ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. IV, 4 SECTIO A 1950

Z Zakładu Logiki Matematycznej i Podstaw Matematyki Wydz. Mat.-Przyr. U.M.C.S.
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki.

Adam BIELECKI

Sur une équation différentielle binome du II-me ordre

O pewnym równaniu różniczkowym dwumiennym 2 rzędu

Cette note est consacrée à un problème posé par M. Biernacki. Soit $A(x)$ une fonction continue, positive et non décroissante dans l'intervalle $x \geqslant a$. Dans ces conditions toutes les intégrales non identiquement nulles de l'équation différentielle

$$(1) \qquad y'' + A(x)y = 0$$

sont oscillantes[1]). En désignant par ξ_ν, où $\nu = 1, 2, \ldots$, les zéros successifs d'une intégrale non nulle $y = \varphi(x)$ de l'équation (1), la suite des différences $\xi_{\nu+1} - \xi_\nu$ est non croissante[2]) et la fonction $\varphi(x)$ admet dans tout intervalle $(\xi_\nu, \xi_{\nu+1})$ un maximum ou un minimum local au point que je désigne η_ν. M. Biernacki a étudié[3]) certaines autres analogies entre les propriétés des intégrales de l'équation (1) et celles des intégrales de l'équation spéciale $y'' + y = 0$, c.-à-d. des fonctions $\sin x$ et $\cos x$. Il a démontré qu'il existe une suite d'indices $\nu(i)$, finie ou non, telle que:

1° la somme des longueurs des segments correspondants aux indices $\nu(i)$ est finie,

2° en négligeant ces segments exceptionnels, on a pour la suite de tous les autres indices

---

[1]) C. Sturm, *Mémoire sur les équations linéaires du second ordre*, Journal de math. pures et appl., 1, 1836.

[2]) A. Kneser, *Untersuchungen über die reellen Nulstellen der integrale linearer Differentialgleichungen*, Math. Ann., 42, 1893.

[3]) M. Biernacki, *Sur l'équation différentielle $x'' + A(t)x = 0$*, Prace mat. fiz., 40, 1933.

(2) $$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\eta_\nu - \xi_\nu}{\xi_{\nu+1} - \xi_\nu} = \frac{1}{2}.$$

Il a démontré aussi que l'on a dans les mêmes conditions

(3) $$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\xi_{\nu+2} - \xi_{\nu+1}}{\xi_{\nu+1} - \xi_\nu} = 1$$

et il a posé la question de savoir si la restriction concernant les segments exceptionnels est essentielle[4]. Dans la suite je vais construire un exemple d'une fonction $A(x)$ positive, croissante et analytique entière telle que l'égalité (2) ne subsiste pas pour la suite de tous les indices naturels. Il s'ensuit que la restriction en question est bien indispensable. La construction d'un exemple concernant le second théorème du M. Biernacki où il s'agit des segments exceptionnels relativement à la condition (3), est tout à fait analogue.

Lemme. ε et δ étant des nombres positifs et $B(x)$ étant une fonction continue et positive dans l'intervalle fermé $[\alpha, \alpha+3\delta]$, ils existe deux nombres $a \geqslant 1$ et $b > \alpha$ tels que

(4) $$e^{a(x-b)} \leqslant \varepsilon$$

pour $x \leqslant \alpha$ et toute intégrale $y = \psi(x)$ de l'équation

(5) $$y'' + (B(x) + e^{a(x-b)})y = 0$$

s'annule dans un point de l'intervalle $[\alpha, \alpha+3\delta]$.

En effet, posons $b = \alpha + \delta$ et remarquons que a étant convenablement choisi, l'inégalité (4) se trouve satisfaite et toute intégrale de l'équation

(6) $$y'' + e^{a\delta}\, y = 0$$

s'annule dans $[\alpha+2\delta, \alpha+3\delta]$. D'autre part, on a

$$B(x) + e^{a(x-b)} > e^{a\delta}$$

dans le même intervalle et il s'ensuit d'après un théorème bien connu de Sturm que toute intégrale $\psi(x)$ de l'équation (5) doit aussi s'annuler dans cet intervalle.

