ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. IV, 2 SECTIO A 1950

Z Seminarium Matematycznego II Wydz. Mat.-Przyr. U.M.C.S.
Kierownik: prof. dr Jan Mikusiński.

Czesław RYLL-NARDZEWSKI

Une extension d'un théorème de Sturm aux fonctions analytiques

Uogólnienie pewnego twierdzenia Sturma na funkcje analityczne

Le théorème classique de S t u r m concernant la distance minimum entre les zéros des intégrales de l'équation différentielle

$$y'' + A(x)\, y = 0\,,$$

peut être énoncé sous la forme suivante:

Si une fonction $\varphi(x)$ (non identiquement nulle) deux fois continuement dérivable satisfait à l'inégalité $-\dfrac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} \leqslant M$ dans un intervalle ouvert S de longueur $\dfrac{\pi}{\sqrt{M}}$, alors elle possède, dans l'intervalle S, un zéro au plus.

Dans la théorie des fonctions analytiques la proposition suivante[1]) correspond à celle ci-dessus:

Si une fonction complexe $\varphi(x)$ non identiquement nulle est holomorphe dans un domaine convexe D de diamètre $\dfrac{\pi}{\sqrt{M}}$ et y satisfait à l'inégalité

$$\left|\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}\right| \leqslant M, \tag{1}$$

alors elle possède dans ce domaine un zéro au plus.

---

[1]) Proposition énoncée comme hypothèse par J. G.-M i k u s i ń s k i en 1943.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons, par contre, que

$$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0, \quad \text{où} \quad x_1, x_2 \in D$$

et qu'il n'existe pas d'autres zéros de $\varphi(x)$ sur le segment qui joint les points x_1 et x_2.

Cela étant, la fonction

$$\psi(t)=\varphi\left(x_1+\frac{x_2-x_1}{\pi}t\right) \tag{2}$$

est holomorphe par rapport à t dans un domaine D' qui contient le segment

$$0 \leqslant R(t) \leqslant \pi, \qquad I(t)=0.$$

On a dans D'

$$\left|\frac{\psi''(t)}{\psi(t)}\right| = \frac{1}{\pi^2}|x_2-x_1|^2\left|\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}\right|<1 \qquad \left(x=x_1+\frac{x_2-x_1}{\pi}t\right),$$

donc le quotient $\frac{\psi''}{\psi}$ est encore une fonction holomorphe dans D'. Par suite, la partie réelle A de $\frac{\psi''}{\psi}$ est une fonction continue dans D' et l'on a

$$-A<1.$$

En posant

$$\psi(t)=\varrho(t)e^{i\alpha(t)} \tag{3}$$

où $\varrho(t)$ et $\alpha(t)$ sont des fonctions réelles, la fonction A satisfait, pour $s \in D'$ réel à l'égalité

$$\varrho''+(-\varrho'^2-A)\varrho=0$$

Or, c'est impossible en vertu du théorème précité de S t u r m car $-\varrho'^2-A<1$ et $\varrho(0)=\varrho(\pi)=0$ d'après (2) et (3).

Cette contradiction prouve qu'il ne peut pas exister deux zéros de $\varphi(x)$ dans le domaine D.

S t r e s z c z e n i e

Klasyczne twierdzenie Sturma można stormułować dla funkcyj analitycznych w sposób następujący:

Jeśli funkcja $\varphi(x)$ holomorficzna w obszarze wypukłym D o średnicy $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ spełnia w tym obszarze nierówność:

$$\left|\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}\right| \leqslant M,$$

to równanie $\varphi(x) = 0$ posiada co najwyżej jeden pierwiastek w obszarze D.

Lublin, 1948.