ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. II, 2 SECTIO A 1948

Z Zakładu Logiki Matematycznej i Podstaw Matematyki Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego U. M. C. S. w Lublinie
Kierownik: zast. prof. dr Adam Bielecki

Adam Bielecki

Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour l'unicité des solutions des systèmes d'équations différentielles ordinaires et des équations au paratingent

O pewnych warunkach koniecznych i dostatecznych jednotliwości rozwiązań układów równań różniczkowych zwyczajnych i równań paratyngensowych

Introduction. Ce travail [1]) est consacré au problème suivant, posé par M. T. Ważewski:

Soit

$$(1) \qquad x' = f(t,x,y), \qquad y' = g(t,x,y)$$

un système d'équations différentielles dont les seconds membres sont continus dans le domaine

$$a \leqslant t \leqslant b, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad -\infty < y < +\infty.$$

Soit I_0 une intégrale particulière

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

définie pour $a \leqslant t \leqslant b$ et issue du point $P_0 = (a, \xi, \eta)$.

Soit enfin C un ensemble fermé satisfaisant aux conditions:

1° l'ensemble C contient l'intégrale I_0 est il est contenu dans le voisinage de I_0 de rayon $\varepsilon > 0$;

2° il existe deux cônes de sommet P_0: l'un qui contient dans son intérieur la tangente de I_0 au point P_0 et qui est localement contenu

[1]) dont j'ai communiqué les résultats essentiels au V Congrès Polonais de Mathématique à Cracovie, le 31 mai 1947; voir le compte rendu au supplément des Ann. de la Soc. Polonaise de Math. (à paraître).

dans C' (c'est-à-dire qu'il existe un entourage de P_0 dont la partie commune avec ce cône est contenue dans C), et l'autre qui contient localement l'ensemble C;

3° toute intégrale du système (1) issue d'un point de la frontière de C pénètre dans l'intérieur de C' pour les valeurs croissantes de la variable t;

4° les points frontières de C situés dans le domaine ouvert limité par les plans $t=a$ et $t=b$ forment une surface régulière Σ;

5° les intersections de Σ avec les plans $t=c$, où $a \leqslant c \leqslant b$, sont des circuits simples.

Évidemment, pour que I_0 soit une intégrale unique issue du point P_0, il suffit qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un continu C satisfaisant aux conditions 1°-5°.

La question réciproque se pose, à savoir si cette condition est en même temps nécessaire pour l'unicité de l'intégrale I_0.

La réponse est positive. Ce résultat sera établi au Chapitre 4 dans une forme plus générale et dont la condition en question est une conséquence. Il sera montré au Chapitre 5 qu'il est impossible de généraliser ce résultat aux systèmes de $n > 2$ équations différentielles en remplaçant, dans la condition 5°, les circuits simples par les hypersurfaces limitant des domaines fermés homéomorphes à la sphère à n dimensions. Cependant, si l'on supprime la condition 5°, le résultat s'étend encore au cas d'un nombre quelconque d'équations [2]).

Les méthodes des démonstrations que j'emploie ont recours aux systèmes d'inégalités différentielles ou — ce qui revient ici au même — aux équations au paratingent de M. S. K. Zaremba [3]). Il paraît donc naturel de traiter le problème tout entier du point de vue de cette théorie, c'est ce qui fournit des résultats plus généraux, les équations différentielles n'étant qu'un cas particulier des équations au paratingent. Comme les notions dont je me sers diffèrent légèrement de celles introduites par M. Zaremba, je précise aux Chapitres 1 et 2 leurs définitions et j'énonce, entre autres, quelques théorèmes préparatoires de la théorie de ces équations.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à M. T. Ważewski, mon professeur, auquel je dois le problème de cette étude et de précieux conseils au cours de sa réalisation.

---

[2]) Ce résultat a été communiqué par moi à la séance de la Société Polonaise de Mathématique, Section de Cracovie, le 9 Octobre 1945; voir Ann. de la Soc. Polonaise de Math., 19 (1946), p. 219.

[3]) S. K. Zaremba, *O równaniach paratyngensowych*, Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego 9, 1935 (en polonais) et *Sur les équations au paratingent*, Bull. des Sc. Math. 60 (2), mai 1936, p. 139-160.

Chapitre 1

1,1. X_n désignera l'espace euclidien à n dimensions contenu dans un espace euclidien X_{n1} à $n+1$ dimensions. Le symbole X_{n1} a été choisi pour faire ressortir le rôle particulier de la première coordonnée t. À savoir, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ étant un point variable de X_n, nous poserons $(t, x)=(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour désigner un point variable de X_{n1}.

Le symbole $|P, P'|$ désignera la distance entre les points P et P', et le symbole $|E, P|$ — celle entre le point P et l'ensemble E.

L'ensemble des points $P \epsilon X_{n1}$ tels que $|E, P| < r$ sera désigné par $\mathrm{K}(E, r)$ et sa fermeture par $\overline{\mathrm{K}}(E, r)$. Pareillement, celui des points $x \epsilon X_n$ tels que $|E, x| < r$ sera désigné par $\mathrm{k}(E, r)$ et sa fermeture — par $\overline{\mathrm{k}}(E, r)$.

Soit M l'ensemble des droites menées du point $(-1, 0, \ldots, 0) \epsilon X_n$ aux points d'un ensemble borné, fermé et convexe m contenu dans X_n. L'ensemble M sera dit *pinceau de droites* [4]) et l'ensemble m — sa *trace*. Nous dirons que le pinceau M est contenu dans le pinceau M' (en symbole: $M \subset M'$) lorsque $m \subset m'$. Le pinceau M s'appellera *contenu dans l'intérieur* de M' (en symbole: $M \underset{i}{\subset} M'$) lorsque tous les points de la trace m appartiennent à l'intérieur de m' (en symbole: $m \underset{i}{\subset} m'$). Le pinceau qui ne contient qu'une seule droite s'appellera *élément linéaire*. Nous désignerons, enfin, par $\overline{\mathrm{k}}(M, \varepsilon)$ le pinceau dont la trace est $\overline{\mathrm{k}}(m, \varepsilon)$. La *distance* $|M, M'|$ entre deux pinceaux sera entendue comme celle de leurs traces au sens de Hausdorff [5]); l'ensemble de tous les pinceaux dans X_{n1} devient ainsi un espace métrique.

Nous appellerons *champ de pinceaux*, ou *champ* tout court, toute fonction $M(P)$ définie dans un ensemble $B \subset X_n$, faisant correspondre un pinceau à tout point de B et qui est semi-continue supérieurement par rapport à l'inclusion [6]) (c'est-à-dire que P_0 étant un point de B, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que l'inégalité $|P, P_0| < \delta$ entraîne $M(P) \subset \overline{\mathrm{k}}(M(P_0), \varepsilon)$ pour tout $P \epsilon B$).

Le champ $M(P)$ est dit *continu au point* P_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que les conditions $P \epsilon B$ et $|P, P_0| < \delta$ entraînent l'inégalité $|M(P), M(P_0)| < \varepsilon$.

Le champ $M(P)$ sera dit *borné*, s'il est contenu dans un champ fixe. L'élément linéaire $L(P)$ dont la trace est le centre de gravité de $m(P)$ sera dit *centre de* $M(P)$.

---

[4]) Cf. Zaremba, ibidem.

[5]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 293.

[6]) Cf. G. Bouligand, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Paris 1942, p. 75.

1,2. Les propositions suivantes sont des conséquences directes des définitions qui précèdent.

Tout champ d'éléments linéaires est continu.

Tout champ défini dans un ensemble compact est borné.

Si $M(P)$ est un champ défini dans B et si $\varepsilon(P)$ est une fonction positive, continue dans B, alors $\bar{k}(M(P),\varepsilon(P))$ est encore un champ; ce champ est continu lorsque $M(P)$ l'est.

Supposons que $M(P)$ soit défini dans B et que $M'(P)$ soit continu dans B. *Alors, si $P_0 \epsilon B$ et $M(P_0) \underset{i}{\subset} M'(P_0)$, il existe, pour tout entier positif p, un $\varepsilon > 0$, un $\eta > 0$ et un $\delta > 0$ tels que*

$$\bar{k}(M(P), p\,\varepsilon) \underset{i}{\subset} \bar{k}(M(P_0), \eta) \underset{i}{\subset} M'(P') \quad \textit{lorsque} \quad P, P' \epsilon B \cdot K(P_0, \delta).$$

Dans la démonstration de la seconde inclusion, on aura à faire intervenir la remarque suivante: étant donnés deux ensembles bornés, fermés et *convexes* m, m' et un $\lambda > 0$, l'inclusion $\bar{k}(m,\lambda) \subset \bar{k}(m',\lambda)$ entraîne l'inclusion $m \subset m'$.

Si le champ $M(P)$ est continu dans B et sa trace $m(P)$ contient, pour tout $P \epsilon B$, des points intérieurs, le centre $L(P)$ de $M(P)$ est continu et $L(P) \underset{i}{\subset} M(P)$.

Cela résulte du fait que le centre de gravité d'un ensemble convexe ayant des points intérieurs est une fonction continue de cet ensemble [7]).

1,3. Soit $\mathcal{F}$ une famille de champs $M(P)$ définis dans B. La fonction qui fait correspondre à tout point P de B l'intersection $\prod_{\mathcal{F}} M(P)$ de tous les pinceaux $M(P)$ sera dit *produit de la famille* $\mathcal{F}$.

Lemme 1. *$M_i(P)$, où $i = 1, 2, \ldots$, étant une suite de champs définis dans B, si l'on a $M_{i+1}(P) \subset M_i(P)$ pour $i = 1, 2, \ldots$, le produit $M(P) = \prod_{i=1}^{\infty} M_i(P)$ est encore un champ défini dans B.*

Soient, en effet, $P_0 \epsilon B$ et $\varepsilon > 0$. On a évidemment pour un p:

$$\bar{k}(M_p(P_0), \varepsilon/2) \subset \bar{k}(M(P_0), \varepsilon).$$

D'autre part, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$M_p(P) \subset \bar{k}(M_p(P_0), \varepsilon/2) \quad \text{pour} \quad |P, P_0| < \delta \quad \text{et} \quad P \epsilon B.$$

---

[7]) Cf. T. Bonnesen et W. Fenchel, *Theorie der convexen Körper*, Ergebn. der Math. 1934, p. 52.

Donc

$$M(P) \subset M_p(P) \subset \mathrm{k}(M(P_0), \varepsilon) \quad \text{pour} \quad |P, P_0| < \delta, P \epsilon B.$$

Nous appellerons *somme des pinceaux* $M_1, M_2, \ldots$ et désignerons par $M_1 \hat{+} M_2 \hat{+} \ldots$ ou par $\hat{\sum\limits_{i=1,2,\ldots}} M_i$ le moindre pinceau qui les contient. Ainsi définie, la somme de pinceaux est la partie commune (intersection) de tous les pinceaux qui les contient tous.

Soient maintenant $\lambda_i \geqslant 0$ pour $i = 1, \ldots, k$, $\Phi = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i > 0$ et $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\Phi}$. Nous appellerons *agrégat des ensembles* Z_i, où $i = 1, \ldots, k$ (en symbole $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i Z_i$), l'ensemble Z composé de centres de gravité $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i x^i$ de tous les systèmes de points $x^i \epsilon Z_i$ où $i = 1, \ldots, k$.

On a évidemment

$$\prod_{i=1,\ldots,k} Z_i \subset Z \subset \hat{\sum_{i=1,\ldots,k}} Z_i. \tag{1}$$

Il est facile de montrer que l'agrégat d'ensembles compacts et convexes contenus dans X_n est encore un ensemble compact et convexe.

Nous pouvons donc appeller *agrégat de pinceaux* M_i, où $i = 1, \ldots, k$ (en symbole: $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i M_i$), le pinceau dont la trace est l'agrégat de leurs traces [8]).

Signalons sans démonstration la proposition suivante [9]):

Lemme 2. *$M_i(P)$, où $i = 1, \ldots, k$, étant des champs définis dans B, soient $\lambda_i(P) \geqslant 0$ des fonctions à valeurs numériques, continues dans B telles que $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i(P) > 0$. Alors l'agregat $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i(P) M_i(P)$ est encore un champ; en outre si $M_i(P)$ sont continus, leur agrégat l'est aussi.*

1,4. Soient A un ensemble ouvert contenu dans l'espace X_n, B et B' — des ensembles contenus dans A et fermés relativement à A. Considérons deux champs $M(P)$ et $M'(P)$ définis dans B et B' respectivement, dont $M'(P)$ est continu et tel que tous ses pinceaux possèdent des points intérieurs.

Soit enfin

$$M(P) \underset{i}{\subset} M'(P) \quad \text{pour} \quad P \epsilon B \cdot B'.$$

---

[8]) Cf. Zaremba, ibidem.

[9]) Une proposition analogue se trouve dans le travail précité de S. K. Zaremba.

Nous allons démontrer le lemme suivant:

Lemme 3. *Il existe un champ $M''(P)$ continu dans A et une fonction $\varepsilon(P)>0$ continue dans A tels que:*

$$M(P)\subset M''(P) \quad \textit{pour} \quad P\epsilon B, \tag{2}$$

$$\mathrm{k}(M''(P),2\varepsilon(P))\underset{i}{\subset} M'(P) \quad \textit{pour} \quad P\epsilon B'. \tag{3}$$

En effet, soit d'abord $P_0\epsilon B\cdot B'$. Il existe alors un nombre $r(P_0)>0$ et un pinceau $M^*(P_0)$ tels que

$$M(P)\subset M^*(P_0) \quad \text{pour} \quad P\epsilon B\cdot \mathrm{K}(P_0,r(P_0)), \tag{4}$$

$$M^*(P_0)\underset{i}{\subset} M'(P) \quad \text{pour} \quad P\epsilon B'\cdot \mathrm{K}(P_0,r(P_0)). \tag{5}$$

Soit ensuite $P_0\epsilon B-B'$. Il existe alors un pinceau $M^*(P_0)$ et un nombre $r(P_0)>0$ satisfaisant à la condition (4) et à l'inégalité

$$r(P_0)<|B',P_0|. \tag{6}$$

Soit, à son tour, $P_0\epsilon B'-B$. Alors on peut prendre pour $M^*(P_0)$ le centre du pinceau $M'(P_0)$ et pour $r(P_0)$ un nombre quelconque satisfaisant à la condition (5) et à l'inégalité

$$r(P_0)<|B,P_0|. \tag{7}$$

Soit enfin $P_0\epsilon(A-B)-B'$. On prendra alors pour $M^*(P_0)$ l'élément linéaire parallèle à l'axe des t et l'on choisira un

$$r(P_0)<|P_0,B+B'|. \tag{8}$$

Ceci posé, soit $\sigma(P)=\mathrm{K}(P,r(P))$. On déduit facilement du théorème de Borel-Lebesgue qu'il est possible de couvrir l'ensemble A avec une suite de sphères $\sigma_i=\sigma(P_i)$, où $i=1,2,\ldots$, de façon que le nombre des sphères empiétant sur n'importe quel ensemble compact $E\subset A$ soit fini. Désignons par $f_i(P)$ une fonction continue, positive dans σ_i et nulle en dehors de σ_i; posons

$$M''(P)=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(P)M^*(P_i).$$

Si l'on se borne à un ensemble compact $E\subset A$, le second membre de cette égalité se réduit à un agrégat fini. Il s'ensuit d'après le lemme 2 de **1,3** que $M''(P)$ est un champ continu dans tout ensemble compact $E\subset A$, donc dans l'ensemble A tout entier.

Considérons un point $P \epsilon B$. Alors $M''(P)$ est un agrégat des pinceaux $M^*(P_{i(\mu)})$, où $\mu = 1, \ldots, m$, satisfaisant à la condition $P \epsilon \mathrm{K}(P_{i(\mu)}, r(P_{i(\mu)}))$. Il s'ensuit des inégalités (7) et (8) que les points $P_{i(\mu)}$ appartiennent à B. On a donc, d'après (4), $M(P) \subset M^*(P_{i(\mu)})$ d'où la condition (2) en vertu de (1). En s'appuyant sur les relations (1), (5), (6) et (8), on constate aussi sans peine que

$$M''(P) \underset{i}{\subset} M'(P) \quad \text{pour} \quad P \epsilon B'.$$

Soient maintenant $\{s_i\}$ une suite de sphères ouvertes et $\{\varepsilon_i\}$ une suite de nombres positifs assujettis aux conditions suivantes:

1° $\sum_{i=1}^{\infty} s_i = A$;

2° $\bar{\mathrm{k}}(M''(P), \varepsilon_i) \underset{i}{\subset} M'(P)$ pour $P \epsilon s_i \cdot B$;

3° E étant un sous-ensemble compact de A, les produits $s_i \cdot E$ sont vides à partir d'un indice i.

Pour achever la démonstration du lemme, il suffit de poser

$$2\varepsilon(P) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} g_i(P)\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{\infty} g_i(P)}$$

où $g_i(P)$ est une fonction continue, positive dans l'intérieur de la sphère s_i et nulle en dehors d'elle.

1,5. Lemme 4. *Sous les hypothèses introduites dans* **1,4** *et concernant les champs $M(P)$, $M'(P)$ et les ensembles A, B et B', il existe une suite de champs $M_i(P)$, où $i = 1, 2, \ldots$, telle que*

1° *$M_i(P)$ sont continus dans A,*

2° *$M_i(P) \underset{i}{\subset} M'(P)$ dans B',*

3° *$M_{i+1}(P) \underset{i}{\subset} M_i(P)$ dans A,*

4° *$M_0(P) = \prod_{i=1,2,\ldots} M_i(P)$ est un champ défini dans A et continu dans $A - B$,*

5° *$M(P) = M_0(P)$ dans B.*

Admettons d'abord que $r(P)$ est une fonction positive dans A dont les valeurs sont inférieures à la moitié de distance entre P et la frontière de A et telle que

$$M(R) \subset \bar{\mathrm{k}}(M''(Q), \varepsilon(Q)) \text{ pour } R \text{ et } Q \epsilon \bar{\mathrm{K}}(P, 2r(P)),$$

où $\varepsilon(P)$ est une fonction considérée dans **1,4.** Soient encore $\{P_i\}$ une suite de points de B et $\{r_i\}$ une suite de nombres positifs, assujetties aux conditions suivantes:

1) $r_i \to 0$ pour $i \to \infty$,

2) $r_i \leqslant r(P_i)$,

3) $\sum_{i=1}^{\infty} S_i \subset A$, où $S_i = \mathrm{K}(P_i, 2r_i)$,

4) tout point de l'ensemble B appartient à une infinité des sphères $s_i = \bar{\mathrm{K}}(P_i, r_i)$),

5) les ensembles $s_i \cdot B$ sont non vides.

L'existence de telles suites est une conséquence du théorème de Borel-Lebesgue. Il est évident qu'en posant $M^i = \sum_{P \in S_i} \bar{\mathrm{k}}(M(P), \varepsilon(P_i)/i)$, on a pour $P \in S_i$

$$M(P) \underset{i}{\subset} M^i \subset \bar{\mathrm{k}}(M''(P), 2\varepsilon(P)).$$

Ceci admis, nous allons considérer une suite de champs définie par recurrence comme il suit:

$$M_1'(P) = \bar{\mathrm{k}}(M''(P), \varepsilon(P)),$$

$$M_{i+1}'(P) = (1 - f_i(P))\, M_i'(P) + f_i(P)(M_i'(P) \cdot M^{i+1}),$$

où $f_i(P)$ est une fonction continue, égale à 1 dans s_i, positive dans $S_i - s_i$ et nulle en dehors de S_i. On vérifie facilement que les champs $M_i'(P)$ sont continus dans A et que:

$$M(P) \underset{i}{\subset} M_{i+1}'(P) \subset M_i'(P) \subset \bar{\mathrm{k}}(M''(P), \varepsilon(P)) \qquad \text{pour } P \in A,$$

$$M_i'(P) \subset M^i \qquad \text{pour } P \in s_i.$$

Le produit $M_0(P) = \prod_{i=1}^{\infty} M_i'(P)$ est d'après le lemme 1 un champ défini dans A. Il est continu dans $A - B$ car $P_0 \in A - B$ étant un point fixe, tous les $M_i'(P)$ sont égaux dans un voisinage de P_0 à partir d'un indice i. Tout point $P \in B$ est dans une sphère s_i de rayon arbitrairement petit; le pinceau correspondant M^i diffère de $M(P)$ d'aussi peu que l'on veut et on a par conséquent $M(P) = M_0(P)$ pour tout point $P \in B$.