Construction d'un exemple. Posons $B_0(x) = e^x$ et soient $y = \psi_0(x)$ une intégrale de l'équation

$$y'' + B_0(x)\, y = 0$$

[4]) Dans le travail cité M. Biernacki a exprimé d'ailleurs la conviction que la première circonstance n'est pas probable.

telle que $\psi_0(0)=1$ et $\psi'_0(0)=0$, α_1 la plus petite des valeurs positives de x pour lesquelles $\psi_0(x)$ admet un extremum local, ξ_0 la plus petite valeur positive de x pour laquelle $\psi_0(x)$ s'annule, $p=2(\alpha_1-\xi_0)$, k un nombre fixe tel que $\frac{1}{2}<k<1$. Nous allons démontrer par l'induction qu'il existe des suites de nombres a_ν, b_ν, α_ν et une suite de fonctions $\psi_\nu(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1° $a_\nu \geqslant 1$, $b_\nu > \alpha_\nu > 4p\nu$, $\qquad \nu=1,2,3,\ldots$

2° $B_\nu(x)=e^{a_\nu(x-b_\nu)} < \frac{1}{2^\nu}$

pour $x \leqslant \alpha_\nu$, $\qquad \nu=1,2,3,\ldots$

3° $\psi''_\nu(x) + \left(\sum_{i=0}^{\nu} B_i(x)\right)\psi_\nu(x)=0$, $\qquad \nu=0,1,2,\ldots$

4° Dans chaque intervalle $(4p(i-1), 4pi)$, $i=1,2,\ldots\,\nu$, il existe un segment exceptionnel pour la fonction $\psi_\nu(x)$, c.-à-d. un segment (ξ', ξ'') tel que

$$\psi_\nu(\xi')=\psi_\nu(\xi'')=0\,, \qquad k<\frac{\eta'-\xi'}{\xi''-\xi'}<1$$

et $\psi_\nu(x)$ admet un extremum pour $x=\eta'$, $\nu=1,2,\ldots.$

5° Les distances entre les zéros successifs de $\psi_\nu(x)$ ne surpassent pas p pour $x \geqslant \alpha_\nu$, $\nu=1,2,3,\ldots.$

6° Dans l'intervalle $[0, \alpha_\nu]$ les fonctions $\psi_{\nu+1}(x)$ et $\psi_\nu(x)$ possèdent le même nombre des zéros, les zéros correspondants ne diffèrent que de $\frac{\xi_0}{2^\nu}$ au plus, les segments exceptionnels de deux fonctions se correspondent et on a

$$|\psi_{\nu+1}(x)-\psi_\nu(x)|<\frac{1}{2^\nu}\,, \quad |\psi'_{\nu+1}(x)-\psi'_\nu(x)|<\frac{1}{2^\nu}\,, \; \nu=1,2,3,\ldots$$

Pour $\nu=0$ les nombres $a_0=1$, $b_0=0$, α_1 et les fonctions $B_0(x)$ et $\psi_0(x)$ sont déjà définis. Supposons que les nombres et les fonctions en question sont déjà définis pour $\nu \leqslant n$, il suffit de montrer qu'il est encore possible de les définir pour $\nu=n+1$ de façon que les conditions 1^0-6^0 soit remplies.

En vertu de 5° dans l'intervalle $(4pn, 4p(n+1))$ se trouvent au moins deux zéros successifs ξ' et ξ'' de la fonction $\psi_n(x)$. Soit $\xi'<\alpha_{n+1}<\xi''$,

$$\psi_n(\alpha_{n+1})=\max\text{ loc }\psi_n(x)\,, \qquad 0<\delta<\frac{(\alpha_{n+1}-\xi')(1-k)}{3\,k}.$$

