

---

[7]) $$\int\frac{(x-a)\,dx}{x\sqrt{(x-b)(1-cx)}}=\frac{1}{\sqrt{-c}}\left[\log\frac{cx-1+\sqrt{(cx-1)(cx-bc)}}{cx-1-\sqrt{(cx-1)(cx-bc)}}+\right.$$
$$\left.+a\sqrt{\frac{c}{b}}\log\frac{b(1-cx)+\sqrt{b(1-cx)(b-x)}}{b(1-cx)-\sqrt{b(1-cx)(b-x)}}\right]$$

$z=0$. En développant les différentes expressions de (37) pour les z suffisamment petits, nous obtenons les égalités suivantes:

$$w = Tz + a_2 z^2 + \ldots = 0_1(z)\ ^{8)}$$

$$\sqrt{(\varrho e^{-i\varphi} w - 1)(\varrho e^{-i\varphi} w - \varrho^2)} = \varrho + 0_2(z)$$

$$\sqrt{\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi} w)(\varrho e^{i\varphi} - w)} = \varrho e^{i\varphi} - \frac{T}{2}(1+\varrho^2)z + 0_3(z^2)$$

$$(38)\quad \log \frac{\varrho e^{-i\varphi} - 1 + \sqrt{(\varrho e^{-i\varphi} w - 1)(\varrho e^{-i\varphi} w - \varrho^2)}}{\varrho e^{-i\varphi} - 1 - \sqrt{(\varrho e^{-i\varphi} w - 1)(\varrho e^{-i\varphi} w - \varrho^2)}} = \log \frac{1-\varrho}{1+\varrho} + 0_4(z)$$

$$(39)\quad \log \frac{\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi} w) + \sqrt{\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi} w)(\varrho e^{i\varphi} - w)}}{\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi} w) - \sqrt{\varrho e^{i\varphi}(1-\varrho e^{-i\varphi} w)(\varrho e^{i\varphi} - w)}} =$$

$$= \log 2\varrho e^{i\varphi} - \log T \frac{1-\varrho^2}{2} - \log z + 0_5(z) + 2K_1 \pi i \quad (K_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

D'une manière analogue:

$$(40)\quad \log \frac{rz - 1 + \sqrt{r(rz-1)(z-r)}}{rz - 1 - \sqrt{r(rz-1)(z-r)}} = \log \frac{1-r}{1+r} + 0_6(z)$$

$$(41)\quad \log \frac{r(1-rz) + \sqrt{r(1-rz)(r-z)}}{r(1-rz) - \sqrt{r(1-rz)(r-z)}} = \log 2r - \log \frac{1-r^2}{2} + \\ - \log z + 0_7(z) + 2K_2 \pi i \quad (K_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

où $0_i(z^K)$ sont d'un rang non inférieur à 1 ($K=1, 2$; $i=1, 2, \ldots 7$). En substituant les expressions (38), (39), (40) et (41) dans (37), nous obtenons, en vertu de la définition de la fonction $0_i(z^K)$ l'équation:

$$(42)\quad \begin{aligned} &\log \frac{1-\varrho}{1+\varrho} + w_0 e^{-i\varphi}\left[\log 2\varrho e^{i\varphi} - \log T \frac{1-\varrho^2}{2} - \log z + 2K_1\pi i\right] = \\ &= \frac{w_0}{z_0} e^{-i\varphi}\left[\log \frac{1-r}{1+r} + z_0\left(\log 2r - \log \frac{1-r^2}{2} - \log z + 2K_2\pi i\right)\right] \end{aligned}$$

d'où, après une réduction aisée et après avoir divisé les deux membres par $w_0 e^{-i\varphi}$, nous obtenons l'équation:

[8]) Le premier coefficient du développement de la fonction extrémale est égal à T, comparer le renvoi 3, page 52.