Pour achever la démonstration, il suffit de poser

$$M_i(P) = \bar{\mathrm{k}}\left(M_i'(P), \frac{\varepsilon(P)}{i}\right).$$

Remarques. Si $B=A$, le lemme 4 fournit une approximation du champ défini sur un ensemble ouvert par des champs continus. Si B est compact, on peut admettre que $A=X_{n1}$; on obtient ainsi une proposition de S. K. Zaremba sur l'approximation d'un champ défini dans un ensemble compact par des champs continus [10]). La méthode de la démonstration utilisée ici n'est d'ailleurs qu'une modification de celle employée par lui. Dans le cas où $M(P)$ est continu dans B, on peut montrer que le champ $M_0(P)$ est continu dans l'ensemble A tout entier.

1,6. Lemme 5. *Soient: $t=F(x)$ une fonction continue dans un ensemble ouvert $B\subset X_n$ et $\varepsilon(x), \eta(x)$ deux fonctions dont les bornes inférieures sont positives sur tout sous-ensemble compact de B. Alors il existe une fonction analytique $G(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes:*

1° $|G(x)-F(x)|<\varepsilon(x)$,

2° *$v_1, v_2, \ldots, v_n$ étant des coordonnées d'un vecteur de longueur 1 situé dans X_n, on a*

$$a(x)-\varepsilon(x)\leqslant\partial_v G(x)\leqslant b(x)+\varepsilon(x),$$

où $a(x)$ est la borne inférieure de $\partial_v^- F(\xi)$ et $b(x)$ est la borne supérieure de $\partial_v^+ F(\xi)$ dans $\mathrm{k}(x,\eta(x))$.

Les symboles ∂_v, ∂_v^-, ∂_v^+ désignent ici respectivement la dérivée partielle et les nombres dérivés dans la direction du vecteur v [11]).

En effet, soient d'abord B' un sous-ensemble fermé et borné de B et $r>0$ un nombre inférieur à la distance entre B' et la frontière de B. Soit $g(z)$ une fonction non négative, indéfiniment dérivable dans X_n, s'annulant en dehors de la sphère ω_0 de rayon 1 et de centre à l'origine, et satisfaisant à la condition $\int\limits_{\omega_0} g(z)dz=1$. Posons

$$0<\varrho\leqslant r \quad \text{et} \quad h(x,y)=\frac{1}{\varrho^n}g\left(\frac{y-x}{\varrho}\right).$$

La fonction

$$H(x)=\int\limits_{X_n} F(y)h(x,y)\,dy=\int\limits_{\omega_0} F(x-\varrho z)g(z)\,dz$$

est encore indéfiniment dérivable dans B'.

---

[10]) Cf. Zaremba, ibidem.

[11]) Pour les fonctions $F(x)$ ayant les dérivées continues du premier ordre, le lemme 5 est un cas particulier d'un théorème de H. Whitney, *Analytic extensions of différentiable functions defined in closed sets*, Trans. of the American Math. Soc. 36, 1934, p. 76, lemma 6. La méthode de démonstration employée ici est d'ailleurs une modification de la sienne.

Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque la fonction $F(x)$ est continue dans $\bar{k}(B', r)$, il existe un nombre r' tel que $0 < r' \leqslant r$ et que les inégalités $|z| \leqslant 1$, $0 < \varrho \leqslant r'$ entraînent pour $x \epsilon B'$ les relations:

$$(8) \qquad |F(x+\varrho z) - F(x)| < \varepsilon,$$

$$(9) \qquad |H(x) - F(x)| \leqslant \int_{\omega_0} |F(x+\varrho z) - F(x)| g(z) dz < \varepsilon \int_{\omega_0} g(r) dr = \varepsilon.$$

Désignons par η un nombre positif inférieur à r' et à la borne inférieure de $\eta(x)$ dans B'.

En admettant que v est le vecteur-unité et que l'on a

$$y \epsilon \mathrm{k}(x, \eta), \quad y + vq \epsilon \mathrm{k}(x, \eta), \quad x \epsilon B' \quad \text{et} \quad q \neq 0,$$

nous montrerons que

$$(10) \qquad a(x) \leqslant \frac{F(y+vq) - F(y)}{q} \leqslant b(x).$$

Posons à ce but $\Phi(s) = F(y + vs)$. On a $b(x) \geqslant \partial^+(s)$ où $0 \leqslant s \leqslant q$, ∂^+ désignant le nombre dérivé supérieur à droite. Examinons le cas où $b(x) < +\infty$ (le cas contraire étant trivial). Soient: ϑ un nombre positif et s' la borne supérieure des nombres s pour lesquels on a $0 \leqslant s \leqslant q$ et

$$(11) \qquad \Phi(s) - \Phi(0) \leqslant (b(x) + \vartheta) s.$$

Cette inégalité subsiste pour $s = s'$ car $\Phi(s)$ est une fonction continue. Si l'on avait $s' < q$, il existerait un nombre $\theta > 0$ tel que

$$\Phi(s) - \Phi(s') \leqslant (b(x) + \vartheta)(s - s') \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant s - s' < \theta$$

et l'inégalité (11) serait satisfaite pour $0 \leqslant s < s' + \theta$. On a donc $s' = q$ et, $\vartheta > 0$ étant arbitraire, il s'ensuit que $\Phi(q) - \Phi(0) \leqslant b(x) q$.

La démonstration de la seconde partie de l'inégalité (10) est tout à fait analogue.

Envisageons maintenant l'expression

$$\Delta = \frac{H(x+vq) - H(x)}{q} = \int_{\omega_0} \left[\frac{F(y+vq) - F(y)}{q} \right]_{y = x + \varrho z} \cdot g(z) dz.$$

Si $\varrho = \eta/2$, $x \epsilon B'$, $0 < q < \varrho$ et $z \epsilon \omega_0$, les points $y = x + \varrho z$ et $y = x + \varrho z + qv$ appartiennent à $\mathrm{k}(x, \eta)$ et, par suite, $a(x) \leqslant \Delta \leqslant b(x)$, d'où $a(x) \leqslant \partial_v H(x) \leqslant b(x)$ pour $x \epsilon B'$. Remarquons que $H(x)$ et ϱ ont été définis indépendemment du choix de la direction v.

Ceci étant, soit $\{B_i\}$ une suite d'ensembles bornés ouverts tels que

$$\bar{B}_i \subset B_{i+1} \subset B \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\infty} B_i = B.$$

Soit $4\varepsilon_i$ la borne inférieure de $\varepsilon(x)$ dans $\bar{B}_i$; la suite $\{\varepsilon_i\}$ est évidemment non croissante. Soit enfin $u_i(x)$, où $i=1,2,\ldots$, une fonction indéfiniment dérivable, égale à 1 dans $\bar{B}_{i-1}$, nulle en dehors de B_i et assujettie à l'inégalité $0 \leqslant u_i(x) \leqslant 1$ dans B.

En désignant par c_i le maximum de $\partial_v u_i(x)$ pour toutes les directions possibles de v, soit $\{\varepsilon_i'\}$ une suite décroissante de nombres positifs, assujettis aux conditions $\varepsilon_i' \leqslant \varepsilon_i$ et $c_i\varepsilon_i' < \varepsilon_i$. D'après la première partie de la démonstration, il existe des fonctions $H_i(x)$, où $i=1,2,\ldots$, indéfiniment dérivables dans X_n et telles que

$$|H_i(x)-F(x)| < \varepsilon_i',$$

$$a(x) \leqslant \partial_v H_i(x) \leqslant b(x) \quad \text{pour} \quad x \in B_i, \quad i=1,2,\ldots$$

Posons:

$$w_1(x)=u_1(x), \quad w_i(x)=u_i(x)-u_{i-1}(x) \quad \text{pour} \quad i=2,3,\ldots,$$

$$H(x)=\sum_{i=1}^{\infty} w_i(x)H_i(x).$$

Le membre droit de la dernière égalité se réduit dans chaque ensemble B_i à une somme finie; par conséquent $H(x)$ est une fonction indéfiniment dérivable dans B.

Soit $k \geqslant 2$ et $x \in \bar{B}_k - B_{k-1}$. Alors:

$$|H(x)-F(x)| = |u_k(x)H_k(x)+(1-u_k(x))H_{k+1}-F(x)| \leqslant$$
$$\leqslant u_k(x)|H_k(x)-F(x)|+(1-u_k(x))|H_{k+1}(x)-F(x)| \leqslant$$
$$\leqslant u_k(x)\varepsilon_k'+(1-u_k(x))\varepsilon_{k+1}' < \varepsilon_k' \leqslant \varepsilon(x)/2,$$

$$\partial_v H(x)=u_k(x)\partial_v H_k(x)+(1-u_k(x))\partial_v H_{k+1}(x)+(H_k-H_{k+1})\partial_v u_k(x),$$

$$a(x)-\varepsilon(x)/2 \leqslant a(x)-2c_k\varepsilon_k' \leqslant \partial_v H(x) \leqslant b(x)+2c_k\varepsilon_k' \leqslant b(x)+\varepsilon(x)/2.$$

Pour $k=1$, on obtient les inégalités analogues. En vertu d'un théorème de Whitney [12]), il existe une fonction $G(x)$, analytique dans B et qui y satisfait aux inégalités

$$|G(x)-H(x)| < \varepsilon(x)/2, \qquad |\partial_v G(x)-\partial_v H(x)| < \varepsilon(x)/2.$$

Il est évident que $G(x)$ jouit des propriétés 1° et 2°, c. q. f. d.

---

[12]) H. Whitney, ibidem.

Chapitre 2

2,1. Considérons un ensemble Z situé dans l'espace X_{n1} et un point P appartenant à Z.

Nous appellerons *parantingent de l'ensemble Z au point P* l'ensemble $\mathrm{Pt}(Z, P)$ des droites issues du point $(-1, 0, 0, \ldots, 0)$ et satisfaisant à la condition suivante: si l est une droite de $\mathrm{Pt}(Z, P)$, il existe dans Z deux suites de points, $\{Q_i\}$ et $\{R_i\}$, convergentes vers P, telles que $Q_i \neq R_i$ et que la suite des droites $Q_i R_i$ converge vers une droite parallèle à l.

Nous appellerons *contingent de l'ensemble Z au point P* le sous-ensemble $\mathrm{Ct}(Z, P)$ de $\mathrm{Pt}(Z, P)$ que l'on obtient en posant $Q_i = P$ [13]) pour tout $i = 1, 2, \ldots$

Soit $M(P)$ un champ de pinceaux de droites défini dans un ensemble $B \subset X_{n1}$.

Un arc C, représenté par un système d'équations $x = \varphi(t)$ dont les membres droits sont continus, sera dit *intégrale du champ $M(P)$* si l'on a $C \subset B$ et $\mathrm{Pt}(C, P) \subset M(P)$ pour tout point P de la courbe C.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'arc C soit l'intégrale du champ $M(P)$ sera dite, d'après S. K. Zaremba, *équation au paratingent* [14]).

Si $M(P)$ est un champ d'éléments linéaires, l'équation au paratingent est équivalente à un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$x' = f(t, x) \quad (1)$$ [15])

dont les membres droits sont continus dans B. Dans le cas général, les intégrales d'une équation au paratingent possèdent certaines propriétés essentielles des solutions d'un système d'équations différentielles (1) [16]).

2,2. Nous énoncerons quelques théorèmes de S. K. Zaremba sous une forme plus restrictive et qui sera plus commode ici.

---

[13]) Les notions de paratingent et de contingent ainsi définies diffèrent un peu de celles introduites par G. Bouligand, dans son livre précité, p. 66 et 72.

[14]) Cf. Zaremba, ibidem.

[15]) C'est une façon abrégée d'écrire un système d'équations $x_i' = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où $i = 1, 2, \ldots, n$.

[16]) Voir S. K. Zaremba, ibidem, et *Sur certaines familles de courbes en relation avec la théorie des équations différentielles*, Ann. de la Soc. Polonaise de Math. 15, 1936, p. 83-100.

Lemme 6. *Si pour tout $P \epsilon C$ le paratingent* $\mathrm{Pt}(C, P)$ *est contenu dans un pinceau fixe M, toute corde tendue entre deux points différents de C est parallèle à une certaine droite contenue dans M* [17].

Nous disons qu'une suite d'arcs

$$x_i^j = \varphi_i^j(t) \quad \text{où} \quad t' \leqslant t \leqslant t'', \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{et} \quad j = 1, 2, \ldots,$$

converge vers l'arc

$$x_i = \varphi_i(t) \quad \text{où} \quad t' \leqslant t \leqslant t'' \quad \text{et} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

si pour chaque valeur de l'indice i les fonctions $\varphi_i^j(t)$ convergent uniformément vers $\varphi_i(t)$ dans l'intervalle $t' \leqslant t \leqslant t''$.

Lemme 7. *Si $M(P)$ est un champ défini dans un ensemble ouvert $B \subset X_{n1}$, tout arc limite d'une suite d'intégrales du champ $M(P)$ est une intégrale de ce champ.*

Lemme 8. *Si le champ $M(P)$ est défini dans un ensemble ouvert B et $Q \epsilon B$, il existe une intégrale issue du point Q et qui peut être prolongée jusqu'à la frontière de B.*

Soient: $M(P)$ un champ défini dans un ensemble $B \subset X_n$ et E un ensemble quelconque contenu dans B.

Nous appellerons *zone d'émission* $Z^+(E, M)$ de l'ensemble E l'ensemble de tous les points P satisfaisant à la condition suivante: τ, ξ étant les coordonnées du point P, il existe une intégrale $x = \varphi(t)$ du champ $M(P)$ et un point $P_0 = (\tau_0, \xi_0)$, tels que $\xi = \varphi(\tau)$, $\xi_0 = \varphi(\tau_0)$ et $\tau_0 \leqslant \tau$.

Nous appellerons *zone d'absorption* $Z^-(E, M)$ de l'ensemble E l'ensemble des points satisfaisant à la condition qui s'obtient de la précédente en y remplaçant $\tau_0 \leqslant \tau$ par $\tau \leqslant \tau_0$.

Si l'ensemble E se réduit à un seul point P, on a respectivement la zone d'emission $Z^+(P, M)$ et la zone d'absorption $Z^-(P, M)$ du point.

2,3. Désignons par $W[a, \beta)$ l'ensemble des points (t, x) pour lesquels $a \leqslant t < \beta$ et par $W[a, b]$ celui des points pour lesquels $a \leqslant t \leqslant b$. Admettons que l'ensemble E est contenu dans $W[a, \beta)$ où $a < \beta \leqslant +\infty$.

La zone d'émission $Z^+(E, M)$ sera dite *régulière*, si toute intégrale issue d'un point $(\tau, \xi) \epsilon E$ peut être prolongée à l'intervalle $\tau \leqslant t < \beta$.

Lemme 9. *Soient $M(p)$ et $M'(P)$ deux champs définis dans $W[a, \beta)$ tels que $M'(P) \subset M(P)$, E et E' deux ensembles tels que $E' \subset E \subset W[a, \beta)$. Alors, si la zone $Z^+(E, M)$ est régulière, la zone $Z^+(E', M')$ est encore régulière.*

---

[17]) Ce lemme est un cas particulier d'une proposition plus générale de A. Marchaud, *Sur les champs de demi-cônes et les équations différentielles du premier ordre*, Bull. de la Soc. Math. de France 52, 1934, p. 11. Cf. aussi S. K. Zaremba, loco cit.

En particulier, si $M(P)$ est un champ borné dans $W[a,\beta)$, la zone d'émission est toujours régulière.

La démonstration de ce lemme est immédiate.

On démontre aussi sans peine la proposition suivante, qui est d'ailleurs contenue sous une forme un peu différente dans le travail précité de S. K. Zaremba:

Lemme 10. *Soient: $M(P)$ un champ défini dans $W[a,\beta)$ et E un ensemble compact contenu dans $W[a,\beta)$. Alors, si la zone d'émission $Z^+(E,M)$ est régulière, elle est fermée relativement à $W[a,\beta)$ et l'ensemble $W[a,b]\cdot Z^+(E,M)$ est compact pour $a\leqslant b<\beta$.*

Lemme 11. *Soient, pour $i=1,2,\ldots$, $M_i(P)$ des champs définis dans $W[a,\beta)$ tels que $M_{i+1}(P)\subset M_i(P)$ et $M_0(P)=\prod_{i=1}^{\infty} M_i(P)$; soient E_i des ensembles compacts contenus dans $W[a,\beta)$ et tels que $E_{i+1}\subset E_i$. Posons $E_0=\prod_{i=1}^{\infty} E_i$ et admettons que la zone d'émission $Z^+(E_0,M_0)$ est régulière. Alors, pour tout nombre $\eta>0$:*

1° $Z^+(E_0,M_0)=\prod_{i=1}^{\infty} Z^+(E_i,M_i)$,

2° *à partir d'un i suffisamment grand, les zones d'émission $Z^+(E_i,M_i)$ sont régulières dans $W[a,b]$ et on a*

$$W[a,b]\cdot Z^+(E_i,M_i)\subset W[a,b]\cdot \bar{K}(Z_0,\eta),\quad \text{où}\quad Z_0=Z^+(E_0,M_0)\quad \text{et}\quad a\leqslant b<\beta.$$

Soit, en effet, $U=W[a,b]\cdot \bar{K}(Z_0,\eta)$.

Il est immédiat, d'après le lemme 10, que l'ensemble U est compact et que l'on a $E_i'=W[a,b]\cdot E_i\subset U$ pour les valeurs suffisamment élevées de i. Soit M^0 un pinceau fixe pour lequel $M_0(P)\underset{i}{\subset} M^0$ dans U; on a évidemment $M_i(P)\subset M^0$ dans U pour les i suffisamment grands. Nous allons montrer que $U_i=W[a,b]\cdot Z^+(E_i,M_i)\subset U$ à partir d'un certain i.

Dans le cas contraire, il existerait une suite $\{R_j\}$ de points et une suite $\{i(j)\}$ d'indices, où $j=1,2,\ldots$, pour lesquelles on aurait $R_j\in U_j$ et R_j non $\in U$. Il existerait aussi des intégrales C_j des champs $M_{i(j)}(P)$ joignant respectivement les points R_j aux points $P_j\in E_{i(j)}$. Chaque C_j contiendrait un point S_j de la frontière de U tel que la portion C_j' de C_j limitée par les points P_j et S_j serait contenue dans U. Comme U est compact, la suite des points $\{S_j\}$ aurait un point d'accumulation S. D'autre part, comme les champs $M_i(P)$ sont uniformément bornés dans U, les arcs P_jS_j satisferaient uniformément à la condition de Lipschitz et, par conséquent, on en pourrait extraire une suite partielle, conver-

gente vers un arc $C_0 \subset U$ joignant le point S à un point de E_0. D'après le lemme 7, l'arc C_0 serait une intégrale de chacun des champs $M_i(P)$ et, par suite, du champ $M_0(P)$. Mais c'est impossible car le point S n'appartient évidemment pas à $Z^+(E_0, M_0)$, de sorte que l'on a $U_i \subset U$ pour i suffisamment grand. Il s'ensuit que les zones d'émission $Z^+(E_i, M_i)$ sont, à partir d'un certain i, régulières dans $W[a,b]$. Il est ainsi démontré que la condition 2° est satisfaite.