Posons dans le lemme $a = \alpha_{n+1}$, $\varepsilon < \frac{1}{2^{n+1}}$ et $B(x) = \sum_{i/0}^{n} B_i(x)$. Il nous fournira deux nombres $a_{n+1} = a$, $b_{n+1} = b$ et une fonction

$$B_{n+1}(x) = e^{a_{n+1}(x - b_{n+1})}.$$

L'intégrale $\psi_{n+1}(x)$ de l'équation $y'' + \left(\sum_{\nu/0}^{n+1} B_\nu(x)\right) y = 0$ satisfaisante aux conditions initiales

$$\psi_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \psi_n(\alpha_{n+1}) \quad , \quad \psi'_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \psi'_n(\alpha_{n+1})$$

s'annule au point ξ''' appartenant à l'intervalle $(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1} + 3\delta)$. On a en outre

$$1 > \frac{\alpha_{n+1} - \xi'}{\xi''' - \xi'} > \frac{\alpha_{n+1} - \xi'}{\alpha_{n+1} - \xi' + 3\delta} > \frac{1}{1 + \frac{1-k}{k}} = k .$$

Soit ξ^* le plus grand parmi ceux zéros de $\psi_{n+1}(x)$ qui sont plus petits que α_{n+1}. Pour ε suffisement petit le rapport $\frac{\alpha_{n+1} - \xi^*}{\xi'' - \xi^*}$ sera plus grand que k et le segment (ξ^*, ξ''') sera exceptionnel. On voit d'autre part sans peine que les autres conditions en question seront aussi satisfaites pour ε convenablement choisi.

La suite $B_\nu(x)$ étant ainsi construite posons

$$A(x) = \sum_{\nu/0}^{\infty} B_\nu(x)$$

D'après 1^0 et 2^0 cette série de fonction entières est uniformément convergente dans tout cercle $|x| \leqslant R$ · $A(x)$ est donc une fonction analitique entière. Il est aussi évident que $A(x)$ est une fonction croissante et positive. En vertu de 6^0 ils existent des limites $\lim_{\nu \to \infty} \psi_\nu(0) = r$ et $\lim_{\nu \to \infty} \psi'_\nu(0) = s$. Soit $\psi(x)$ une intégrale de l'équation (1) telle que $\psi(0) = r$, $\psi'(0) = s$. L'indice n étant supposé fixe la suite $\psi_\nu(x)$ converge uniformément vers $\psi(x)$ dans l'intervalle $[0, 4p(n+1)]$, il existe par conséquent au moins un segment exceptionnel de la fonction $\psi(x)$ contenu dans l'intervalle $[4pn, 4p(n+1)]$. En posant $n = 1, 2, \ldots$ nous obtenons une suite infinie de segments exceptionnels.

Streszczenie.

Przy założeniu, że $A(x)$ jest funkcją ciągłą i niemalejącą w przedziale $x > a$, wszystkie całki nieidentyczne zero równania różniczkowego $y'' + A(x)y = 0$ są jak wiadomo (C. Sturm, A. Kneser) oscylujące i jeśli ξ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, oznaczają kolejne zera ustalonej całki nieidentycznej zeru, to ciąg różnic $\xi_{\nu+1} - \xi_\nu$ jest nierosnący i całka przyjmuje dokładnie jedno extremum w każdym z przedziałów $(\xi_\nu, \xi_{\nu+1})$. Prof. M. Biernacki udowodnił, że istnieje ciąg wskaźników (skończony lub nie) $\nu(i)$ o następujących własnościach: 1°) suma długości przedziałów odpowiadających tym wskaźnikom jest skończona, 2°) pomijając te przedziały wyjątkowe

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\eta_\nu - \xi_\nu}{\xi_{\nu+1} - \xi_\nu} = \frac{1}{2}$$

gdzie η_ν oznaczają wartości zmiennej niezależnej dla których rozważana całka osiąga kolejne extrema. Dowiódł on również, że po wykluczeniu ciągu przedziałów wyjątkowych o sumie długości skończonej

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\xi_{\nu+2} - \xi_{\nu+1}}{\xi_{\nu+1} - \xi_\nu} = 1$$

a nadto wyraził przypuszczenie, że zastrzeżenie co do przedziałów wyjątkowych jest w tych twierdzeniach istotne. Praca zawiera konstrukcję przykładu, który dowodzi słuszności tego przypuszczenia. W przykładzie tym

$$A(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{a_\nu (x - b_\nu)},$$

gdzie liczby a_ν i b_ν są odpowiednio dobrane. $A(x)$ jest więc funkcją analityczną całkowitą.