$$(43)\ \frac{1}{w_0}e^{i\varphi}\log\frac{1-\varrho}{1+\varrho}+\log\varrho\, e^{i\varphi}-\log T(1-\varrho^2)=\frac{1}{z_0}\log\frac{1-r}{1+r}+\log r+$$
$$-\log(1-r^2)+2K\pi i \qquad (K=K_2-K_1)$$

I 5. On obtient sans peine de l'équation (43) deux équations auxquelles satisfont φ et ϱ; en comparant respectivement les parties réeles et imaginaires des deux membres de l'équation (43), on obtient

$$(44)\qquad \Re\left\{\frac{1}{w_0}e^{i\varphi}\right\}\log\frac{1-\varrho}{1+\varrho}+\log\varrho-\log T(1-\varrho^2)=$$
$$=\Re\left\{\frac{1}{z_0}\right\}\log\frac{1-r}{1+r}+\log r-\log(1-r^2)$$

et

$$(45)\qquad I\left\{\frac{1}{w_0}e^{i\varphi}\right\}\log\frac{1-\varrho}{1+\varrho}+\varphi+2K\pi=I\left\{\frac{1}{z_3}\right\}\log\frac{1-r}{1+r}$$

Evaluons maintenant w_0 et z_0. Reprenons dans ce but les identités (28) et (29).

Il résulte de (28) et de (29), en tenant compte de (31) et après des calculs faciles que

$$(46)\quad p_1^2(w-w_0)^2=-2\left[(a+1)\varrho e^{-i\varphi}w^2-(1+\varrho^2)aw+(a-1)\varrho e^{i\varphi}\right]$$

$$(47)\ p_2^2(z-z_0)^2=-2\{r[\tau r\cos(\varphi-\delta)+a\varrho]z^2+[i\tau r(1-r^2)\sin(\varphi-\delta)+$$
$$-a\varrho(1+r^2)]z+r[a\varrho-\tau r\cos(\varphi-\delta)]\}$$

En comparant les coefficients de w dans les deux membres de l'identité (46) on a

$$(48)\qquad w_0=\frac{(1+\varrho^2)}{2\varrho(a+1)}e^{i\varphi}$$

On détermine a, en profitant du fait que le membre droit de (46) est un carré (car le membre gauche est un carré), il vient ainsi

$$(1+\varrho^2)^2a^2=4(a^2-1)\varrho^2,$$

c'est à dire:

$$(49)\qquad (1-\varrho^2)^2a^2=-4\varrho^2,$$

Par conséquent:

$$(50)\qquad a=\frac{2\varrho i}{1-\varrho^2}\ ^{9)}$$

[9]) $0<\varrho<1$, donc $I\{a\}>0$ (comp. au renvoi 3); la seconde racine a_0 d'équation (49) n'est pas utilisable puisque $I\{a_0\}<0$.

En substituant α dans (48) et après des calculs aisés, on obtient

(51) $$w_0 = ie^{i\varphi}\frac{1-\varrho i}{1+\varrho i}$$

Pour évaluer z_0, on remarque d'abord, qu'en vertu de (46) et (47)

$$p_1^2 = -2(\alpha+1)\varrho e^{-i\varphi}$$

et

$$p_2^2 = -2\cdot r\,[\tau r \cos(\varphi-\delta)+\alpha\varrho]\,,$$

d'où, vu (32)

(52) $$t = \frac{r\,[\tau r \cos(\varphi-\delta)+\alpha\varrho]}{(\alpha+1)\varrho}\, e^{i\varphi}\,.$$

Pour définir t, considérons la fonction extrémale $f^*(z)$, et la fonction

(53) $$f_\delta^*(z) = e^{-i\delta} f^*(ze^{i\delta}),\ (f_\delta^*(z)\in F_T)\,,$$

où δ est un paramètre qui admet des valeurs quelconques dans le voisinage de zéro.