Pour montrer que la condition 1° l'est également, supposons que $P \epsilon W[a,b]$ et P non ϵZ_0. Il existe donc un $\eta > 0$ tels que P non ϵU, d'où P non $\epsilon Z^+(E_i, M_i)$ pour i suffisamment grand et P non $\epsilon \prod_{i=1}^{\infty} Z^+(E_i, M_i)$. Ils s'ensuit que $\prod_{i=1}^{\infty} Z^+(E_i, M_i) \subset Z_0$. L'inclusion inverse est évidente.

Exemples. 1. Considérons l'équation différentielle $x' = x^2$ dans le domaine $W[0, +\infty) \subset X_{11}$. Cette équation admet l'intégrale générale $x = (c-t)^{-1}$ et l'intégrale singulière $x = 0$. La zone d'émission de l'origine est la partie positive de l'axe des t, tandis que celle du segment

$$t = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant q \tag{2}$$

contient la demi-droite $t = 1/q$, $x \geqslant 0$ et, par conséquent, n'est pas régulière.

Cet exemple montre bien que, sous les hypothèses du lemme 11, les zones d'émission $Z^+(E_i, M_i)$ ne sont pas nécessairement régulières dans $W[a, +\infty)$ tout entier. À savoir, nous prenons ici pour E_0 l'origine, pour E_i le segment (2) où $q = 1/i$, et nous admettons que tous les champs $M_0(P)$ et $M_i(P)$ sont identiques au champ d'éléments linéaires de l'équation considérée.

2. Voici encore un autre exemple dans $W[0, +\infty) \subset X_{11}$. Soient: $M_0(P)$ le champ constant d'éléments linéaires parallèles à l'axe des t et $M_i(P)$ le champ dont le pinceau se compose, pour $P = (t, x)$ de toutes les droites $\xi = \lambda(\tau + 1)$ où $0 \leqslant \lambda \leqslant (x^2 + 1)/i$.

Dans cet exemple, toutes les zones d'émission du champ limite sont régulières, tandis que celles des champs $M_i(P)$ ne sont jamais régulières dans $W[0, +\infty)$.

Les propositions analogues à celles que nous venons d'énoncer pour les zones d'émission sont vraies pour le zones d'absorption.

2,4. Soit $M(P)$ un champ défini dans un ensemble $D \subset X_{n1}$. Désignons par $\mathfrak{M}(P)$ le cône de sommet $P = (\tau, \xi)$ engendré par toutes les droites parallèles à celles appartenant à $M(P)$, par $\mathfrak{M}^+(P)$ la portion de $\mathfrak{M}(P)$ qui se compose de points (t, x) pour lesquels $t \geqslant \tau$, et par $\mathfrak{M}^-(P)$ le demi-cône opposé.

Une fonction $t=F(x)$ continue dans un ensemble ouvert $B\subset X_n$ sera dite *tranversale à* $M(P)$, lorsqu'elle satisfait aux trois conditions suivantes:

1° la surface $t=F(x)$, que nous désignons par Σ, est contenue dans D;

2° pour tout point $P\epsilon\Sigma$, le pinceau $M(P)$ contient à l'intérieur un élément linéaire parallèle à l'axe des t;

3° il existe deux fonctions $\delta(x)$ et $\vartheta(x)$, positives dans B et telles que, pour tout couple de points $x\epsilon B$ et $x'\epsilon \mathrm{k}(x,\delta(x))$, les ensembles de droites $\mathrm{Ct}(\Sigma,P')$ et $\mathrm{k}(P,\delta(x))$, où $P=(F(x),x)$ et $P'=(F(x'),x')$, sont disjoints.

Il en résulte en particulier que si nous nous bornons au voisinage suffisamment petit du point P, les portions des demi-cônes $\mathfrak{M}^-(P)$ et $\mathfrak{M}^+(P)$ sont situées des deux côtés de la surface Σ.

Fixons arbitrairement un vecteur v de longueur 1 situé dans X_n et désignons par $\Pi(x)$ le demi-plan

$$\xi=x+vs, \quad -\infty<t<+\infty, \quad s\geqslant 0.$$

Les points (t,ξ) du demi-plan $\Pi(x)$ sont déterminés par les valeurs de t et de s. Lorsque le point $P=(F(x),x)$ appartient à Σ, le demi-plan $\Pi(x)$ coupe les surfaces de $\mathfrak{M}^+(P)$ et $\mathfrak{M}^-(P)$ suivant les demi-droites

$$t=a^+(x)s \quad \text{et} \quad t=a^-(x)s,$$

où $s\geqslant 0$. Les coefficients $a^+(x)$ et $a^-(x)$ sont des nombres finis qui dépendent en général de x et de v.

La proposition suivante est une conséquence de la définition de la notion de fonction transversale:

Lemme 12. *Pour qu'une fonction $F(x)$ définie dans un ensemble ouvert $B\subset X_n$ soit transversale à un champ $M(P)$ défini dans $D\subset X_{n+1}$, il faut et il suffit que la surface $t=F(x)$ soit contenue dans D et qu'il existe deux fonctions $\delta(x)$ et $\vartheta(x)$, positives dans B et telles que l'on ait indépendamment du choix de v:*

$$a^-(x)+\vartheta(x)<\partial_v^- F(x')\leqslant\partial_v^+ F(x')<a^+(x)-\vartheta(x), \tag{3}$$

pour $x\epsilon B$ et $x'\epsilon B\cdot \mathrm{k}(x,\delta(x))$.

La condition est évidemment nécessaire. Nous allons montrer qu'elle est aussi suffisante. En effet, soit $\varepsilon>0$, $M_1(P)=\mathrm{k}(M(P),\varepsilon)$ et $M_2(P)=\mathrm{k}(M(P),2\varepsilon)$. Désignons par $a_2^-(x)$ et $a_2^+(x)$ les coefficients analogues à $a^-(x)$ et $a^+(x)$, mais relatifs au champ $M_2(P)$. Le point x étant fixe, on peut choisir le nombre $\varepsilon>0$ de façon que l'on ait $a_2^-(y)<a^-(y)+\vartheta(y)$ et $a_2^+(y)>a^+(y)-\vartheta(y)$ pour $y\epsilon \mathrm{k}(x,\delta(x))$. Supposons

que $y \epsilon \mathrm{k}(x, \delta(x)/2)$. S'il existait une droite commune aux ensembles $\mathrm{Ct}(\Sigma, Q)$ et $M_1(P)$, où $Q = (F(y), y)$, alors il existerait un point $z \epsilon \mathrm{k}(x, \delta(x))$ tel que la corde QR, où $R = (F(z), z)$, serait parallèle à une droite appartenant à $M_2(P)$ et, par conséquent, le segment yz contiendrait un point x' pour lequel les inégalités (3) seraient en défaut. Les ensembles $\mathrm{Ct}(\Sigma, Q)$ et $M_1(P)$ sont donc disjoints, d'où la suffisance de la condition.

Il est facile de démontrer, en utilisant le théorème de Borel-Lebesgue, que les fonctions $\delta(x)$ et $\vartheta(x)$ peuvent être choisies de manière que leurs bornes inférieures soient positives sur tout ensemble compact contenu dans B. Ceci étant, on déduit du lemme 5 de **1,6** les deux suivants:

Lemme 13. *Si une fonction $F(x)$, définie dans un ensemble ouvert $B \subset X_n$, est transversale à un champ $M(P)$ défini dans un ensemble ouvert $D \subset X_{n_1}$, il existe dans B une fonction analytique $G(x)$ qui est encore transversale à $M(P)$.*

Lemme 14. *Soient: $F(x)$ une fonction vérifiant les hypothèses du lemme 13, $\omega(x)$ un vecteur de longueur 1, $\beta(x)$ et $\gamma(x)$ deux fonctions positives dans B, dont les bornes inférieures sont positives sur tout sous-ensemble compact de B. Admettons que $\partial^-_{\omega(x)} F(x') > \gamma(x)$ pour $x' \epsilon \mathrm{k}(x, \beta(x))$. Alors, il existe une fonction $G(x)$, analytique dans B et transversale à $M(P)$, dont les dérivées partielles du premier ordre ne s'annulent simultanément en aucun point de l'ensemble B.*

2,5. Lemme 15. *Soient: $M(P)$ un champ défini dans $W(\mathrm{a}, \beta)$ et $F(x)$ une fonction définie dans l'espace X_n tout entier, transversale au champ $M(P)$. Désignons par Σ l'hypersurface $t = F(x)$ et par $\mathbf{F}$ l'ensemble des points (t, x) pour lesquels $F(x) \leqslant t < \beta$. Alors, si P est un point quelconque de l'hypersurface Σ, la zone d'émission $Z^+(P, M)$ est, à l'exception du point P, contenue dans l'intérieur de $\mathbf{F}$ et la zone d'absorption $Z^-(P, M)$ est, à l'exception de P, située à l'extérieur de $\mathbf{F}$.*

En effet, il est immédiat, d'après la définition d'une fonction transversale, qu'il existe un champ constant M_0 tel qu'on a $M(P) \underset{i}{\subset} M_0$ localement dans certain voisinage du point P, et les demi-cônes $\mathfrak{M}_0^+$ et $\mathfrak{M}_0^-$ de sommet P, qui correspondent au champ M_0, sont situés à l'intérieur et à l'extérieur de l'ensemble $\mathbf{F}$ respectivement. En vertu du lemme 6 de **2,2**, la zone d'émission $Z^+(P, M)$ est localement contenue dans l'intérieur de $\mathfrak{M}_0^+$ et la zone d'absorption $Z^-(P, M)$ l'est dans l'intérieur de $\mathfrak{M}_0^-$ (à l'exception du point P). S'il existait donc un point $P' \neq P$ appartenant à $Z^+(P, M)$ sans appartenir à l'intérieur de $\mathbf{F}$, il existerait aussi une intégrale du champ $M(P)$ contenue dans $\mathbf{F}$ et

joignant le point P à un point de l'hypersurface Σ. Mais c'est impossible d'après ce qui vient d'être établi. On voit pareillement que $Z^-(P, M)$ reste à l'extérieur de $\mathbf{F}$.

Lemme 16. *Soient $M(P)$ et $M'(P)$ des champs définis dans un ensemble ouvert $D \subset X_{n_1}$. Admettons que $M(P) \underset{i}{\subset} M'(P)$, que $M'(P)$ est continu dans D et que P_0 est un point frontière de la zone d'émission $Z^+(E, M')$, où $E \subset D$. Alors:*

1° *$Z^+(P_0, M)$ est située à l'intérieur de $Z^+(E, M')$ à l'exception de P_0,*

2° *$Z^-(P_0, M)$ est située à l'extérieur de $Z^+(E, M')$ à l'exception de P_0.*

En effet, il existe d'après **1,2**, pour tout point $P_0 \epsilon D$, un $\delta > 0$ et un pinceau M_0 tels que $M(P) \underset{i}{\subset} M_0 \underset{i}{\subset} M'(P)$ pour $P \epsilon K(P_0, 2\delta)$. Il s'ensuit d'après le lemme 6 que

$$(4) \quad K(Q, \delta) \cdot Z^+(Q, M) \underset{i}{\subset} K(Q, \delta) \cdot Z^+(E, M') \quad \text{pour} \quad Q \epsilon K(P_0, \delta) \cdot Z^+(E, M'),$$

à l'exception du point Q.

Supposons qu'une intégrale C du champ $M(P)$ partant du point $R \epsilon Z(E, M')$ pour t croissant ne soit pas contenue dans l'intérieur de $Z^+(E, M')$, et désignons par P_0 le premier point de cette intégrale, différent de R et appartenant à la frontière de $Z^+(E, M')$. Soit Q un point situé sur l'intégrale C, précédant P_0 et pour lequel on a $|Q, P_0| < \delta$. Or, d'après (4), le point P_0 appartient à l'intérieur de $Z^+(E, M')$. Cette contradiction montre que $Z^+(R, M) \underset{i}{\subset} Z^+(E, M')$ pour $R \epsilon Z^+(E, M')$.

La seconde partie du lemme 16 en résulte immédiatement.

2,6. Soient: $M(P)$ un champ défini dans un ensemble ouvert $D \subset X_{n_1}$ et $\boldsymbol{U}$ une transformation biunivoque définie sur D par les équations

$$(5) \quad \begin{aligned} s &= \Lambda(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_\nu &= \Gamma_\nu(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{où} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

dont les membres droits sont analytiques et dont le jacobien est partout non nul. Désignons par l la droite

$$\tau = \varkappa u_0, \quad \xi_\nu = \varkappa u_\nu \quad \text{où} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

et considérons une transformation linéaire $\boldsymbol{U}^*$ définie dans l'espace des droites issues du point $(-1, 0, 0, \ldots, 0)$ et qui fait correspondre à l la droite m:

$$\sigma = \lambda v_0, \qquad \eta_\mu = \lambda v_\mu,$$

où $\mu=1,2,\ldots,n$ et où les coefficients v_μ sont définis par les égalités

$$(6)\qquad v_0=\frac{\partial\Lambda(t,x)}{\partial t},\quad v_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial\Gamma_\mu(t,x)}{\partial x_\nu}u_\nu+\frac{\partial\Gamma_\mu(t,x)}{\partial t}.$$

Soit $M_U(Q)$ un champ défini dans UD de la façon suivante:

$$M_U(Q)=U^*M(P)\quad\text{pour}\quad Q=UP\quad\text{où}\quad P=(t,x).$$

On voit facilement que

$$\mathrm{Pt}(UE,UP)=U^*\mathrm{Pt}(E,P)\quad\text{et}\quad\mathrm{Ct}(UE,UP)=U^*\mathrm{Ct}(E,P)$$

pour $E\subset D$ et $P\epsilon E$. Il s'ensuit que C étant une intégrale du champ $M(P)$, la courbe transformée UC est une intégrale du champ transformé $M_U(P)$ [18]).

2,7. Admettons que les membres droits des équations différentielles

$$(7)\qquad \xi'_\nu=f_\nu(\tau,\xi)\quad\text{où}\quad\nu=1,2,\ldots,n$$

sont analytiques dans $\mathrm{W}[0,+\infty)$ et que tout point (t,x) appartenant à $\mathrm{W}[0,+\infty)$ est situé sur une intégrale du système (7)

$$\xi=\psi(\tau;t,x)$$

définie dans l'intervalle $0\leqslant\tau<+\infty$, où $x=\psi(t;t,x)$.

Cela posé, la transformation U:

$$s=t,\quad y=\psi(0;t,x)$$

est analytique dans $\mathrm{W}[0,+\infty)$, possède le jacobien non nul dans $\mathrm{W}[0,+\infty)$ et transforme toutes les intégrales du système (7) en demi-droites parallèles à l'axe des t:

$$U\mathrm{W}[0,+\infty)=\mathrm{W}[0,+\infty).$$

Il est en outre évident que $M(P)$ étant un champ dans $\mathrm{W}[0,+\infty)$, les zones d'émission et d'absorption sont invariantes par rapport à la transformation U.

Chapitre 3

3,1. Théorème I. *$M(P)$ étant un champ défini dans un ensemble $\mathrm{W}[a,\beta)\subset X_{n1}$ et la zone d'émission $Z^+(P_0,M)$ du point $P_0=(a,x_0)$ étant régulière, soient: M_0 un pinceau quelconque contenant $M(P_0)$ et η un nombre positif. Alors il existe une suite d'ensembles C_i, où $i=1,2,\ldots$, telle que:*

1° C_i est, pour tout i, un continu relatif à l'ensemble $\mathrm{W}[a,\beta)$, on a $C_i\subset\mathrm{W}[a,\beta)$ et l'intérieur de C_i est homéomorphe à une sphère à $n+1$ dimensions;

[18]) Cf. G. Bouligand, op. cit., p. 66 et 73.

2° *il existe pour tout i un voisinage K_i du point P_0 tel que $\mathfrak{M}_0^+ \cdot K_i \subset C_i \cdot K_i$ et $C_i \cdot K_i \subset \mathfrak{M}_\eta^+ \cdot K_i$, où $\mathfrak{M}_0^+$ est un demi-cône de sommet P_0 correspondant au champ M_0 et où $\mathfrak{M}_\eta^+$ est un demi-cône de sommet P_0 correspondant au champ $\bar{\mathrm{k}}(M_0, \eta)$* (cf. **2,4**);

3° *on a, à l'exception du point P_0, $Z^+(P_0, M) \underset{i}{\subset} C_i$ et $C_{i+1} \underset{i}{\subset} C_i$ pour $i = 1, 2, \ldots$;*

4° $\prod_{i=1}^{\infty} C_i = Z^+(P_0, M)$;

5° *si le point $P \epsilon W[a, \beta)$ appartient à la frontière de C_i la zone $Z^+(P, M)$ est contenue à l'intérieur de C_i, et la zone $Z^-(P, M)$ l'est à l'extérieur de C_i, à l'exception du point P;*

6° *les points frontières de C_i qui appartiennent à $W[a, \beta)$ forment une hypersurface analytique n'admettant qu'un seul point singulier P_0* [19]).

3,2. Démonstration. Nous pouvons admettre que

$$a = 0, \quad \beta = +\infty, \quad P_0 = (0, 0, \ldots, 0) \quad \text{et} \quad M(P_0) = M_0.$$

Sinon il suffirait de modifier au point P_0 le champ donné et de le soumettre à une transformation convenable, conformément aux remarques de **2,6**. Appliquons au champ $M(P)$ le lemme 4 de **1,5**, en posant $A = X_{n1}$ et $B = W[0, +\infty)$. Soit $E_i = Z^+(P_0, M_i)$. On a $\prod_{i=1}^{\infty} E_i = E = Z^+(P_0, M)$ en vertu du lemme 11 de **2,3**, et $E_{i+1} \underset{i}{\subset} E_i$ à l'exception du point P_0 d'après le lemme 16 de **2,5**.

Soit j un entier positif quelconque. À partir d'une certaine valeur i_j de l'indice i, les zones d'émission E_i sont, d'après le lemme 11, régulières dans $W[0, j]$ et l'on a $E_i \cdot W[0, j] \subset K \cdot W[0, j]$, où $K = \bar{\mathrm{k}}(E, 1)$. Nous pouvons évidemment admettre que $i_j = j$.

Posons $E'_i = E_i + W[i, +\infty)$, pour $i = 1, 2, \ldots$ Tout E'_i est un continu et l'on a

$$\prod_{i=1}^{\infty} E'_i = E, \qquad E_{i+1} \underset{i}{\subset} E_i,$$

à l'exception du point P_0. On démontre sans peine, en s'appuyant sur le lemme 16 de **2,5**, que $Z^+(P, M)$ et $Z^-(P, M)$ sont, lorsque le point P appartient à la frontière de E'_i, situés respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de E'_i, exception faite du point P. Les ensembles E'_i jouant le rôle des C_i, satisfont donc aux conditions 3°, 4°, 5° et à

[19]) On peut évidemment formuler un théorème analogue relatif aux zones d'absorption. La même remarque se rapporte aux autres théorèmes de ce Chapitre.

la première partie de la condition 2°. Quant à la seconde partie de cette condition, elle est évidemment satisfaite à partir d'un certain indice i.

