ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. IV, 5 SECTIO A 1950

Z Seminarium Matematycznego I Wydz. Mat.-Przyr. U. M. C. S.
Kierownik: prof. dr Mieczysław Biernacki.

Mieczysław BIERNACKI

Sur le calcul des aires situées sur une sphère

O obliczaniu pól obszarów leżących na kuli

Considérons un triangle curviligne ABC situé sur une sphère de rayon R et tel que AB et AC sont des arcs des grands cercles de la sphère tandis que l'arc BC n'est rencontré qu'en un seul point M au plus par tout grand cercle passant par A. Soient α l'angle des arcs AB et AC et φ l'angle que fait l'arc du grand cercle AM avec l'arc AB. Désignons par $h(\varphi)$ la distance du point A au plan passant par M et perpendiculaire à ce rayon de la sphère qui passe par A. L'aire de la calotte sphérique dont le centre de symétrie sphérique est A et dont la frontière passe par M étant $2\pi R h(\varphi)$ il est clair que l'aire du triangle élémentaire limité par l'arc BC et par les arcs AM et AM' des grands cercles qui font l'angle $d\varphi$ entre eux est $R h(\varphi)\, d\varphi$. Nous obtenons donc pour l'aire S du triangle curviligne ABC la formule:

$$S = R \int_0^\alpha h(\varphi)\, d\varphi$$

Remarque. Soit r la distance rectiligne AM, on a $r^2(\varphi) = 2 R h(\varphi)$, la formule précédente peut donc s'écrire sous la forme:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\alpha r^2(\varphi)\, d\varphi$$

et constitue par suite une généralisation de la formule classique qui exprime une aire plane en coordonnées polaires.

Des exemples classiques qui vont suivre montrent que la formule obtenue se prête bien à des applications.

1. **L'aire de la „fenêtre de Viviani".** Supposons que la fenêtre soit découpée sur la sphère $x^2+y^2+z^2=R^2$ par le cylindre $x^2+y^2-Rx=0$ et posons $A(0,0,R)$. Les arcs AB et AC se réduisent ici à un seul point $A=B=C$ et un calcul aisé montre que $h(\varphi)=R(1-|\sin\varphi|)$, on a donc

$$S=2R^2\int_0^{\pi/2}(1-\sin\varphi)\,d\varphi=2R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

La méthode habituelle du calcul exige deux quadratures.

2. **L'aire d'un polygone sphérique.** Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des angles que font entre eux les n côtés (arcs des grands cercles) du polygone cet aire s'exprime par la formule de Gauss:

$$S=R^2[\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n-(n-2)\pi].$$

Il suffit évidemment d'établir cette formule dans le cas d'un triangle rectangle. Soit donc ABC un triangle rectangle en C, situé sur la sphère $x^2+y^2+z^2=R^2$, ayant le sommet $A(0, 0, R)$ et dont le sommet B est situé dans le plan $z0x$. Désignons par α et γ des angles du triangle qui correspondent aux sommets A et C respectivement, on peut supposer que $\alpha\leqslant\gamma$, $\alpha<\frac{\pi}{2}$. Si l'équation du plan OBC est $z=kx$ on trouve sans peine que

$$h(\varphi)=R\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2+tg^2\varphi}}\right)$$

et par suite que l'aire S du triangle est égale à

$$R^2\int_0\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2+tg^2\varphi}}\right)d\varphi$$

En faisant le changement de variable $\sin\varphi=u$ et en profitant de la relation

$$\cos\gamma=\frac{k\sin\alpha}{\sqrt{1+k^2}}$$

on trouve bien que $S=R^2(\alpha+\gamma-\frac{\pi}{2})$.

Remarques (pendant la correction des épreuves).

I. La formule qui généralise la formule usuelle en coordonnées polaires se trouve énoncée (sans démonstration) dans le cours d'Analyse du de la Vallée Poussin, 8 éd, 1938, p. 387.

II. Il est clair que la méthode employée se généralise immédiatement au calcul des aires des domaines situés sur une surface de révolution, pourvu que l'on sache calculer l' aire de toute portion comprise entre deux parallèles de la surface. Une intégrale simple suffira donc pour le calcul des aires des domaines en question.

Streszczenie.

Wyprowadzam wzór:

$$S = R\int_0^\alpha h(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\alpha r^2(\varphi)\,d\varphi\,,$$

przyczem S jest polem trójkąta ABC w którym AB i AC są łukami wielkich kół tworzącymi ze sobą kąt α a BC łukiem przeciętym w conajwyżej jednym punkcie M przez każde wielkie koło przechodzące przez A. Jeśli O jest środkiem kuli a φ kątem łuków AM i AB, to $h(\varphi)$ oznacza tu odległość punktu A od płaszczyzny przechodzącej przez M i prostopadłej do promienia OA, a $r(\varphi)$ długość odcinka AM.