Considérons en outre la fonction de la variable δ:

$$\chi(\delta) = \left(\arg\frac{f_\delta^*(z)}{z}\right)_{z=r} = \quad I\left\{\log\frac{e^{-i\delta} f^*(re^{i\delta})}{r}\right\}$$

La fonction $\chi(\delta)$ atteint en vertu de (53) son maximum au point $\delta=0$, par conséquent

(54) $$\left(\frac{d}{d\delta} I\left\{\log\frac{e^{-i\delta} f^*(re^{i\delta})}{r}\right\}\right)_{\delta=0} = 0$$

Après des calculs aisés, on a

$$\frac{d}{d\delta} I\left\{\log\frac{e^{-i\delta} f^*(re^{i\delta})}{r}\right\} = I\left\{\frac{d}{d\delta}\log\frac{e^{-i\delta} f^*\, re^{i\delta})}{r}\right\} =$$

$$= I\left\{i\left(r\frac{f^{*\prime}(re^{i\delta})}{f^*(re^{i\delta})}-1\right)\right\},$$

d'où, vu (54) et en tenant compte de la définition (26), on obtient

(55) $$r\frac{\tau}{\varrho}\cos(\delta-\varphi)-1=0$$

En déterminant $r\tau\cos(\delta-\varphi)$ de (55) et en le substituant dans (52), nous obtenons (après avoir divisé par $\varrho\,(\alpha+1)$):

(56) $$t = re^{i\varphi}\,,$$

on obtient donc de (36) en vertu de (56)

(57) $$z_0 = w_0 e^{-i\varphi}.$$

Reprenons maintenant les équations (44) et (45).

Nous obtenons à partir (57), en tenant compte de (51) et après un calcul facile

(58) $$\frac{1}{z_0} = \frac{1}{w_0} e^{i\varphi} = \frac{2\varrho}{1+\varrho^2} + i\,\frac{\varrho^2-1}{1+\varrho^2},$$

par conséquent les équations (44) et (45) prendront, vu (58), les formes suivantes:

(59) $$\frac{2\varrho}{1+\varrho^2}\log\frac{1-\varrho}{1+\varrho} + \log\varrho - \log T(1-\varrho^2) =$$
$$= \frac{2\varrho}{1+\varrho^2}\log\frac{1-r}{1+r} + \log r - \log(1-r^2)$$

et

(60) $$\frac{\varrho^2-1}{1+\varrho^2}\log\frac{1-\varrho}{1+\varrho} + \varrho + 2K\pi = \frac{\varrho^2-1}{1+\varrho^2}\log\frac{1-r}{1+r},$$

d'où, après des calculs aisés

(61) $$\varphi + 2K\pi = \frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2}\log\left(\frac{1-\varrho}{à+\varrho} : \frac{1-r}{1+r}\right)$$

où ϱ satisfait à l'équation:

(62) $$\frac{2\varrho}{1+\varrho^2}\log\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho} : \frac{1-r}{1+r}\right) + \log\frac{\varrho(1-r^2)}{Tr(1-\varrho^2)} = 0$$

On démontre aisémént que l'équation (62) n'a qu'une seule racine $\varrho = \varrho_0$ qui satisfait à la condition $0 < \varrho_0 < 1$.

En effet, en désignant par $P(\varrho)$ le membre gauche de l'équation (62) on obtient, après des calculs aisés

$$P'(\varrho) = \frac{2(1-\varrho^2)}{(1+\varrho^2)^2}\log\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\,\frac{1-r}{1+r}\right) + \frac{1-\varrho^2}{\varrho(1+\varrho^2)} > 0,$$

car $r > \varrho$, l'équation (52) n'a donc qu'une seule solution $\varrho = \varrho_0$.

En substituant cette solution dans (61) nous obtenons une seule solution pour $\varphi + 2K\pi$, où $\varphi + 2K\pi$ est une fonction continue de r, il s'ensuit d'autre part de (61) que lorsque $r \to 0$ $\left(\text{donc } \varrho \to 0, \text{ car } \varrho \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}\right)$[10]), $\varphi + 2K\pi \to 0$, d'autre part $\varphi \to 0$ comme maximum

[10]) Comparer avec L. Bieberbach „Lehrbuch der Funktionentheorie", page 89.

d'argument, donc finalement, en tenant compte de ce que K est un nombre entier, on obtient:

$$K = \text{const.} = 0 \tag{63}$$

I. 6. Considérons maintenant la famille F_M et la famille des fonctions de la forme

$$f(z) = \frac{F(z)}{M_F}, \tag{64}$$

où $M_F = \sup_{|z|<1} |F(z)| \leqslant M$.