Désignons par Σ_i la frontière de E'_i, dépourvue de P_0. Soient: R un point de Σ_i et $r(R)$ le minimum des distances entre le point R et les surfaces Σ_j où $j \neq i$. Soit ensuite T l'élément linéaire parallèle à l'axe des t. Il est facile de montrer qu'il existe un nombre $r'(Q)$ tel que toute intégrale du champ $M_{i+1}(P) \hat{+} \bar{\mathrm{k}}(T,1)$ partant d'un point du voisinage $K(Q, r'(Q))$, où Q est un point situé dans l'hyperplan $t=i$, peut être prolongée jusqu'à cet hyperplan. Soit encore $r''(R)$ la réciproque de la distance du point R à l'origine. Posons

$$\varrho(R) = \begin{cases} \min\,[r(R), 1] & \text{si } R \epsilon K, \\ \min\,[r(R), r'(R), r''(R)] & \text{si } R \text{ non} \epsilon K. \end{cases}$$

Désignons enfin par H_i la somme de tous le voisinages $K(R, \varrho(R)/6)$ et par H'_i celle de tous les voisinages $K(R, \varrho(R)/3)$ de rayons doubles, où $R \epsilon \Sigma_i$. Il est évident que les H'_i sont disjoints pour les valeurs différentes de l'indice i et que

$$\Sigma_i \underset{i}{\subset} H_i \underset{i}{\subset} H'_i \subset \mathrm{W}(0, +\infty) \quad \text{pour } i = 2, 3, \ldots$$

Fixons maintenant l'indice i et considérons la fonction $u(P)$ continue et non négative dans X_{n1}, égale à 1 dans $H = H_i + \mathrm{K}(E, 1)$ et nulle en dehors de $H' = H'_i + \mathrm{K}(E, 2)$. Désignons par T_1 le pinceau $\bar{\mathrm{k}}(T, 1)$. L'agrégat de champs

$$M'(P) = u(P) M_{i+1}(P) + (1 - u(P)) T_1$$

est un champ continu d'après le lemme 2 de **1,3** et on a

$$M'(P) = \begin{cases} M_{i+1}(P) & \text{dans } H, \\ M'(P) = T_1 & \text{en dehors de } H'. \end{cases}$$

Il est presque immédiat que les intégrales du champ $M'(P)$ sont définies dans l'intervalle $-\infty < t < +\infty$, car l'intégrale définie dans l'intervalle $\alpha < t < \beta < +\infty$ par exemple, et qui s'éloignerait vers l'infini pour t tendant vers β, serait évidemment située en dehors de H', donc bornée pour t assez voisin de β, d'où la contradiction.

En vertu de la dernière proposition de **1,2**, le centre $M^c(P)$ du champ $M'(P)$ est un champ continu d'éléments linéaires. L'équation au paratingent correspondant à ce champ est équivalente à un système d'équations différentielles

$$x'_\nu = f_\nu(t, x) \quad \text{où} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

Les seconds membres de ces équations sont des fonctions continues dans $W[0,+\infty)$. D'après le théorème de Whitney (voir p. 57), il existe donc des fonctions analytiques $g_\nu(t,x)$, où $\nu=1,2,\ldots n$, satisfaisant dans $W[0,+\infty)$ aux inégalités

$$|g_\nu(t,x)-f_\nu(t,x)|<\varepsilon(t,x),$$

où $\varepsilon(t,x)$ est une fonction positive et continue dans $W[0,+\infty)$, d'ailleurs quelconque. Nous pouvons choisir $\varepsilon(t,x)$ de façon que le champ d'éléments linéaires du système des équations différentielles

$$x'_\nu=g_\nu(t,x) \tag{1}$$

soit contenu dans l'intérieur du champ $M'(P)$.

Soit U une transformation analytique fournie par le système (1) comme celle de **2,7**. En conservant les notations de **2,6**, on a:

$$T\subset M'_U(P), \tag{2}$$

$$M_U(P)\underset{i}{\subset} M_{i+1,U}(P)\underset{i}{\subset} M_{i,U}(P), \tag{3}$$

$$M'_U(P)=M_{i+1,U}(P) \text{ dans } UH_i, \tag{4}$$

$$UE'_i=UE_i+W[i,+\infty), \text{ où } i=2,3,\ldots \tag{5}$$

3,4. Nous désignerons, pour simplifier les notations, les figures transformées UE'_i, $U\Sigma_i$, $M_U(P)$ etc. par E'_i, Σ_i, $M(P)$ etc. respectivement.

Nous distinguerons deux catégories des points de Σ_i, à savoir ceux appartenant à la frontière de E_i et les autres.

Désignons par $d(x)$ la demi-droite parallèle à l'axe des t, contenue dans $W[0,+\infty)$ et partant du point $(0,x)$. Soit $N(x)$ l'ensemble des points communs de $d(x)$ et E'_i. Nous montrerons que, (t_0,x) étant un point de $N(x)$, tous les points (t,x) où $t\geqslant t_0$ appartiennent à $N(x)$. En effet, lorsque $t_0\geqslant i$, il en est ainsi en vertu de (5). Si, au contraire, $t_0<i$, le point (t_0,x) appartient à E_i. Or, $d(x)$ est d'après (2) une intégrale du champ $M'(P)$ et, d'autre part, d'après (3) et (4), $M'(P)$ est contenu dans $M_i(P)$ au voisinage du point (t_0,x). Il s'ensuit que $d(x)$ est une intégrale du champ $M_i(P)$ pour tout t du segment $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, où t_1 est suffisamment proche de t_0. Par conséquent $d(x)$ est situé dans E_1 pour $t_0\leqslant t\leqslant t_1$. L'ensemble $N(x)$ étant fermé, il est évident que les points (t,x), où $t>t_0$, appartiennent à $N(x)$.

Ainsi, la surface Σ_i peut être représentée par l'équation $t=F(x)$, où $F(x)$ est une fonction définie sur X_n.

Or, $F(x)$ est une fonction transversale au champ $M(P)$. En effet, soit P_0 un point de la frontière de E_i (pour les autres points de Σ_i la

proposition étant manifeste). En vertu de (3), il existe un $\vartheta > 0$ et un $\delta > 0$ tels que $\bar{k}(M_{i+1}(P_0), 2\vartheta) \subset M_i(P)$ pour $P \epsilon K(P_0, 2\delta)$. Soient: L un élément linéaire de $\bar{k}(M_{i+1}(P_0), \vartheta)$ et $Q \epsilon K(P_0, \delta)$. On a

$$\bar{k}(L, \vartheta) \subset \bar{k}(M_{i+1}(P_0), 2\vartheta) \subset M_i(P)$$

pour $P \epsilon K(Q, \delta)$. Le demi-cône $\mathfrak{L}$ de sommet Q appartenant au champ $k(L, \vartheta)$ (cf. **2,4**) est contenu localement dans $Z^+(Q, M_i)$ et dans E_i'. Mais cela implique que L n'appartient pas à $Ct(\Sigma_i, Q)$; par conséquent, les ensembles de droites $Ct(\Sigma_i, Q)$ et $\bar{k}(M_{i+1}(P_0), \vartheta)$ sont disjoints. Ainsi, la fonction $F(x)$ est transversale au champ $M(P)$.

Comme transversale à un champ, la fonction $F(x)$ est lipschitzienne, donc continue. L'intérieur de l'ensemble E_i' est donc homéomorphe à la sphère ouverte à $n+1$ dimensions. La condition 1° est ainsi réalisée pour les ensembles transformés; cela suffit d'ailleurs, car *toutes les conditions* 1°—6° *sont invariantes par rapport à la transformation* U.

3,5. Il nous reste à démontrer que les ensembles E_i' peuvent être modifiés de façon que la condition 6° soit satisfaite, tout en conservant les propriétés déjà établies. À cet effet, appliquons le lemme 13 de **2,4** à la fonction $F(x)$ envisagée dans l'espace X_n sans l'origine P_0, et au champ $M_{i+1}(P)$ envisagé dans l'ensemble H_i (les notations concernant toujours les ensembles et les champs *transformés).* Il existe, d'après le lemme, une fonction analytique $G(x)$ qui est transversale au champ $M_{i+1}(P)$ dans $X_n - P_0$. La surface $t = G(x)$ étant contenue dans H_i, nous pouvons compléter la définition de $G(x)$ en posant $G(0) = 0$. On constate sans peine que la fonction $G(x)$ ainsi prolongée ne cesse pas d'être continue et transversale à $M_{i+1}(P)$; cependant elle n'est plus analytique à l'origine.

Soit Γ_i un ensemble de points (t, x) tels que $t \geqslant G(x)$. En vertu du lemme 13 de **2,5**, le continu Γ_i satisfait à la condition 5° relativement au champ $M_{i+1}(P)$ et, de même, relativement à $M(P)$. Désignons par C_i, où $i = 2, 3, \ldots$, l'image réciproque de Γ_i:

$$C_i = U^{-1} \Gamma_i.$$

On vérifie facilement que les conditions 1°-6° subsistent pour ces continus. Le théorème est ainsi démontré.

3,6. Soit $M(P)$ un champ satisfaisant aux hypothèses du théorème I et contenu dans l'intérieur d'un champ continu $M'(P)$ tel que la zone d'émission $Z^+(P_0, M')$ est régulière dans $W[a, \beta)$. Il existe alors une suite d'ensembles C_i satisfaisant aux conditions 2°-6° du théorème I et à la condition que les ensembles $C_i \cdot W[a, b]$, où $a < b < \beta$ et $i = 1, 2, \ldots$, soient des continus bornés.

La démonstration est semblable à celle du théorème I, mais plus simple. En particulier, on y posera $M_i(P) \subset M'(P)$ et $E'_i = E_i$.

Le théorème I peut être remanié de façon qu'au lieu du point P_0 on y considère un ensemble de points sur l'hyperplan $t = a$; les conditions 2^0-4^0 et 6^0 doivent cependant être convenablement modifiées.

3,7. Théorème II. *Soient: $M(P)$ un champ défini dans $W[a, \beta)$, $P_0 = (a, x_0)$, C_i une suite d'ensembles, K_i une suite de voisinages du point P_0 et η_i une suite de nombres positifs satisfaisant, pour $i = 1, 2, \ldots$, aux conditions suivantes:*

1^0 $C_i \subset W[a, \beta)$,

2^0 $K_i \cdot \bar{k}(M(P_0), \delta_i) \subset K_i \cdot C_i$,

3^0 $C_{i+1} \subset C_i$,

4^0 $\prod_{i=1}^{\infty} C_i = C_0$,

5^0 *$P' = (t', x')$ étant un point de la frontière de C_i, il existe, pour toute intégrale I du champ $M(P)$ issue du point P', un intervalle $t' \leqslant t \leqslant t''$ tel que la portion de I qui correspond à cet intervalle est contenue dans C_i.*

Sous ces conditions, on a $Z^+(P_0, M) \subset C_0$.

La démonstration est immédiate.

3,8. Théorème III. *Soient: $M(P)$ un champ défini dans $W[a, \beta)$. et I_0 une intégrale particulière $x = \varphi(t)$ du champ $M(P)$ partant du point $P_0 = (a, x_0)$ et définie dans l'intervalle $a \leqslant t < \beta$. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour l'unicité de l'intégrale I_0 est la suivante: ϑ et η étant des nombres positifs quelconques, il existe une suite $\{C_i\}$ d'ensembles et une suite $\{K_i\}$ de voisinages du point P_0 telle que:*

1^0 *$C_i \subset W[a, \beta)$, C_i étant un continu relatif au domaine $W[a, \beta)$ et l'intérieur de C_i étant homéomorphe à une sphère ouverte à $n+1$ dimensions;*

2^0 *$\mathfrak{M}^+_{\vartheta}(P_0) \cdot K_i \subset C_i \cdot K_i \subset \mathfrak{M}^+_{\vartheta\eta}(P_0) \cdot K_i$, où $\mathfrak{M}^+_{\vartheta}$ est le demi-cône de sommet P_0 relatif au champ $\bar{k}(M(P_0), \vartheta)$ et $\mathfrak{M}^+_{\vartheta\eta}$ en est un relatif au champ $\bar{k}(M(P_0), \vartheta + \eta)$;*

3_0 *$I_0 \underset{i}{\subset} C_{i+1} \underset{i}{\subset} C_i$, à l'exception du point P_0;*

4^0 $\prod_{i=1}^{\infty} C_i = I_0$;

5^0 *P étant un point frontière de l'ensemble C_i, on a $Z^+(P_0, M) \underset{i}{\subset} C_i$ et la zone $Z^-(P_0, M)$ est en dehors de C_i, à l'exception de P;*

6° *les points frontières des C_i appartenant à $W[a,\beta)$ forment une surface analytique n'ayant qu'un seul point singulier P_0.*

Ce théorème est une conséquence immédiate des théorèmes I et II.

Remarques. Le théorème III donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale I_0 ne se ramifie pas pour les valeurs croissantes de la variable t; il n'est pourtant pas exclu que cette intégrale se ramifie pour les valeurs décroissantes de t. Il est évidemment possible de formuler une condition analogue, nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale du champ $M(P)$ définie dans le domaine $W(a,b]$, où $a<x\leqslant b$, et partant du point $P_0=(b,x_0)$ ne se ramifie pas pour t décroissant; il suffit d'intervertir dans le théorème III les rôles des zones d'émission et d'absorption.

Les autres propositions énoncées dans ce Chapitre sont d'ailleurs susceptibles des modifications analogues.

Il faut souligner le rôle important de l'inclusion $\mathfrak{M}_{\vartheta}^{+}(P_0)\cdot K_i\subset C_i\cdot K_i$; sans cette restriction les conditions 1°-6° ne suffiraient pas pour l'unicité de l'intégrale I_0.

Dans le théorème III, c'est la nécessité de la condition qui est intéressante, sa suffisance étant manifeste. Par contre, M. T. Ważewski a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour l'unicité des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires, où la démonstration de leur suffisance constitue la difficulté essentielle du problème [20]).

Si le champ $M(P)$ est à l'intérieur d'un autre champ $M'(P)$ qui est continu dans $W[a,\beta)$ et dont la zone d'émission $Z^{+}(P_0,M')$ est régulière, on peut remplacer la condition 1° par celle que les ensembles $C_i\cdot W[a,b]$ soient des continus bornés pour tout b (cf. 3,6). On peut cependant montrer par un exemple que, pour $n\geqslant 3$, cette nouvelle condition exclut, en général, la condition 1°, et cela même dans le cas particulier d'un système d'équations différentielles ordinaires.

S'il s'agit d'un champ $M(P)$ défini dans $W[a,b]$, où $a\leqslant t\leqslant b<+\infty$, on peut remplacer dans le théorème III la condition 1° par celle que C_i soient des continus bornés situés dans $W[a,b]$, et la condition 4° — par celle que la suite $\{C_i\}$ converge uniformément vers l'intégrale I_0 [21]). On peut même atteindre, par une modification convenable de la construction des ensembles C_i, qu'ils soient homéomorphes à la sphère

[20]) T. Ważewski, *Zur Theorie des Unitätsproblems für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Math. Zeitschr. 35, 1932, p. 553-562.

[21]) La démonstration résulte du théorème III; il suffit de prolonger le champ considéré à l'espace X_{n1} tout entier. La démonstration directe est cependant plus simple.

fermée à $n+1$ dimensions. Je renonce ici à la démonstration, qui ne présente d'ailleurs de difficultés essentielles.

On peut encore formuler un théorème analogue pour des champs définis, par exemple, dans un intervalle spacial $a \leqslant t \leqslant b$, $a_\nu \leqslant x_\nu \leqslant b_\nu$, où $\nu = 1,2,\ldots,n$, ou bien dans un voisinage fermé de l'intégrale particulière, en profitant du fait que le champ donné $M(P)$ peut être prolongé au delà de son domaine d'existence, grâce au lemme 4 de **1,5**.

Énonçons enfin une modification du théorème III concernant le cas du champ $M(P)$ continu au point P_0. Dans ce cas, $M(P_0)$ est un élément linéaire L puisque, s'il n'en était pas ainsi, il existerait une infinité d'intégrales issues du point P_0. Alors, on peut donner à la condition 2° la forme suivante:

$$\mathfrak{L}^+_{\vartheta_i}(P_0)\cdot K_i \subset C_i\cdot K_i \subset \mathfrak{L}^+_{\vartheta_i\eta_i}(P_0)\cdot K_i,$$

où $\{\vartheta_i\}$ et $\{\eta_i\}$ sont des suites décroissantes de nombres positifs arbitrairement choisies, les symboles $\mathfrak{L}^+_{\vartheta_i}$ et $\mathfrak{L}^+_{\vartheta_i\eta_i}$ désignant les demi-cônes relatifs aux champs $\bar{\mathrm{k}}(L,\vartheta_i)$ et $\bar{\mathrm{k}}(L,\vartheta_i+\eta_i)$ respectivement. La démonstration exige une modification, assez simple d'ailleurs, du raisonnement de **3,2**.

En admettant que $M(P)$ est un champ d'éléments linéaires, on tire du théorème III et de ses modifications, comme conséquences directes, des théorèmes concernant les systèmes d'équations différentielles ordinaires

$$x'_\nu = f_\nu(t,x_1,x_2,\ldots,x_n), \quad \text{où} \quad \nu = 1,2,\ldots,n,$$

dont les membres droits sont continus dans un domaine.

3,9. Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème II. Envisagé comme condition suffisante pour l'unicité de l'intégrale I_0, il est d'une portée plus grande que le théorème III.

Théorème IV. *Soient: $M(P)$ un champ défini dans $\mathrm{W}[a,\beta)$ et I_0 une intégrale de ce champ, définie dans l'intervalle $a \leqslant t < \beta$ et partant du point $P_0 = (a,x_0)$. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que toute intégrale issue du point P_0 soit contenue dans I_0 est la suivante:*

Il existe une suite $\{C_i\}$ d'ensembles, une suite $\{K_i\}$ de voisinages du point P_0 et une suite $\{\delta_i\}$ de nombres tels que

1° $C_i \subset \mathrm{W}[a,\beta)$;

2° $K_i \cdot \bar{\mathrm{k}}(M(P_0),\delta_i) \subset C_i \cdot K_i$;

3° $C_{i+1} \subset C_i$;

4° $\prod_{i=1}^{\infty} C_i = C_0$;

5° *les intégrales du champ $M(P)$ issues des points frontières de C_i sont, pour t croissant, localement contenues dans C_i.*

3,10. Théorème V. *Soit $M(P)$ un champ défini dans le domaine ouvert $W(a,\beta)$, où $a<t<\beta$, et borné dans un voisinage du point $P_0=(a,x_0)$. Admettons encore que l'arc C_0*

$$x=\varphi(t), \quad \text{où} \quad a\leqslant t<\beta,$$

est une intégrale du champ $M(P)$ pour $a<t<\beta$ et satisfait à l'égalité $\varphi(a)=x_0$.

Alors, pour que toute intégrale du champ $M(P)$ pénétrant jusqu'au point P_0 soit une partie de C_0, il faut et il suffit qu'il existe une suite $\{C_i\}$ d'ensembles satisfaisant aux conditions 1° *et* 3°-6° *du théorème* III *et en outre à la condition suivante:*

2′ *pour toute valeur de l'indice i, il existe un voisinage K_i du point P_0 tel que $K_i\cdot W(a,\beta)\subset C_i$.*

Dans la démonstration, on fixera d'abord un pinceau M_0 pour lequel on a $M(P)\subset M_0$ dans un voisinage du point P_0 et on posera, dans ce voisinage, $M(P)=M_0$ sur l'hyperplan $t=a$. Le champ ainsi prolongé satisfait aux hypothèses du théorème III dans le voisinage de P_0. La suite de la démonstration est semblable à celle du théorème III.

On démontre encore sans peine le suivant

Théorème VI. *Dans les conditions du théorème précédent, il est nécessaire* (mais pas suffisant) *pour l'unicité de l'intégrale C_0 qu'il existe une suite $\{C_i\}$ d'ensembles satisfaisant aux conditions* 1° *et* 3°-6° *du théorème III et, en outre, à la condition* 2° *du théorème I, où η est un nombre positif arbitraire et M_0 est un champ fixe contenant $M(P)$ pour les points assez voisins à P_0.*

Lorsque C_0 admet une tangente au point P_0, ces conditions sont suffisantes pour que C_0 soit la seule intégrale du champ $M(P)$ pénétrant jusqu'au point P_0, avec une tangente parallèle à une droite intérieure au pinceau M_0.