Les fonctions (64) appartiennent à la famille F_T, où

$$T = \frac{1}{M}\ ^{11)} \tag{65}$$

Désignons comme auparavant par $f^*(z)$ la fonction extrémale par rapport à l'opération $K(f) = I\left\{\log\frac{f(r)}{r}\right\}$ dans la famille F_T. Il existe alors dans la famille F_M la fonction extrémale $F^*(z)$ [12] par rapport à l'opération $K(F) = I\left\{\log\frac{F(r)}{r}\right\}$, et l'on peut admettre $F^*(z) = \frac{f^*(z)}{T}$.

En posant $F^*(r) = \varrho_M e^{i\varphi_M}$, on aura, vu (64)

$$\varrho_M = \varrho . M, \quad \varphi_M = \varphi, \tag{66}$$

où ϱ et φ gardent leur significations antérieures:

En substituant ϱ et φ fournis par (66), T fourni par (65) et K de (63) dans (61) et (62) et en y posant $r = |z|$, nous obtenons les équations (4) et (5), c'est ce qu'il fallait démontrer.

II. 1. Pour démontrer le second théorème, nous traiterons pour le moment M comme variable et passerons à la limite dans les équations (4) et (5) en faisant tendre M vers l'infini.

Puisque ϱ_M est borné [13], on obtient de (5) pour $M \to \infty$, après des calculs aisés,

$$\lim \varrho_M = \frac{r}{1 - r^2} = \varrho_\infty . \tag{67}$$

et de (4)

[11]) Comparer le renvoi 1.
[12]) Comparer le renvoi 1.
[13]) Comparer le renvoi 10.

$$\lim \varphi_M = \log \frac{1+r}{1-r} = \varphi_\infty . \tag{68}$$

II. 2. Considérons maintenant la famille F_∞. Soit $F \epsilon F_\infty$ une fonction quelconque de cette famille.

Considérons la fonction auxiliaire

$$\Phi_\varkappa (z) = \frac{1}{\varkappa} F(\varkappa z) = z + A_2 \varkappa z^2 + \dots , \tag{69}$$

définie dans le cercle $|z| < \varkappa < 1$ et univalente.

La fonction (69) est bornée; soit $\sup\limits_{|z|<1} |\Phi_\varkappa (z)| = M_\varkappa$.

$z = r$ étant fixé, considérons l'argument $\arg \frac{\Phi_\varkappa (z)}{z}$, et l'argument de la fonction extrémale de la famille $F_{M_\varkappa}$ par rapport à l'opération $K(F)$ — désignons le par $\varphi_{M_\varkappa}$. $\varphi_{M_\varkappa}$ satisfait évidemment aux équations (4) et (5) (avec le module $\varrho_{M_\varkappa}$).

Il est évident que

$$\frac{\arg \Phi_\varkappa (r)}{r} \leqslant \varphi_{M_\varkappa} \tag{70}$$

Or le membre droit de l'équation (4) est une fonction monotone de M, nous obtenons donc pour $M = M_\varkappa$:

$$\varphi_{M_\varkappa} \leqslant \varphi_\infty \tag{71}$$

D'autre part, $\Phi_\varkappa (r) \to F(r)$, si $\varkappa \to 1$, donc finalement les équations (70), (71) et (68) conduisent au résultat:

$$\frac{\arg F(r)}{r} \leqslant \varphi_\infty , \text{ pour chaque fonction } F \epsilon F_\infty .\text{[14]} \tag{72}$$

II. 3. Pour démontrer qu'il existe une fonction pour laquelle la limite relative à $\frac{\arg F(r)}{r}$ est atteinte, considérons maintenant la suite de fonctions extrémales $\overset{*}{F}_n (z)$ par rapport à l'opération $K(F)$ dans la famille F_{M_n}, où M_n est une suite convergente vers l'infini.

---

[14]) Les résultats obtenus pour les fonctions non bornées coïncident avec ceux que H. G r u n s k y a obtenu par d'autres procédés dans sa thèse. (H. G r u n s k y „*Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung*", Schriften d. Mat. Semin. Univ. Berlin).

On a

$$(73) \qquad \lim \arg \frac{F_n^*(r)}{r} = \lim \varphi_{M_n} = \varphi_\infty$$

Choisissons de la suite $F_n^*(z)$ une suite partielle $F_n^*(z)$ convergente presque uniformément dans le cercle $|z|<1$ (c. à. d. convergente uniformément dans chaque domaine fermé complètement intérieur au cercle $|z|<1$)[15]) vers une certaine fonction limite $F_0(z)$ univalente, alors

$$(74) \qquad \lim \arg \frac{F_{n_k}^*(r)}{r} = \arg \frac{F_0(r)}{r},$$

donc, vu (73)

$$(75) \qquad \arg \frac{F_0(r)}{r} = \varphi_\infty .$$

et ceci démontre l'existence de la fonction pour laquelle la limite relative à $\dfrac{\arg F(r)}{r}$ est atteinte. Ainsi, vu (72) et (75) le théorème II est démontré.

Streszczenie.

Rozważam funkcje holomorficzne i jednolistne w kole $|z|<1$ postaci:

$$(1) \qquad F(z) = z + A_2 z^2 + \ldots$$

Niech M będzie dowolną daną liczbą dodatnią, F_M — rodziną wszystkich funkcyj ograniczonych postaci (1), dla których $|F(z)|<M$, zaś F_∞ — rodziną wszystkich funkcyj postaci (1). Dla ustalonego z rozważam wyrażenie

$$\arg \frac{F(z)}{z}$$

(przy czym obieram tę gałąź argumentu, która dla $z=0$ ma wartość zero).

[15]) Il est permis de le faire, car d'après les inégalités de Koebe on a $|F(z)| \leqslant \dfrac{|z|}{(1-|z|)^2}$ pour chaque $F \varepsilon F_M$, il en résulte que la famille F_M est presque bornée dans $|z|<1$ (c. à d. bornée dans chaque cercle $|z|<r<1$) et par conséquent normale.

W pracy niniejszej dowodzę następujących twierdzeń należących do kategorii twierdzeń o zniekształceniu:

I. Dla funkcyj rodziny F_M zachodzi nierówność ostra:

$$\arg \frac{F(z)}{z} \leqslant \varphi_M ,$$

gdzie φ_M spełnia wraz z liczbą $\varrho_M < M$ równania:

$$\varphi_M = \frac{1-\left(\frac{\varrho_M}{M}\right)^2}{1+\left(\frac{\varrho_M}{M}\right)^2} \log \left(\frac{1-\frac{\varrho_M}{M}}{1+\frac{\varrho_M}{M}} : \frac{1-|z|}{1+|z|} \right)$$

$$\frac{2\frac{\varrho_M}{M}}{1+\left(\frac{\varrho_M}{M}\right)^2} \log \left(\frac{1-\frac{\varrho_M}{M}}{1+\frac{\varrho_M}{M}} : \frac{1-|z|}{1+|z|} \right) + \log M \frac{1-|z|^2}{|z|\left(\frac{M}{\varrho_M}-\frac{\varrho_M}{M}\right)} = 0$$

II. Dla funkcyj rodziny F_∞ zachodzi nierówność ostra:

$$\arg \frac{F(z)}{z} \leqslant \varrho_\infty$$

gdzie

$$\varrho_\infty = \log \frac{1+|z|}{1-|z|} .$$