3,11. Dans les théorèmes V et VI, la condition que $M(P)$ soit borné dans un voisinage de P_0 est essentielle. Considérons, en effet, l'équation différentielle

$$x'=\frac{-\frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}-\frac{1}{t^3}\cos\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+1}{\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}+\frac{1}{t}+t}\,x \tag{6}$$

dans le domaine $0<t<+\infty$, $-\infty<x<+\infty$.

Les intégrales de l'équation (6) sont de la forme

$$x = c\left(\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t} + \frac{1}{t} + t\right). \tag{7}$$

Désignons par C_0 l'intégrale particulière $x=0$. Il est évident que C_0 est la seule intégrale pénétrant jusqu'à l'origine. Supposons qu'il existe une suite de continus satisfaisant aux conditions du théorème IV (moins restrictives que celles du théorème VI). Pour i fixe, le continu C_i doit renfermer le segment $x=ct$, où $0 \leqslant t \leqslant t'$ et $c>0$. Il y a sur ce segment une suite de points convergeant vers l'origine et appartenant à l'intégrale particulière qui correspond à la constante c. La condition 5° exige que cette intégrale soit contenue dans C_i. Cependant, c'est impossible puisque toute intégrale (7) qui correspond à une valeur positive de c s'accumule sur la partie positive de l'axe des x pour $t \to 0$.

Chapitre 4

4,1. Ce Chapitre est consacré à l'étude du cas particulier où $n=2$. On verra qu'il est possible dans ce cas de modifier le théorème III de 3,8 en imposant aux ensembles C_i la restriction supplémentaire suivante: leurs intersections avec les plans perpendiculaires à l'axe des t sont des circuits réguliers simples.

Les raisonnements qui suivent étant assez longs, nous n'en donnerons que l'idée générale, en laissant de côté la discussion détaillée des passages plus faciles.

4,2. $M(P)$ étant un champ défini dans le domaine $W[0,+\infty) \subset X_{2,1}$, soit I_0 une intégrale $x=\varphi(t)$ du champ $M(P)$ définie dans l'intervalle $0 \leqslant t < +\infty$ et contenant toutes les intégrales de ce champ qui partent de l'origine. On peut former les suites $\{M_i(P)\}$, $\{E_i\}$ et $\{E'_i\}$ de la même façon que dans 3,2.

Convenons d'appeler *verticale* la direction de l'axe des t, et de dire que *le point* (t,x) *se trouve plus haut que le point* (t',x') lorsque $t>t'$. Désignons par X^τ le plan (horizontal) $t=\tau=$ const. et posons $E^\tau_i = E'_i \cdot X^\tau$. La zone d'émission E_i est régulière dans $W[0,i]$ et, comme la propriété de Kneser, connue dans la théorie des équations différentielles, subsiste pour les équations au paratingent [22]), l'ensemble E^τ_i est un continu borné pour $0 \leqslant \tau < i$, où $i=1,2,\ldots$ L'ensemble complémentaire $Z = X^\tau - E^\tau_i$ se compose de domaines ouverts. L'un de ces

[22]) S. K. Zaremba, amb. locis cit. Cf. aussi H. Kneser, *Über die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, das der Lipschitz-Bedingung nicht genügt*, Sitz.-Ber. der Preuss. Akad. der Wiss. Phys.-Mat. Kl. 1923, p. 171-174.

domaines s'étend à l'infini, tandis que les autres, s'il en existe, sont bornés. Nous désignerons par $E_i^{*\tau}$ [23]) la somme de l'ensemble E_i et de toutes les composantes bornées de Z. Pour $\tau \geqslant i$, nous poserons $E_i^{*\tau} = E_i^{\tau}$. Soit E_i^* la somme de tous les ensembles $E_i^{*\tau}$ correspondant aux valeurs non-négatives de τ; on peut montrer facilement que E_i^* est un ensemble fermé. Il est aussi facile de voir que $E_{i+1}^* \underset{i}{\subset} E_i^*$ (à l'exception du point P_0) et que $\prod_{i=1}^{\infty} E_i^* = I_0$.

Soumettons maintenant le domaine $W[0, +\infty)$ à la transformation U qui a été définie dans 3,3 et convenons de désigner les transformées de UE_i', UE_i^*, $M_U(P)$ etc. par E_i', E_i^*, $M(P)$ etc. respectivement. Cette ambiguïté ne sera d'ailleurs pas fâcheuse dans la suite.

4,3. Fixons l'indice i et désignons par Δ le domaine $0 \leqslant t \leqslant i$, $|x_\nu| \leqslant k$, où $\nu = 1, 2$; choisissons un $k > 0$ suffisamment grand pour que l'on ait $E_i \cdot W[0, i] \subset \Delta$.

Cela posé, il est aisé de voir qu'il existe un $\varepsilon > 0$ et un $\delta > 0$ satisfaisant à la condition suivante:

Si P et P' sont des points appartenant à Δ et si $|P, P'| < \delta$, on a

$$(1) \qquad M_{i+1}(P') \underset{i}{\subset} \bar{k}(M_{i+1}(P), \varepsilon) \quad \text{et} \quad \bar{k}(M_{i+1}(P), 2\varepsilon) \underset{i}{\subset} M_i(P').$$

Soient: T l'élément linéaire parallèle à l'axe des t et s un nombre positif suffisamment grand pour que le champ $M_i(P)$ soit contenu dans le pinceau constant $\bar{k}(T, s)$, lorsque $P \epsilon \Delta$. Posons $\eta = \delta/3(s+1)$. Divisons l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant i$ en intervalles partiels $\tau_{\pi-1} \leqslant t \leqslant \tau_\pi$, où $\pi = 1, 2, \ldots, p$, $\tau_0 = 0$ et $\tau_p = i$, de longueurs inférieures à η, et le carré $|x| < k$ en carrés partiels congruents q_λ, où $\lambda = 1, 2, \ldots, l$, de diamètres inférieurs à $\delta/3$. Désignons par $\Delta_{\pi,\lambda}$ l'ensemble des points (t, x) tels que $\tau_{\pi-1} \leqslant t \leqslant \tau_\pi$ et $x \varepsilon q_\lambda$. Prenons ensuite, pour tout couple de valeurs π, λ où $\pi = 1, 2, \ldots, p$ et $\lambda = 1, 2, \ldots, l$, un point $R_{\pi,\lambda}$ situé sur le plan $t = \tau_{\pi-1}$ et dans $\Delta_{\pi,\lambda}$. Considérons enfin un champ constant $M_{\pi,\lambda}$ dont la trace est un polygone convexe et tel que l'on ait

$$(2) \qquad \bar{k}(M_{i+1}(R_{\pi,\lambda}), \varepsilon) \subset M_{\pi,\lambda} \subset \bar{k}(M_{i+1}(R_{\pi,\lambda}), 2\varepsilon).$$

P étant un point de l'ensemble $\Delta_{\pi,\lambda}$, soit $\mathfrak{M}_{\pi,\lambda}^{+}(P)$ l'ensemble $Z^+(P, M_{\pi,\lambda}) \cdot W[\tau_{\pi-1}, \tau_\pi]$, c'est-à-dire la portion comprise entre les plans $t = \tau_{\pi-1}$ et $t = \tau_\pi$ de la zone d'émission du point P par rapport au champ constant $M_{\pi,\lambda}$.

En s'appuyant sur les relations (1) et (2), on peut établir la proposition suivante:

---

[23]) Les continus analogues ont été considérés par T. Ważewski, loco cit., p. 560.

L'ensemble $\mathfrak{M}^{+}_{\pi,\lambda}(P)$ est une pyramide convexe de sommet P contenue, à l'exception du point P, dans l'intérieur de la zone d'émission $Z^{+}(P, M_i)$ et contenant dans son intérieur la portion de $Z^{+}(P, M_{i+1})$ comprise entre les plans $t=\tau_{\pi-1}$ et $t=\tau_{\pi}$.

Considérons un triangle σ situé sur le plan $t=\tau_{\pi-1}$ dans $\Delta_{\pi,\lambda}$. La somme $\mathfrak{M}(\sigma)$ de toutes les pyramides $\mathfrak{M}^{+}_{\pi,\lambda}(P)$ dont les sommets P appartiennent à σ est le moindre polyèdre convexe renfermant les trois pyramides $\mathfrak{M}^{+}_{\pi,\lambda}(P)$ ayant pour sommets P ceux du triangle σ. L'intersection de $\mathfrak{M}(\sigma)$ avec le plan $t=\tau$, où $\tau_{\pi-1}<\tau\leqslant\tau_{\pi}$, est un polygone convexe. Si $P\varepsilon Z^{+}(P_0, M_i)$, la projection orthogonale de ce polygone sur le plan $t=\tau_{\pi-1}$ contient dans son intérieur le triangle σ. Cela résulte du fait que le champ $M_{i+1}(P)$ contient à l'intérieur l'élément linéaire T pour $P\epsilon Z^{+}(P_0, M_i)\cdot\Delta$.

4,4. Nous définirons par recurrence une suite finie $\{\mathfrak{M}_{\pi}\}$ de polyèdres $(\pi=1,2,\ldots,p)$ dont les intersections avec les plans $t=\tau$, où $\tau_{\pi-1}\leqslant\tau\leqslant\tau_{\pi}$, sont des polygones connexes et qui n'ont pas de points communs avec les plans $t=\tau$ pour les autres valeurs de τ.

Posons dans ce but

$$\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}^{+}_{1\lambda_0}(P_0)\cdot W[0,\tau_1],$$

où λ_0 est un indice tel que le point P_0 appartient à q_{λ_0}. Un $\mathfrak{M}_{\pi}$ quelconque étant défini, son intersection avec le plan $t=\tau_{\pi}$ est un polygone qui peut être envisagé comme somme d'un nombre fini de triangles σ_j $(j=1,2,\ldots,J)$ situés dans le plan $t=\tau_{\pi}$ et dont chacun appartient à un certain $\Delta_{\pi,\lambda}$. Posons alors

$$\mathfrak{M}_{\pi+1}=\sum_{j=1}^{J}\mathfrak{M}(\sigma_j).$$

La suite $\mathfrak{M}_{\pi}$ étant ainsi construite, soit

$$\mathfrak{M}=\sum_{\pi=1}^{p}\mathfrak{M}_{\pi}.$$

$\mathfrak{M}$ est un polyèdre contenu dans $W[0,i]$ dont les intersections avec les plans $t=\tau$, où $0<\tau\leqslant i$, sont des polygones *connexes* et dont celle avec le plan $t=0$ se réduit à un seul point P_0. En outre, on a évidemment

$$E_{i+1}\cdot W(0,i)\underset{i}{\subset}\mathfrak{M}\cdot W(0,i)\underset{i}{\subset}E_i\cdot W(0,i). \tag{3}$$

Désignons par Λ la surface latérale de la pyramide $\mathfrak{M}_1$ et par Λ' une surface qui s'en obtient en modifiant un peu l'inclinaison de ses faces. Il est aisé de voir que, pourvu que cette modification ne soit pas trop grande, la surface Λ' est encore contenue dans l'intérieur du domaine $(E_i-E_{i+1})\cdot W[0,i]$, à l'exception du point P_0.

La surface qui est la frontière du domaine $\mathfrak{M}+W[i,+\infty)$ peut être représentée par l'équation $t=F^1(x_1,x_2)$, où $F^1(x)$ est une fonction définie dans X_2 et transversale au champ $M_{i+1}(P)$. Cette fonction n'admet de minimum qu'au point P_0, puisque, dans le cas contraire, il existerait un plan $t=\tau$ dont l'intersection avec $\mathfrak{M}$ ne serait pas un ensemble connexe.

4,5. Divisons le carré $t=0$, $|x_\mu|<\varkappa$, où $\varkappa$ est un entier positif et $\mu=1$ et 2, en quatres triangles au moyen de ses diagonales et désignons par $\Phi_\varkappa(x_1,x_2)$ la fonction égale à i en dehors du carré, à $i-\delta_\varkappa$ au point $(0,0)$ et linéaire sur chacun des triangles. Les nombres $\delta_\varkappa$ peuvent être choisis de façon que l'on ait $0<\delta_{\varkappa+1}<\delta_\varkappa/2<1/2$, que les fonctions $\Phi_\varkappa(x)$ soient traversales au champ $M_{i+1}(P)$ et que les surfaces $t=\Phi_\varkappa(x)$ soient contenues dans le domaine H (cf. p. 69). Ceci étant, posons

$$\Phi(x)=\min(\Phi_1(x),\Phi_2(x),\ldots).$$

Cette fonction ne possède qu'un seul minimum, à savoir au point $(0,0)$, et elle est traversale au champ $M_{i+1}(P)$. La surface $t=\Phi(x)$ est contenue dans le domaine $H\cdot W(i-1,i)$.

4,6. Posons dans le plan X_2 tout entier

$$F^2(x)=\min(F^1(x),\Phi(x)).$$

On peut diviser le plan X_2 en une infinité dénombrable de polygones bornés et fermés π_l, où $l=1,2,\ldots$ de façon qu'un cercle, quel qu'il soit, n'empiète que sur un nombre fini de ces polygones et que la fonction $F^2(x)$ soit linéaire dans chacun d'eux. Nous dirons alors tout court que la fonction $F^2(x)$ est *polyédrique* et adopterons dans la suite cette façon de parler.

Appelons *réseau appartenant à la fonction* $F^2(x)$ l'ensemble des polygones π_l. Les polygones π_l, leurs côtés a_j et leurs sommets n_k seront dits respectivement les *sous-faces, sous-arêtes* et *sous-sommets* de la fonction $F^2(x)$. Les figures correspondantes sur la surface $t=F^2(x)$, c'est-à-dire les polygones Π_l, les segments A_j et les points N_k seront appelés *faces*, *arêtes* et *sommets* de la même fonction. Ce ne sont pas nécessairement les faces, arêtes et sommets au sens propre, car plusieurs faces adjacentes peuvent être situées dans le même plan.

Étant donné un réseau appartenant à la fonction $F^2(x)$, on peut en obtenir, en traçant de nouvelles sous-arêtes, un réseau dont toutes les sous-faces sont triangulaires et qui sera dit *réseau triangulaire* de $F^2(x)$.

Introduisons encore une classification des sous-sommets et des sous-arêtes. Une sous-arête a_j partant d'un sous-sommet n_k sera dite *positive*, *négative* ou *nulle* par rapport à n_k, suivant que la fonction

$F^2(x)$ croît, décroît ou reste constante lorsque x parcourt cette arête en partant du point n_k. Un sous-sommet n_k sera dit *sous-sommet maximum (minimum)* lorsque les valeurs de la fonction $F^2(x)$, dans un entourage de n_k, sont non-supérieures (non-inférieures) de celle au point n_k.

Le point P_0 est le seul sous-sommet minimum de la fonction $F^2(x)$.

Un sous-sommet n_k sera appelé *régulier* si l'ensemble des points x tels que $F^2(x)=F^2(n_k)$ se compose, dans un voisinage de n_k, de deux segments rectilignes partant de n_k et qui séparent deux domaines dans lesquels la différence $F^2(x)-F^2(n_k)$ a de signes contraires.

La fonction $F^2(x)$ est transversale au champ $M_{i+1}(P)$ et la surface $t=F^2(x)$ est contenue dans l'intérieur du domaine

$$(H\cdot W(i-1,i)+E_i\cdot W(0,i))-E_{i+1},$$

à l'exception du point P_0.

Le domaine $W(0,\tau)$ ne contient qu'un nombre fini de sommets de la fonction $F^2(x)$, lorsque $0\leqslant\tau<i$.

4,7. Lemme 17. *$M(P)$ étant un champ défini dans un domaine ouvert $D\subset X_{21}$, admettons qu'une fonction transversale à ce champ est définie par l'équation*

$$\Psi(x)=a_1x_1+a_2x_2+\beta$$

sur un ensemble compact $B\subset X_2$.

Il existe alors un nombre positif ε tel que la fonction

$$\Psi^*(x)=a_1^*x_1+a_2^*x_2+\beta^*$$

est transversale au champ $M(P)$ dans $k(B,\varepsilon)$ lorsque $|a_\nu^*-a_\nu|<\varepsilon$ pour $\nu=1$ et 2, et $|\beta^*-\beta|<\varepsilon$.

En effet, désignons par Π et Π^* les portions des plans $t=\Psi(x)$ et $t=\Psi^*(x)$ qui correspondent aux domaines B et $k(B,\varepsilon)$ respectivement. La fonction $\Psi(x)$ est évidemment transversale dans B au champ constant $M_0=\sum\limits_{P\in\Pi}M(P)$ (cf. **1,3**). Il en résulte l'existence d'un $\eta>0$ et d'un $\varepsilon'>0$ tels que la fonction $\Psi^*(x)$ est transversale au champ $k(M_0,\eta)$ lorsque $|a_\nu^*-a_\nu|<\varepsilon'$.

Il existe ensuite un $\varepsilon''>0$ tel que $M(P)\subset k(M_0,\eta)$ pour $P\in K(\Pi,\varepsilon'')$ et un $\varepsilon'''>0$ tel que $\Pi'\subset K(\Pi,\varepsilon'')$ pour $|a_\nu^*-a_\nu|<\varepsilon'''$, $|\beta^*-\beta|<\varepsilon'''$ et $\varepsilon\leqslant\varepsilon'''$. Pour achever la démonstration, il suffit de poser $\varepsilon=\min(\varepsilon',\varepsilon'',\varepsilon''')$.

Lemme 18. *Soient: $t=F(x)$ une fonction polyédrique et transversale au champ $M(P)$, et A un domaine fermé et borné contenu dans X_2. Alors, il existe un nombre $\varepsilon>0$ satisfaisant à la condition suivante:*

$F^*(x)$ étant une fonction polyédrique identique à $F(x)$ en dehors de A et telle qu'il existe une correspondance biunivoque entre les sous-faces de $F(x)$ et celles de $F^*(x)$ dans laquelle

(α) les distances entre sous-faces correspondantes sont inférieures à ε,

(β) la fonction $F(x)$ étant égale à $a_1x_1+a_2x_2+\beta$ sur la sous-face π_i et la fonction $F^*(x)$ étant égale à $a_1^*x_1+a_2^*x_2+\beta^*$ sur la sous-face correspondante π_i^*, les valeurs absolues $|a_1^*-a_1|$, $|a_2^*-a_2|$ et $|\beta^*-\beta|$ sont inférieures à ε,

la fonction $F^*(x)$ est transversale au champ $M(P)$.

La démonstration est immédiate en vertu du lemme 17.

4,8. Reprenons l'étude de la fonction $F^2(x)$. En supposant que le réseau appartenant à cette fonction est triangulaire, nous allons montrer qu'il est possible d'atteindre, par une modification convenable de $F^2(x)$, qu' *aucun couple de sommets ne soit pas situé sur le même plan* $t=$const. et que, en même temps, les propriétés de la fonction $F^2(x)$ discutées dans **4,6** ne soient pas altérées.

Rangeons, en effet, tous les sous-sommets de $F^2(x)$ en une suite $\{n_k\}$ où $k=0,1,2,\ldots$ et $n_0=P_0$. Nous définirons d'abord par récurrence une suite de fonctions polyédriques $\{F_\mu(x)\}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1. $F_0(x)=F^2(x)$;

2. $F_\mu(x)$ possède le même réseau que $F^2(x)$;

3. $F_\mu(x)=F_{\mu-1}(x)$, à l'exception des sous-faces contenant le sous-sommet n_μ;

4. $0<F_{\mu-1}-F_\mu<1/\mu$;

5. les sommets $N_0^\mu, N_1^\mu,\ldots,N_\mu^\mu$ de la fonction $F_\mu(x)$ qui correspondent aux sous-sommets $n_0,n_1,\ldots,n_\mu$ de la fonction $F^2(x)$ sont situés à des niveaux différents;

6. les fonctions $F_\mu(x)$ possèdent toutes les propriétés de la fonction $F^2(x)$ discutées dans **4,6.**

Admettons que les fonctions $F_\mu(x)$ pour $\mu<m$ soient déjà définies. Si le sommet N_m^{m-1} ne se trouve au même niveau qu'aucun des sommets $N_0^{m-1}, N_1^{m-1},\ldots,N_{m-1}^{m-1}$, posons $F_m(x)=F_{m-1}(x)$. Dans le cas contraire, abaissons un peu le sommet N_m^{m-1}, en diminuant la valeur de la fonction $F_{m-1}(x)$ au point n_m et en modifiant cette fonction de fa-

çon convenable sur les sous-faces contenant le point n_m. Si cette modification n'est pas trop considérable, la fonction $F_m(x)$ satisfait encore aux conditions 2—6 (cf. lemme 18).

Ceci posé, soit $F^3(x) = \lim_{\mu \to \infty} F_\mu(x)$. C'est bien la fonction cherchée dont les sommets sont situés à des niveaux différents et qui possède les propriétés annoncées, analogues à celles de la fonction $F^2(x)$. Remarquons encore que, grâce à la condition 4, chaque domaine $W[0,\tau]$, où $0 < \tau < i$, ne contient qu'un nombre fini de sommets de $F^3(x)$.

Désignons par $e(F^3,\tau)$ l'ensemble de points x du plan X_2 pour lesquels $F^3(x) = \tau$, et par $E(F^3,\tau)$ celui des points correspondants de la surface $t = F^3(x)$. Pour $\tau \geqslant i$, ces ensembles sont vides, et pour $\tau = 0$, ils se réduisent au point P_0. Lorsque $0 < \tau < i$, l'ensemble $e(F^3,\tau)$ est borné et se compose de segments rectilignes, voire de points isolés. L'ensemble complémentaire $X_2 - e(F^3,\tau)$ se compose d'un nombre fini de domaines ouverts. L'un de ces domaines, B_0, s'étend à l'infini, les autres $B_1, B_2, \ldots, B_s$ sont bornés.

Les domaines dans lesquels $F^3(x) - \tau > 0$ seront dits *positifs* et ceux où $F^3(x) - \tau < 0$ — *négatifs*. Le domaine B_0 est évidemment positif.

La fonction $F^3(x)$ n'ayant pas de minimum différent de P_0, il n'existe qu'un seul domaine négatif. Il s'ensuit que la frontière de B_0 est un circuit simple; nous le désignerons par $o_0(F^3,\tau)$.

Pour les valeurs de τ suffisamment proches de 0, il n'existe qu'un seul domaine positif B_0 et un seul domaine négatif B_1. Lorsque τ croît, B_0 se contracte, tandis que B_1 s'étend et peut former des saillies qui peuvent enfermer de nouveaux domaines positifs. Il est indispensable d'exclure cette éventualité par une modification convenable de la fonction $F^3(x)$.

4,9. Nous allons nous débarrasser des sommets non-réguliers différents de P_0. Rangeons d'abord en une suite croissante

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_1, \quad \tau_2, \quad \ldots \tag{4}$$

convergente vers i les valeurs de la variable t qui correspondent aux sommets de la fonction $F^3(x)$. Nous construirons une suite de fonctions polyédriques $\{F'_\mu(x)\}$ et une suite croissante de nombres $\{\vartheta_\mu\}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1'. $\vartheta_0 = 0$ et chaque terme de la suite ϑ_μ est égal à un terme de la suite (4);

2'. $F'_0(x) = F^3(x)$;

3'. $F'_\mu(x) = F'_{\mu-1}(x)$ dans l'intérieur de $o_0(F'_{\mu-1}, \vartheta_{\mu-1})$;

4'. les sommets de $F'_\mu(x)$, correspondants aux valeurs de t non inférieures à ϑ_μ sont identiques à certains sommets de $F^3(x)$;

5'. les sommets de $F'_\mu(x)$, correspondants aux valeurs de t non supérieures à ϑ_μ sont *réguliers*;

6'. lorsque $0<\tau<\vartheta_\mu$, l'ensemble $e(F'_\mu,\tau)$ est un circuit simple;

7'. les fonctions $F'_\mu(x)$ possèdent un seul sommet minimum P_0, elles sont transversales au champ $M_{i+1}(P)$ et les surfaces $t=F'_\mu(x)$ sont, à l'exception du point P_0, contenues dans l'intérieur du domaine

$$H^*=(H\cdot W(i-1,i)+E_i^*\cdot W(0,i))-E_{i-1}. \tag{5}$$

Admettons que les nombres et les fonctions en question soient déjà définis pour $\mu<m$. Les sommets de la fonction $F'_{m-1}(x)$ qui correspondent aux valeurs de t supérieures à ϑ_{m-1} sont identiques à certains sommets de $F^3(x)$. Nous en choisirons un sommet N dont l'abscisse $t=\vartheta_m$ est la plus petite possible et désignerons par n le sous-sommet correspodant. On peut démontrer facilement que l'ensemble $e(F'_{m-1},\tau)$ est un circuit simple, lorsque $\vartheta_{m-1}<\tau<\vartheta_m$. En effet, dans le cas contraire, la fonction $F_{m-1}(x)$ posséderait un sommet non régulier d'abscisse $t<\vartheta_m$.

Considérons maintenant l'ensemble $e(F'_{m-1},\vartheta_m)$. Deux cas sont possibles: cet ensemble est un circuit simple ou non. S'il est simple, le sommet N est régulier et on posera $F'_m(x)=F'_{m-1}(x)$. Nous allons donc nous occuper de la seconde alternative.

L'ensemble $e(F'_{m-1},\vartheta_m)$ n'étant pas un circuit simple, il est aisé de voir qu'il est un continu composé de circuit $o_0=o_0(F'_{m-1},\vartheta_m)$ et des circuits situés à l'intérieur de o_0 et ayant avec o_0 un point commun n qui est le sous-sommet correspondant à N. Nous désignerons ces circuits intérieurs à o_0 par

$$o_1, o_2, \ldots, o_s. \tag{6}$$

La fonction $F'_{m-1}(x)-\vartheta_m$ est positive à l'intérieur des circuits (6) et à l'extérieur de o_0; elle est négative dans le domaine limité extérieurement par o_0 et intérieurement par les circuits (6). Le sommet N n'est donc pas régulier dans le cas considéré.

Posons $F^*(x)=\vartheta_m$ aux points intérieurs des circuits (6) et $F^*(x)=F_{m-1}(x)$ à l'extérieur d'eux. Nous retranchons ainsi certains sommets et formons de nouveaux sous-sommets n_ϱ, où $\varrho=1,2,\ldots,s$, qui sont situés sur les circuits (6). Les sommets correspondants N_ϱ sont situés au même niveau que le sommet N. On peut atteindre par une subdivision (s'il y a lieu) du réseau appartenant à la fonction $F^*(x)$ que toutes les sous-arêtes partant des nouveaux sous-sommets n_ϱ soient situées à l'extérieur de $o_0(F_{m-1},\vartheta_{m-1})$. La fonction $F^*(x)$ est transversale au champ $M_{i+1}(P)$ et la surface $t=F^*(x)$ est contenue dans l'intérieur du domaine H^*, à l'exception du point P_0.

Considérons le circuit o_1. Soient $n, n_1, \ldots, n_q$ les sommets successifs de ce polygone. Il est évidemment possible de tracer $q-2$ diagonales ne s'entrecoupant pas deux à deux et qui divisent le domaine limité par o_1 en triangles $\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_{q-1}$. Deux au moins des sommets n'appartiennent à aucune de cettes diagonales. Nous pouvons admettre que, le triangle π'_r par exemple, admet un tel sommet n_r et que $n_r \neq n$. Les deux côtés du triangle π'_r partant du point n_r sont des sous-arêtes nulles et les autres sous-arêtes partant de n_r sont négatives. En diminuant un peu la valeur de la fonction $F^*(x)$ au point n_r et en modifiant cette fonction sur les sous-faces adjacentes, on parvient à une fonction $F^{**}(x)$ qui a toutes les propriétés essentielles de la fonction $F^*(x)$ et dont le sous-sommet n_r est régulier. En répétant ce procédé un nombre fini de fois, nous aboutissons à une fontion $F'_m(x)$ satisfaisant aux conditions 3'-7'. L'existence des suites $\{\vartheta_\mu\}$ et $\{F'_\mu(x)\}$ est ainsi établie par induction.

La fonction

$$F^4(x) = \lim_{\mu \to \infty} F'_\mu(x)$$

est déterminée dans le plan X_2 tout entier et transversale au champ $M_{i+1}(P)$. Tous ses sommets sont réguliers, à l'exception de l'unique sommet minimum P_0. La surface $t = F^4(x)$ est contenue dans l'intérieur de l'ensemble $H^{**} = H^* - E^*_{i+1}$, exception faite du point P_0. Les intersections de cette surface avec les plans $t = \tau$, où $0 < \tau < i$, sont des circuits simples.

Dans la suite, nous remplacerons la fonction $F^4(x)$ par une fonction régulière jouissant des mêmes propriétés tout comme $F(x)$ a été approchée dans **3,5** par la fonction $G(x)$. Cependant, la méthode employée dans **3,5** peut échouer ici, car l'application du lemme 13 de **2,4** à la fonction $F^4(x)$ ne garantit point que la fonction $G(x)$ ainsi obtenue satisfera à la condition que les intersections de la surface $t = G(x)$ avec les plans $t = \text{const.}$ soient des circuits simples. Pour lever cette difficulté, nous devrons modifier encore une fois la fonction $F^4(x)$, en la remplaçant par une autre fonction polyédrique à laquelle nous pourrons déjà appliquer la méthode d'approximation en question.

4,10. Admettons que N est un sommet de la fonction $F^4(x)$ différent de P_0 et que le nombre d'arêtes partant de N est $s \geq 4$. Soient: n le sous-sommet correspondent à N et ω un cercle de centre n qui ne contient pas d'autres sous-sommets.

Nous allons montrer que, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une fonction polyédrique* $F^\bullet(x)$ *telle que*

(a) *$F^{\bullet}(x)$ s'obtient de $F^{1}(x)$ par une modification dans le cercle ω;*

(b) *$F^{\bullet}(x)$ possède dans ω un nombre fini de sous-sommets, et celui de sous-arêtes partant d'un sous-sommet quelconque situé dans ω est inférieur à s;*

(c) *en posant*

$$F(x)=F^{1}(x) \quad et \quad F^{*}(x)=F^{\bullet}(x),$$

la fonction $F^{*}(x)$ satisfait à la condition du lemme 18 *de* **4,7.**

Supposons d'abord que les points p_{σ}, où $\sigma=1,2,\ldots,s$, soient situés dans ω sur les sous-arêtes successives partant de n. Nous distiguerons trois cas:

(A) L'un des angles limités par deux sous-arêtes successives, l'angle $p_s n p_1$ par exemple, est concave[24]);

(B) L'un de ces angles, $p_s n p_1$ par exemple, est égal à deux droits,

(C) Tous ces angles sont convexes.

Dans le cas (A), nous distiguerons encore trois cas particuliers:

(A_1) L'arête NP_s est positive, l'arête NP_1 est négative et le plan Π contenant la face $P_s NP_1$ ne possède pas d'autres points communs avec des faces adjacentes à N. Admettons, par exemple, que les autres faces se trouvent au-dessus de Π. Alors, les faces $P_{s-1}NP_s$ et $P_1 NP_2$ se coupent le long d'une demi-droite NQ située au-dessus du plan Π et nous pouvons admettre que la projection q du point Q sur le plan X_2 est située à l'intérieur du polygone $np_1 p_2 \ldots p_s$. Nous modifierons la fonction $F^{1}(x)$ dans ce polygone de façon à obtenir une fonction polyédrique $F^{\bullet}(x)$ linéaire sur chaque triangle $p_{\sigma} q p_{\sigma+1}$, où $\sigma=2,3,\ldots,s-2$, et sur les quadrilatères $p_1 nq p_2$ et $p_s nq p_{s-1}$. Lorsque le point q est suffisamment proche du point n, la condition (c) est remplie, les nouveaux sommets $P_2, P_3, \ldots, P_{s-1}$ sont réguliers et les arêtes QP_{σ}, où $\sigma=2,3,\ldots,s-1$, ont le même signe que les arêtes NP_{σ} correspondantes.

Supposons d'abord que les arêtes NP_2 et NP_{s-1} soient positives. Il en est de même des arêtes $QP_3, QP_4, \ldots, QP_{s-2}$, puisque le sommet N est régulier.

Si q est situé dans le polygone $np_2 p_3 \ldots p_s$, la fonction $F^{\bullet}(x)$ est croissante le long de nq et le nouveau sommet Q est régulier.

Si q est situé dans le triangle $p_1 n p_2$, le sommet Q est encore régulier, car l'angle $p_2 qn$ ne contenant pas les points $p_3, p_4, \ldots p_s$, est concave et il est aisé de voir que le signe de l'arête nq n'a aucune importance.

---

[24]) Deux demi-droites partant d'un point, mais situées sur deux droites différentes divisent le plan en deux domaines dont l'un est concave et l'autre est convexe. Le premier de ces domaines est *l'angle concave* et le second est *l'angle convexe.* Il sera entendu que ces demi-droites font partie de chacun de ces angles.

Le raisonnement est pareil, si les arêtes $NP_2,\ldots,NP_{s-1}$ sont négatives. Si NP_2 est négative et NP_{s-1} positive, le sommet Q est aussi régulier. Il suffit de remarquer que, si l'angle p_2qn est concave, l'arête QN est positive, et si l'angle $p_{s-1}qn$ est concave, l'arête QN est négative, le signe de QN dans les autres cas étant sans importance.

Dans tous ces cas le sommet N de la nouvelle fonction $F^*(x)$ est régulier.

(A_2) L'arête NP_s est positive, l'arête NP_1 est négative et le plan Π coupe une face P_kNP_{k+1} suivant une demi-droite NQ, la projection q du point Q étant située dans le triangle p_knp_{k+1}. Nous modifierons la fonction $F^1(x)$ dans le polygone $nqp_{k+1}\ldots p_s$ de façon que la fonction $F^*(x)$ ainsi obtenue soit linéaire dans tous les triangles $p_\sigma qp_{\sigma+1}$, où $\sigma=k+1,\ldots,s-1$, et que la nouvelle face NQP_s soit située sur Π. La discussion détaillée concernant les signes des sous-arêtes montre que les nouveaux sommets sont réguliers, pourvu que le point Q soit suffisamment proche du point N.

(A_3) Les arêtes NP_1 et NP_s ont le même signe, ou bien l'une d'elles, NP_1 par exemple, est nulle. Alors, les autres arêtes partant de N ont le même signe que NP_s. La face P_kNP_{k+1}, où $2\leqslant k\leqslant s-1$, coupe la face P_sNP_1 suivant une demi-droite NQ, et q est situé dans ω sur la sous-face p_snp_1. Supposons que l'angle qnp_k contenant p_1 soit convexe. Nous modifierons alors la fonction $F^1(x)$ de façon que la nouvelle fonction $F^*(x)$ soit linéaire dans les triangles $p_\sigma qp_{\sigma+1}$, où $\sigma=1,2,\ldots,k-1$, et sur le quadrilatère nqp_kp_{k+1}. Si l'angle qnp_k contenant p_1 est concave, il suffit d'intervertir les rôles des arêtes p_1 et p_s. La discussion détaillée ne présente pas des difficultés.

Passons au cas (B). Nous choisirons sur la sous-face p_snp_1 un point q proche de n et formerons une fonction linéaire dans les triangles $p_\sigma qp_{\sigma+1}$, où $\sigma=1,2,\ldots,s-1$, et égale à $F^1(x)$ ailleurs. Le cas (B) se ramène ainsi au cas (A).

Dans le cas (C), il existe toujours deux arêtes consécutives, NP_s et NP_1 par exemple, telles que la première est positive et la seconde est négative ou nulle.

Laissons de côté le cas, où l'arête NP_1 est nulle, qui est tout à fait analogue à celui où elle est négative. Désignons par Π le plan dans lequel la face P_sNP_1 est contenue. Nous allons encore distinguer deux alternatives possibles:

(C_1) Les faces $P_\sigma NP_{\sigma+1}$, où $\sigma=1,2,\ldots,s-1$, sont situées au-dessous (ou bien au-dessus) du plan Π. Les faces P_1NP_2 et P_sNP_{s-1} se coupent le long d'une demi-droite NQ, la projection q étant située dans le triangle p_snp_1. Alors, la nouvelle fonction $F^*(x)$ sera par définition linéaire dans le triangle p_sqp_1 et dans les quadrilatères p_1qnp_2 et p_sqnp_{s-1}.

On vérifie sans peine que la fonction possède les propriétes annoncées, lorsque q est suffisamment proche de n.

(C_2) le plan Π coupe une face $P_k N P_{k+1}$, où $2 \leqslant k \leqslant s-2$, le long d'une demi-droite NQ, la projection q de Q étant un point du triangle $p_k n p_{k+1}$. Admettons que l'angle $p_1 nq$, contenant p_2, soit convexe (sinon, il suffirait d'intervertir les rôles des points p_1 et p_s). La nouvelle fonction $F^*(x)$ est par définition linéaire dans les triangles $p_\sigma q p_{\sigma+1}$, où $\sigma = 1, 2, \ldots, k-1$, et dans le quadrilatère $p_1 q n p_s$.

Ceci établi, admettons d'abord que l'angle $p_s nq$ qui contient p_1 est convexe. Lorsque la distance nq est assez petite, le quadrilatère $p_s nqp_1$ contient un segment qr parallèle à np_s, l'arête QP_1 est négative et les autres arêtes QP ont les mêmes signes que les NP_σ correspondants. La fonction $F^*(x)$ étant croissante le long de qr et décroissante le long de qp_1, l'arête NQ est négative. Il en résulte que l'arête NP_k est négative, et par conséquent les sommets N et Q sont réguliers.

Admettons ensuite que l'angle $p_s nq$, contenant p_1, n'est pas convexe. Alors, ou bien les arêtes NP_k et NP_{k+1} ont les mêmes signes, ou bien NP_k est négative et NP_{k+1} est non-négative, ou bien NP_k est non-positive et NP_{k+1} est positive. Il est aisé de voir que dans tout ces cas les sommets N et Q de la fonction $F^*(x)$ sont réguliers.

Il est à remarquer que s'il n'existe que 4 arêtes partant de N, la fonction $F^*(x)$ satisfait à la condition suivante: le nombre de sous-arêtes partant d'un sous-sommet de $F^*(x)$, situé dans ω est toujours égal à 3.

Une autre remarque. La fonction $F^1(x)$ ne possède pas d'arêtes horizontales lorsque ses sommets sont situés à des niveaux différents. Cependant, les constructions qui viennent d'être décrites sont applicables encore dans le cas où certaines arêtes sont parallèles au plan X_2. On peut donc toujours itérer le procédé, bien que la fonction $F^*(x)$ puisse avoir de telles arêtes.

4,11. En tenant compte de la méthode établie et en s'appuyant sur le lemme 18 de **4,7**, il est déjà facile de déduire l'existence d'une fonction $F^5(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

$F^5(x)$ est une fonction polyédrique, définie sur le plan X_2 tout entier et transversale au champ $M_{i+1}(P)$; tous ses sommets sont réguliers, à l'exception du seul sommet minimum P_0; le nombre d'arêtes partant d'un sommet distinct de P_0 est toujours égal à 3; la surface $t = F^5(x)$, où $x \neq P_0$, est située à l'intérieur du domaine H^{**} (cf. **4,9**); *les intersections de cette surface avec les plans horizontaux sont des circuits simples.*

Ceci admis, désignons par B le plan X_2 dépourvu du point P_0. Nous allons démontrer la proposition suivante:

Si $x^0 \epsilon B$, il existe deux nombres positifs $\varepsilon(x^0)$ et $\eta(x^0)$ et un vecteur non nul v parallèle au plan X_2, tels que ∂_v^- désignant le nombre dérivé inférieur dans la direction du vecteur v,

$$x \epsilon \mathrm{k}(x^0, \varepsilon(x^0)) \quad \textit{entraîne} \quad \partial_v^- F^5(x) > \eta(x^0).$$

En effet, soit d'abord $x^0 = n$ un sous-sommet de la fonction $F^5(x)$. Désignons par np_1, np_2 et np_3 les sous-arêtes partant de n. Il existe un nombre positif $\varepsilon(x^0)$ tel que le voisinage $\mathrm{k}(x^0, \varepsilon(x^0))$ ne contient ni d'autres sous-sommets, ni de points de sous-arêtes de $F^5(x)$ différentes de np_1, np_2 et np_3.

Dans le cas où les trois angles limités par ces sous-arêtes sont convexes, l'une d'elles, np_1 par exemple, doit être positive, puisque N est régulier. Si np_2 est aussi positive, np_3 est évidemment négative et nous pouvons poser $v = \overrightarrow{p_3 n}$. Si np_2 et np_3 sont négatives, nous poserons $v = \overrightarrow{np_1}$.

Dans le cas où l'angle $p_3 n p_1$ (ne contenant pas le point p_2) est concave et l'arête np_1 est positive (le cas où elle est négative ou nulle étant tout à fait analogue), nous poserons: $v = \overrightarrow{np_2}$ si np_2 est positive et np_3 est non-négative, et $v = \overrightarrow{np_1}$ si np_2 est positive et np_3 est négative. Enfin, si np_2 est négative ou nulle, np_3 est négative, et on peut poser $v = \overrightarrow{p_3 n}$.

Il est aisé de voir que dans tous ces cas le nombre $\eta(x^0)$ peut être trouvé. Pour les autres cas possibles, la démonstration de la proposition est immédiate.

Soit maintenant $\{x^\mu\}$, où $x^\mu \epsilon B$ pour $\mu = 1, 2, \ldots$, une suite de points telle que $\prod_{\mu=1}^{\infty} \mathrm{k}(x^\mu, \varepsilon/2(x^\mu)) = B$ et que tout ensemble compact contenu dans B n'a des points communs qu'avec un nombre fini de cercles $k_\mu = \mathrm{k}(x^\mu, \varepsilon/2(x^\mu))$. Posons $\beta(x)$ égal au minimum des rayons des cercles k_μ contenant le point x, et $\gamma(x)$ égal au minimum des nombres $\eta(x^\mu)$ correspondants. Il est manifeste que les bornes inférieures des fonctions $\beta(x)$ et $\gamma(x)$ sont positives sur tout ensemble compact contenu dans B. Si $x^0 \epsilon B$, il existe, d'après la proposition démontrée, un vecteur-unité w tel que l'on a $\partial_w^- F^5(x) > \gamma(x^0)$ dans $\mathrm{k}(x^0, \beta(x^0))$.

4,12. Appliquons le lemme 14 de **2,4** à la fonction $F^5(x)$ et au champ $M_{i+1}(x)$ considéré dans l'intérieur de l'ensemble H^{**} (cf. **4,9**), en profitant des résultats exposés dans **4,11**. Il existe d'après le lemme 14 une fonction $G(x)$ jouissant des propriétés suivantes:

$G(x)$ est une fonction analytique dans B et transversale au champ $M_{i+1}(P)$; les dérivées partielles de $G(x)$ ne s'annulent nulle part simultanément; la surface $t=G(x)$ est contenue dans l'intérieur de H^{**}; la portion de cette surface limitée par les plans $t=0$ et $t=\tau$, où $0<\tau<i$, est bornée.

La fonction $G(x)$ n'est pas encore définie à l'origine. Posons donc $G(0,0)=0$ et désignons par Γ_i l'ensemble des points $P=(t,x)$ pour lesquels on a $t \geqslant G(x)$. Γ_i est un continu dont l'intérieur est homéomorphe à une sphère ouverte. Soit $e(G,\tau)$ l'ensemble des points $x \epsilon X_2$ pour lesquels on a $G(x)-\tau=0$. D'après le théorème classique sur les fonctions implicites, cet ensemble est localement un arc simple analytique. Or, cet ensemble est borné et fermé. Il s'ensuit qu'il se compose de courbes simples fermées disjointes [25]). S'il en contenait plus d'une, la fonction $G(x)$ aurait un extremum dans B, ce qui est impossible, puisque toutes les dérivées partielles de $G(x)$ ne peuvent pas s'annuler en même temps. Les intersections de la surface $t=G(x)$ avec les plans $t=\tau$, où $0<\tau<i$, sont donc des circuits analytiques simples.

Ceci établi, soumettons le domaine $W[0,+\infty)$ à la transformation U^{-1}, réciproque à la transformation U qui a été introduite dans **4,2**. Désignons par C_i l'ensemble $U^{-1}(\Gamma_i)$. Restituons le sens primitif des symboles E_i, E_i^*, $M_i(P)$ etc. (cf. **4,2**). Les continus C_i $(i=1,2,\ldots)$ construits de cette façon pour $a=0$, $\beta=+\infty$ et $\vartheta=0$ satisfont évidemment, à partir d'un certain indice, aux conditions 1^0-6^0 du théorème III (**3,8**). Cependant, nous avons déjà fait observer (**3,2**) que ces restrictions sur a, β et ϑ ne sont pas essentielles, le cas plus général où a et $\beta>a$ sont des nombres quelconques et ϑ est un nombre positif arbitraire se ramenant facilement à celui qui vient d'être étudié.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

4,13. Théorème VII. *Soient: $M(P)$ un champ défini dans le domaine $W[a,\beta)$, où $a<\beta\leqslant+\infty$, contenu dans l'espace X_{21} à 3 dimensions et I_0 une intégrale particulière du champ $M(P)$, partant du point $P_0=(a,x^0)$, définie dans l'intervalle $a\leqslant t<\beta$ et contenant toute intégrale de ce champ qui part de P_0.*

Alors, il existe pour tout couple de nombres positifs ϑ,η une suite $\{C_i\}$ d'ensembles et une suite $\{K_i\}$ de voisinages du point P_0, telles que les conditions 1^0-6^0 du théorème III sont satisfaites, en même temps que la nouvelle condition suivante:

---

[25]) Cf. W. Wilkosz, *Un problema integrale nella teoria delle funzioni implizite*, Bull. de l'Acad. Polonaise des Sc., Série A., 1920, p. 73.

7° *les plans tangents à la surface de C_i aux points de $W(a,\beta)$ ne sont jamais perpendiculaires à l'axe des t, et les intersections de la surface de C_i avec les plans $t=\tau$, où $a<\tau<\beta$, sont — s'il en existe — des circuits simples analytiques pour $i=1,2,\ldots$*

Remarque. On peut modifier ce théorème de plusieurs façons, de même que le théorème III.

On peut supposer, par exemple, que le champ $M(P)$ soit contenu dans l'intérieur d'un autre champ $M'(P)$ qui est continu dans $W[a,\beta)$ et dont la zone d'émission $Z^+(M',P_0)$ est régulière. Alors, on peut atteindre que les continus C_i jouissent de la propriété suivante: les intersections de la surface de tout C_i avec les plans $t=\tau$, où $a<\tau<\beta$, existent toujours et sont des circuits simples analytiques.

Chapitre 5

5,1. Nous allons construire un exemple du système de trois équations différentielles ordinaires qui montre *l'impossibilité de généraliser le théorème VII de* **4,13** *à un nombre de dimensions supérieur à 3, si l'on exige que les intersections des ensembles C_i avec les hyperplans $t=$const. soient homéomorphes à la sphère à n dimensions.*

5,2. Considérons dans l'espace X_3 un tore

$$(1)\qquad (\varrho-R)^2+(x_3)^2\leqslant r^2,\quad \text{où}\quad \varrho^2=(x_1)^2+(x_2)^2.$$

Nous appellerons: *plan principal* du tore le plan $x_3=0$, *axe principal* la droite $x_1=x_2=0$, et *circonférence centrale* la circonférence $x_3=0$, $\varrho=R$. Les nombres R et r seront dits respectivement *grand rayon* et *petit rayon* du tore. Nous emploierons les dénominations analogues dans le cas général, où le tore occupe une autre position par rapport aux axes des coordonnées.

En posant dans l'équation (1) $R=1$ et $r=1/2$, $1/6$, $1/12$, on aura trois tores T_0, T_0' et T_0'', ayant la même circonférence centrale, le même axe principal et le même grand rayon. On a $T_0''\underset{i}{\subset} T_0'\underset{i}{\subset} T_0$.

La surface du tore T_0'' peut être représentée à l'aide des équations

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_1&=R\cos\varphi+r\cos\varphi\cdot\cos\psi,\\ x_2&=R\sin\varphi+r\sin\varphi\cdot\cos\psi,\\ x_3&=r\sin\psi,\end{aligned}$$

où $R=1$, $r=1/12$, $0\leqslant\varphi<2\pi$ et $0\leqslant\psi<2\pi$.

Soient l_0 et l_0' les courbes représentées par le système des équations (2) en y posant respectivement $\psi=\varphi$ et $\psi=\varphi+\pi$. Soit $V(\varphi,\psi)$

un champ vectoriel tangent aux parallèles du tore T_0''', dirigé dans le sens des valeurs croissantes de la variable φ et tel que l'on ait partout $|V(\varphi,\psi)|=1$. Posons

$$v_0(x)=v_0(\varphi,\psi)=\Phi(\varphi)\{R+r\cos\psi\}V(\varphi,\psi),$$

où

$$\Phi(\varphi)=\epsilon\sqrt{(\varphi-\psi)(\psi+\pi-\varphi)} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon=\begin{cases}+1 & \text{pour } \psi\leqslant\varphi\leqslant\psi+\pi,\\ -1 & \text{ailleurs.}\end{cases}$$

Il est évidemment possible de définir dans le tore T_0' tout entier un champ vectoriel continu $v_0(x)$, nul sur la surface de T_0' et conforme à la définition précédente sur la surface de T_0'''. Les composants $f_\nu(x)$, où $\nu=1,2,3$, du vecteur $v_0(x)$ sont des fonctions continues dans T_0'. Posons

$$k=\int_{\psi}^{\psi+\pi}\frac{d\varphi}{\Phi(\varphi)}.$$

On montre sans peine que $0<k<+\infty$ et que la zone d'émission du point (t^0,x^0) pour $x^0\epsilon X_3$ situé sur l_0, prise par rapport au système des équations différentielles

$$(3)\qquad \frac{dx_\nu}{dt}=f_\nu(x_1,x_2,x_3) \quad \text{où} \quad \nu=1,2,3,$$

coupe l'hyperplan $t=t^0+k$ le long d'un circuit dont la projection sur l'hyperplan X_3 est un parallèle du tore T_0'' passant par le point x^0.

5,3. Désignons par S le point $(^3/_2,0,0)\epsilon X_3$ et soumettons l'espace X_3 à la transformation $\boldsymbol{W}$:

$$x_1=3x_1'-3, \qquad x_2=3x_3', \qquad x_3=3x_2'.$$

Le tore T_0 se transforme en un tore $T_1=\boldsymbol{W}T_0$ dont le plan principal est le plan $x_2=0$ et dont le centre est situé sur la circonférence principale du tore T_0. On a $T_1\subset\overline{T_0-T_0'}$ et les surfaces des tores T_0 et T_1 se touchent suivant une circonférence qui est à la fois un méridien du tore T_0 et l'équateur du tore T_1. Nous définirons par récurrence trois suites de tores, en posant

$$T_{\mu+1}=\boldsymbol{W}T_\mu, \qquad T_{\mu+1}'=\boldsymbol{W}T_\mu', \qquad T_{\mu+1}''=\boldsymbol{W}T_\mu'', \quad \text{où} \quad \mu=0,1,2,\ldots$$

Les trois suites des tores convergent vers le point S lorsque μ tend vers l'infini. Les tores T_μ' sont disjoints et forment une chaîne dont les anneaux décroissent rapidement lorsque μ croît.

Posons encore $l_{\mu+1}=\boldsymbol{W}l_\mu$ et $l_{\mu+1}'=\boldsymbol{W}l_\mu'$. Considérons deux circuits: l_μ et un parallèle quelconque m du tore $T_{\mu+1}''$.

Nous allons montrer qu'il est impossible de réduire en un point le circuit m, en le déformant d'une manière continue dans le domaine $X_3 - l_\mu$. En effet, il existe évidemment une homéomorphie définie dans l'espace X_3 tout entier qui transforme simultanément l_μ en circonférence principale c du tore T''_μ et le parallèle m en équateur e du tore $T''_{\mu+1}$. Soit Q le centre de e. Le point Q est situé sur c. Transformons X_3 par les rayons réciproques par rapport au centre Q. L'image e' de e est une circonférence située sur un plan; désignons-le par σ. L'image c' de c est une droite perpendiculaire au plan σ. La droite c' perce le plan σ en un point P situé à l'intérieur de la circonférence e'. Supposons maintenant que e' se déforme d'une manière continue; il en sera de même de sa projection orthogonale e'' sur le plan σ. L'indicatrice de Kronecker de la courbe e'' par rapport au point P restera constante et e'' ne pourra pas se réduire en un point, tant que e' ne coupe pas la droite c'.

5,4. La transformation W^μ, qui consiste à effectuer la transformation W μ fois de suite, transforme le tore T'_0 en T'_μ; elle transforme aussi le champ vectoriel $v_0(x)$ défini dans T'_0 en un champ vectoriel $w^\mu(x)$ défini dans T'_μ. On entend par là que $x' = W^\mu(x)$ entraîne $|w_\mu(x')| = (1/3)^\mu |v_0(x)|$. Nous poserons dans T'_μ:

$$v(x) = (3/2)^\mu w_\mu(x), \quad \text{où} \quad \mu = 1, 2, \ldots$$

On vérifie aisément que

$$x' = W^\mu x \quad \text{entraîne} \quad |v(x')| = (1/2)^\mu |v(x)|.$$

En dehors des tores T'_μ, nous poserons dans tout l'espace X_3

$$v(x) = 0.$$

Le champ vectoriel $v(x)$ ainsi défini est continu dans X_3 et il en est de même de ces composants $f_\nu(x)$, où $\nu = 1, 2, 3$. On constate sans peine que, ξ étant un point situé sur le circuit l_μ, l'intersection de la zone d'émission du point (τ, ξ) par rapport au système des équations différentielles (3) avec tout hyperplan $t = \tau'$, où $\tau' > \tau + k(^2/_3)^\mu$, est un circuit dont la projection orthogonale sur l'hyperplan X_3 est un parallèle du tore T''_μ.

5,5. Un ensemble E étant contenu dans X_{3+1}, nous désignerons par E_τ la projection orthogonale sur l'hyperplan X_3 de l'intersection de l'ensemble E avec l'hyperplan $t = \tau$.

Soit C un continu situé dans l'espace X_{3+1} et satisfaisant aux conditions suivantes:

(α) C_{t_1} contient un certain voisinage du point S;

(β) les zones d'émission des points appartenant a C par rapport au système des équations différentielles (3) sont contenues dans C pour $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + 3k$;

(γ) Γ étant un circuit situé dans l'hyperplan $t = \tau$, où $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_1 + 3k$, on peut réduire Γ en un point par une déformation dans $W[t_1, \tau] \cdot C$, où $W[t_1, \tau]$ est un ensemble de points (t, x) tels que $t_1 \leqslant t \leqslant \tau$.

Nous allons montrer que, *dans ces conditions, l'ensemble C_{t_1+3k} contient un parallèle du tore T''_0.*

Supposons en effet, qu'un parallèle c du tore T''_μ soit situé dans C_τ, où $t_1 \leqslant \tau < \tau + k(^2/_3)^\mu \leqslant t_1 + 3k$, et que Γ soit la circonférence située dans l'hyperplan $t = \tau$ dont c est la projection orthogonale sur l'hyperplan X_3. Supposons enfin que le circuit $l_{\mu-1}$ n'ait aucun point commun avec la projection orthogonale de l'ensemble $C^* = C \cdot W[t_1, \tau]$ sur l'hyperplan X_3.

D'après la condition (γ), le circuit Γ se laisserait déformer en un point sans quitter l'ensemble C^*. La projection orthogonale de Γ sur l'hyperplan X_3 se déformerait dans le domaine $X_3 - l_{\mu-1}$ et se réduirait aussi en un point, ce qui est impossible d'après **5,3**. Par conséquent, la projection de l'ensemble C^* admet un point commun avec $l_{\mu-1}$. Il en résulte qu'il existe un nombre τ' tel que $t_1 \leqslant \tau' \leqslant \tau$ et que $C_{\tau'}$ admet un point commun avec $l_{\mu-1}$. Conformément à **5,4**, l'ensemble C_ϑ où $\tau' + k(^2/_3)^\mu \leqslant \vartheta \leqslant t_1 + 3k$ contient donc un parallèle du tore $T''_{\mu-1}$.

Ceci établi, il est facile de voir que si l'ensemble C_{t_1+3k} ne contenait aucun parallèle du tore T''_0, l'ensemble C_ϑ, où

$$t_1 \leqslant \vartheta \leqslant t_1 + 3k - \sum_{i=0}^{p} (^2/_3)^i k$$

ne contiendrait aucun parallèle du tore T''_p pour $p = 1, 2, \ldots$ L'ensemble C_{t_1} ne contiendrait donc aucun parallèle des tores T''_μ, contrairement à (α).

5,6. Revenons maintenant sur le théorème IV de **3,9** et ajoutons-y aux conditions 1°-5° la condition supplémentaire que les ensembles $(C_i)_\tau$ soient, pour $a < \tau < \beta$, homéomorphes à la sphère à n dimensions, le symbole $(C_i)_\tau$ désignant la projection sur l'hyperplan X_n de l'intersection de l'ensemble C_i avec l'hyperplan $t = \tau$.

Ainsi formulé, le théorème est cependant en défaut même pour $n = 3$. Posons, en effet, $P_0 = S$, $a < t_1$ et $\beta = t_1 + 3k$. Le système d'équations différentielles qui ont été construites dans **5,4** possède une intégrale unique partant du point S, à savoir la droite parallèle à l'axe

des t. Si le théorème en question était vrai pour $n=3$, il existerait une suite $\{C_i\}$ d'ensembles satisfaisant aux conditions 1^0-5^0 et à la condition supplémentaire qui vient d'être formulée. Or, cette condition entraîne évidemment la condition $(\bar{\gamma})$ de **5,5**, tandis que les conditions 2^0 et 5^0 entraînent $(\bar{\alpha})$ et $(\bar{\beta})$. Mais d'après **5,5**, les conditions $(\bar{\alpha})$, $(\bar{\beta})$ et $(\bar{\gamma})$ excluent 4^0. La nouvelle condition est donc incompatible avec les conditions 1^0-5^0 du théorème IV.

A plus forte raison, il n'est pas possible de modifier dans le même sens le théorème III.

On pourrait, cependant, chercher de généraliser le théorème VII dans un sens un peu différent, à savoir en exigeant, dans le cas de $n=3$, que les points frontières des ensembles C_i qui appartiennent à $W(a,\beta)$ forment des hypersurfaces régulières dont les hyperplans tangents ne sont jamais perpendiculaires à l'axe des t. Il est facile de montrer en s'appuyant sur **5,5** que c'est aussi impossible.

Le résultats négatifs de ce Chapitre se généralisent au cas de $n\geqslant 3$. Il suffit, en effet, d'examiner le système suivant d'équations différentielles:

$$\frac{dx_\nu}{dt}=f_\nu(x_1,x_2,x_3) \quad \text{où} \quad \nu=1,2,3,$$

$$\frac{dx_\lambda}{dt}=0 \quad \text{où} \quad \lambda=4,5,\ldots,n.$$

Dans ces équations, les fonctions $f_\nu(x)$ sont les mêmes que dans les équations (3). Nous renonçons à la discussion de ce cas, qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté essentielle.

Remarquons enfin que le théorème III cesse d'être vrai (déjà pour $n=2$) si l'on y ajoute la condition supplémentaire que les ensembles $(C_i)_\tau$ soient *convexes*. Il est possible de construire un exemple de deux équations différentielles satisfaisant à la condition de l'unicité de toutes les intégrales et tel que le théorème III, complété par la condition de la convexité des $(C_i)_\tau$ se montre faux, si l'on cherche de l'appliquer à ce système. La methode est semblable à celle que nous avons employée pour obtenir le système (3): les domaines en forme de la lettre $\subset$ y jouent le rôle des tores. Seulement la condition de l'unicité, imposée aux intégrales, exige certaines précautions.

Streszczenie

W pracy tej zebrane są wyniki badań nad zagadnieniem postawionym przez profesora T. Ważewskiego, mianowicie, czy pewien zespół warunków o charakterze geometrycznym, wystarczający dla jednotliwości całki układu równań różniczkowych zwyczajnych, jest jednocześnie konieczny. Okazało się, że po pewnej modyfikacji warunków odpowiedź jest twierdząca (Rozdział 3) [1]. Natomiast zespół warunków w pierwotnej, mocniejszej postaci konieczny jest tylko w przypadku jednego lub dwu równań (Rozdziały 4 i 5) [2].

Metody, którymi się posługuję, polegają na rozważaniu pewnych nierówności różniczkowych lub — co na jedno wychodzi — równań paratyngensowych S. K. Zaremby [3], które są ich naturalnym uogólnieniem. Dzięki temu osiąga się większą ogólność wyników.

Na początku przytaczam, między innymi, niektóre definicje i twierdzenia przygotowawcze, dotyczące równań paratyngensowych (Rozdziały 1 i 2), nadając im stosownie do potrzeb postać nieco odmienną, a niekiedy nieco ogólniejszą od tej, w jakiej zostały podane przez S. K. Zarembę.

Wyrażam mojemu profesorowi, Dr Tadeuszowi Ważewskiemu, głęboką wdzięczność za zachęcenie mnie do badań nad omawianym zagadnieniem i za życzliwe, cenne rady, jakich mi nie szczędził w toku tej pracy.

---

[1]) Wynik ten referowałem 9 października 1945 r. na posiedzeniu Oddziału Krakowskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego, p. Rocznik Polskiego Towarzystwa Matematycznego 19 (1946), str. 219.

[2]) Wyniki te referowałem 31 maja 1947 r. na V Zjeździe Matematyków Polskich w Krakowie; p. Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego (w przygotowaniu).

[3]) S. K. Zaremba, *O równaniach paratyngensowych*, Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego 9 (1935), str. 1-22.

Rozdział 1.

Przez X_n oznaczam przestrzeń euklidesową n-wymiarową, zawartą w przestrzeni euklidesowej $(n+1)$-wymiarowej X_{n1}, przez $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ lub krócej przez x — punkt przestrzeni X_n o współrzędnych $x_1, \ldots, x_n$, a przez $(t, x_1, \ldots, x_n)$ lub krócej przez (t, x) — punkt przestrzeni X_{n1}.

Niech m będzie zbiorem domkniętym, wypukłym i ograniczonym, zawartym w X_n. Zbiór M prostych, łączących punkty zbioru m z punktem $(-1, 0, \ldots, 0) \epsilon X_{n1}$, nazywam za S. K. Zarembą *miotełką*, sam zaś zbiór m — *śladem* tej miotełki. Przez odległość dwu miotełek rozumieć będę odległość w sensie Hausdorffa ich śladów. *Polem miotełek* lub krótko *polem* nazywam funkcję $M(P)$, która punktom pewnego zbioru $D \subset X_{n1}$ przyporządkowuje jednoznacznie miotełki i która spełnia warunek *górnej półciągłości w sensie zawierania*: jeżeli punkt P_0 należy do D, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ o tej własności, że gdy $P \epsilon D$ i $|P, P_0| < \delta$, to $M(P) \subset \bar{k}(M(P_0), \varepsilon)$. Symbol $|P, P_0|$ oznacza tu odległość punktów i może być także używany dla odległości zbiorów. Symbol $\bar{k}(M, r)$ oznacza miotełkę, której śladem jest zbiór $\bar{k}(m, r)$, złożony z punktów należących do X_n i leżących w odległości od m nie przekraczającej r. Wnętrze zbioru $\bar{k}(m, r)$ oznaczam tym samym symbolem bez kreski nad literą k, a otoczenie w przestrzeni X_{n1} — dużą literą K. Pole nazywam *ciągłym*, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że gdy $P \epsilon D$ i $|P, P_0| < \delta$, to $|M(P), M(P_0)| < \varepsilon$. Jeśli wszystkie miotełki pola redukują się do prostych, to musi ono być ciągłe; nazywam je *polem elementów liniowych*. Element liniowy, którego ślad jest środkiem ciężkości śladu pola $M(P)$, nazywam *centrum pola* $M(P)$. Centrum pola ciągłego, którego wszystkie miotełki zawierają elementy liniowe wewnętrzne, jest również polem ciągłym. Pole nazywam *ograniczonym*, jeśli jest zawarte w miotełce stałej. *Iloczyn* $\prod_{i=1}^{\infty} M_i(P)$ (w sensie mnogościowym) ciągu malejącego (w sensie zawierania) pól jest również polem. *Sumą* pól $M(P) \hat{+} M'(P)$ nazywam najmniejsze pole zawierające oba pola. Sumę można tworzyć dla dowolnej ilości pól. *Agregatem* $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i Z_i$ zbiorów zawartych w X_n nazywam zbiór środków ciężkości $x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x^i$ układów punktów takich, że $x^i \epsilon Z_i$, i opatrzonych masami $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$. Agregatem miotełek jest miotełka, której ślad jest agregatem śladów miotełek danych. Stąd dochodzi się już bezpośrednio do pojęcia *agregatu pól*. Dowodzi się, że agregat pól jest znowu polem, a agregat pól ciągłych — polem ciągłym, jeśli tylko współczynniki $\lambda_i(P)$ są funkcjami ciągłymi punktu P. Stosując te pojęcia i ich włas-

ności elementarne, dotychczas wspomniane, dowodzę następujących lematów:

Lemat I. *Niech A będzie zbiorem otwartym w przestrzeni X_{n1}, B i B' — podzbiorami A, domkniętymi względem A. Niech dalej $M(P)$ i $M'(P)$ będą polami określonymi w B i B', przy czym niech $M'(P)$ będzie polem ciągłym, którego wszystkie miotełki mają punkty wewnętrzne. Niech wreszcie $M(P) \underset{i}{\subset} M'(P)$, gdy $P \epsilon B \cdot B'$* [1]).

Przy tych założeniach istnieje takie pole $M''(P)$ ciągłe w A i taka funkcja $\varepsilon(P) > 0$ ciągła w A, że:

$$M(P) \subset M''(P), \quad gdy \quad P \epsilon B,$$

$$\bar{k}(M''(P), \varepsilon(P)) \underset{i}{\subset} M'(P), \quad gdy \quad P \epsilon B'.$$

Lemat II. *Przy założeniach lematu I istnieje ciąg pól $M_i(P)$, $i = 1, 2, \ldots$ spełniający następujące warunki:*

1° *$M_i(P)$ są ciągłe w A;*

2° *$M_i(P) \underset{i}{\subset} M'(P)$ w B';*

3° *$M_{i+1}(P) \underset{i}{\subset} M_i(P)$ w A;*

4° *$M_0(P) = \prod_{i=1}^{\infty} M_i(P)$ jest polem określonym w A i ciągłym w $A - B$;*

5° *$M(P) = M_0(P)$ w B.*

Dzięki lematowi II można, między innymi, przybliżać w obszarach otwartych dane pola polami ciągłymi lub też przedłużać na całą przestrzeń pola, dane na zbiorach domkniętych. Jako szczególny przypadek otrzymuje się stąd również twierdzenie pomocnicze zawarte w cytowanej pracy S. K. Zaremby, w którym jest mowa o przybliżaniu danego pola ciągiem pól malejącym na zbiorze domkniętym.

Lemat III. *Niech $t = F(x)$ będzie funkcją ciągłą określoną na zbiorze otwartym $B \subset X_n$ i niech $\varepsilon(x)$ oraz $\eta(x)$ będą funkcjami określonymi w B, których kresy górne są dodatnie na każdym podzbiorze domkniętym ograniczonym zbioru B.*

Przy tych założeniach istnieje funkcja $G(x)$ analityczna w B i spełniająca następujące warunki:

1° $|G(x) - F(x)| < \varepsilon(x)$;

2° *dla każdego wektora jednostkowego v zawartego w X_n zachodzą nierówności*

$$a(x) - \varepsilon(x) \leqslant \partial_v G(x) \leqslant b(x) + \varepsilon(x),$$

[1]) Znak zawierania wewnętrznego $\underset{i}{\subset}$ oznacza, że wszystkie punkty śladu $m(P)$ leżą *wewnątrz* śladu $m'(P)$.

gdzie $a(x)$ i $b(x)$ są odpowiednio kresami dolnym i górnym liczb pochodnych funkcji $F(x)$ w kierunku wektora v w otoczeniu $\mathrm{k}(x, \eta(x))$.

Dowód tego lematu opiera się na pewnym twierdzeniu Whitney'a [5]).

Rozdział 2.

Całką C pola $M(P)$ nazywam krzywą:

$$x = \varphi(t)$$

(używam tu symboliki wektorowej, w której jedno równanie oznacza w rzeczywistości n równań) o tej własności, że w każdym jej punkcie P paratyngens $\mathrm{Pt}(C, P)$ składa się z prostych równoległych do elementów miotełki $M(P)$. *Równaniem paratyngensowym* nazywa się warunek, aby krzywa C była całką pola $M(P)$. Jeśli pole $M(P)$ składa się z samych elementów liniowych, to równanie paratyngensowe jest równoważne układowi n równań różniczkowych $x' = f(t, x)$ o prawych stronach ciągłych. *Strefą emisji zbioru E* ze względu na pole $M(P)$ nazywam zbiór wszystkich punktów na całkach wychodzących z punktów zbioru E (dla t rosnącego); strefę tę oznaczam przez $Z^+(E, M)$. *Strefą absorpcji* $Z^-(E, M)$ nazywam zbiór wszystkich punktów na całkach docierających do punktów zbioru E (dla t rosnącego). Symbol $W[a, \beta)$, gdzie $a < \beta \leqslant +\infty$, oznacza zbiór punktów (t, x), dla których $a \leqslant t < \beta$. Analogicznie określa się $W[a, b]$ i t. d. Strefę emisji $Z^+(E, M)$ nazywam *regularną*, jeśli każda całka wychodząca z punktu $(\tau, \xi) \in E$ może być przedłużona na cały przedział $\tau \leqslant t < \beta$. Z podstawowych własności równań paratyngensowych wynika

Lemat IV. *Niech $M_i(P)$ będą polami określonymi w $W[a, \beta)$ dla $i = 1, 2, \ldots$ i niech $M_{i+1}(P) \subset M_i(P)$ oraz $M_0(P) = \prod_{i=1}^{\infty} M_i(P)$. Niech dalej E_i dla $i = 1, 2, \ldots$ tworzą ciąg malejący zbiorów domkniętych ograniczonych zawartych w $W[a, \beta)$ i niech strefa emisji $Z_0 = Z^+(E_0, M_0)$ zbioru $E_0 = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$ będzie regularna. Wreszcie, niech $\eta > 0$ i $a \leqslant b < \beta$.*

Przy tych założeniach

$$Z^+(E_0, M_0) = \prod_{i=1}^{\infty} Z^+(E_i, M_i),$$

strefy $Z^+(E_i, M_i)$ są dla dostatecznie dużych wskaźników i regularne w $W[a, b]$ oraz $W[a, b] \cdot Z^+(E_i, M_i) \subset W[a, b] \cdot \mathrm{K}(Z_0, \eta)$.

---

[5]) H. Whitney, *Analytic extension of differentiable functions defined in closed sets*, Transactions of the American Math. Soc. 36 (1934), str. 76. lemma 6.

Symbolem $\mathfrak{M}(P)$ oznaczam stożek utworzony przez wszystkie proste wychodzące z punktu P i równoległe do prostych miotełki $M(P)$. Symbolem $\mathfrak{M}^+(P)$ oznaczam półstożek odpowiadający wartościom $t \geqslant \tau$, przez $\mathfrak{M}^-(P)$ zaś — półstożek przeciwny, założywszy że $P=(\tau, x)$.

Wprowadzam następnie ważne dla całej pracy pojęcie *funkcji $F(x)$ poprzecznej względem pola $M(P)$*. Jest to mianowicie funkcja ciągła o wykresie zawartym w obszarze, w którym pole jest określone, i spełniająca warunki następujące:

1° jeżeli P należy do wykresu funkcji, to miotełka $M(P)$ zawiera element liniowy równoległy do osi t;

2° istnieją dwie funkcje dodatnie $\delta(x)$ i $\vartheta(x)$, takie, że gdy $x \epsilon B$ i $x' \epsilon \mathrm{k}(x, \delta(x))$, to kontyngens wykresu funkcji w punkcie $P'=(F(x'), x')$ i miotełka $\mathrm{k}(P, \delta(x))$ należąca do punktu $P=(F(x), x)$ nie zawierają prostych równoległych.

Z definicji tej wynika w szczególności, że części półstożków $\mathfrak{M}^+$ i $\mathfrak{M}^-$ zawarte w dostatecznie małym otoczeniu punktu P leżą po przeciwnych stronach wykresu funkcji F.

Lemat V. *Jeżeli funkcja $F(x)$ określona w obszarze otwartym $B \subset X_n$ jest poprzeczna do pola $M(P)$ określonego w $D \subset X_{n1}$, to istnieje w B funkcja analityczna $G(x)$ poprzeczna do pola $M(P)$.*

Lemat VI. *Niech funkcje $\beta(x)$ i $\gamma(x)$ dodatnie w B oraz wektor jednostkowy $w(x)$ będą tak dobrane, żeby kresy dolne tych funkcji były dodatnie na każdym podzbiorze domkniętym ograniczonym zbioru B i żeby $\partial_{w(x)} F(x') > \gamma(x)$, gdy $x' \epsilon \mathrm{k}(x, \beta(x))$. Wtedy przy założeniach lematu V istnieje funkcja $G(x)$ analityczna w B, poprzeczna do pola $M(P)$ i której pochodne cząstkowe nie są równocześnie zerami w żadnym punkcie zbioru B.*

Dowody lematów V i VI opierają się na definicji funkcji poprzecznej i na lemacie III.

Lemat VII. *Jeżeli funkcja $F(x)$ określona na całej hiperpłaszczyźnie X_n jest poprzeczna do pola $M(P)$ określonego w $\mathrm{W}[a, \beta)$, a punkt P jest jakimkolwiek punktem wykresu funkcji $F(x)$, to strefa emisji $Z^+(P, M)$ jest zawarta wewnątrz, strefa zaś absorpcji $Z^-(P, M)$ — zewnątrz obszaru $F(x) \leqslant t < \beta$, z wyjątkiem samego punktu P.*

Lemat VIII. *Jeżeli $M(P)$ i $M'(P)$ są określone w obszarze otwartym $D \subset X_{n1}$, przy czym $M'(P)$ jest polem ciągłym, $M(P) \underset{i}{\subset} M'(P)$ i $E \subset D$, to dla punktu brzegowego P_0 strefy $Z^+(E, M')$ jest $Z^+(P_0, M) \underset{i}{\subset} Z^+(E, M')$ i strefa $Z^-(P_0, M)$ leży zewnątrz $Z^+(E, M')$, z wyjątkiem punktu P_0.*

Dowody opierają się na zasadniczych własnościach pól i całek.

Rozdział 3.

Twierdzenie 1. *Niech $M(P)$ będzie polem określonym w $W[a,\beta)\subset X_{n1}$ i niech strefa emisji $Z^+(P_0,M)$, gdzie $P_0=(a,x_0)$, będzie regularna. Załóżmy poza tym, że M_0 jest jakąkolwiek miotełką zawierającą $M(P_0)$. Wówczas dla każdego $\eta>0$ istnieje ciąg zbiorów C_i, $i=1,2,\ldots$, spełniających warunki:*

1° *C_i jest kontinuum względem $W[a,\beta)$, $C_i\subset W[a,\beta)$ i wnętrze C_i jest homeomorficzne z kulą otwartą $(n+1)$-wymiarową;*

2° *Dla każdego $i=1,2,\ldots$ istnieje takie otoczenie K_i punktu P_0, że $\mathfrak{M}_0^+\cdot K_i\subset C_i\cdot K_i$ i $C_i\cdot K_1\subset\mathfrak{M}_\eta^+\cdot K_1$, gdzie $\mathfrak{M}_0^+$ jest półstożkiem o wierzchołku P_0, odpowiadającym polu M_0, $\mathfrak{W}_\eta^+$ zaś — analogicznym półstożkiem dla pola $\bar{k}(M_0,\eta)$;*

3° *$Z^+(P_0,M)\underset{i}{\subset} C_i$ i $C_{i+1}\underset{i}{\subset} C_i$, $i=1,2,\ldots$ (z wyjątkiem punktu P_0);*

4° $\prod_{i=1}^{\infty} C_i=Z^+(P_0,M)$;

5° *jeżeli P jest punktem brzegowym zbioru C_i należącym do $W[a,\beta)$, to $Z^+(P,M)\underset{i}{\subset} C_i$ i $Z^-(P,M)$ leży zewnątrz C_i (z wyjątkiem P);*

6° *punkty brzegowe zbioru C_i należące do $W[a,\beta)$ tworzą hiperpowierzchnię analityczną, której jedynym punktem osobliwym jest P_0.*

W dowodzie można oczywiście przyjąć $a=0$, $\beta=+\infty$, $P_0=(0,0,\ldots,0)$ i $M(P_0)=M_0$, co nietrudno osiągnąć przez odpowiednią zmianę współrzędnych i zmianę pola $M(P)$ w punkcie P_0. Stosując do pola $M(P)$ lemat II, otrzymujemy ciąg pól M_i malejący do $M(P)$. Pisząc $E_i=Z^+(P_0,M_i)$ będziemy mieli $E=\prod_{i=1}^{\infty}E_i=Z^+(P_0,M)$ na mocy lematu IV i $E_{i+1}\underset{i}{\subset}E_i$ (z wyjątkiem P_0) na mocy lematu VII. Stosując lemat IV i ewentualnie odrzucając niektóre wyrazy ciągu $M_i(P)$, osiągamy to, że $E_i\cdot W[0,i]\subset K\cdot W[0,i]$, gdzie $K=\bar{K}(E,1)$. Kontinua $E_i'=E_i+W[i,+\infty)$ spełniają warunki $\prod_{i=1}^{\infty}E_i'=E$ i $E_{i+1}\underset{i}{\subset}E_i$ (z wyjątkiem P_0). Po ewentualnym odrzuceniu pewnej ilości początkowych wyrazów ciągu E_i', pozostałe spełniają — jak łatwo okazać — warunki 2°-5°.

Oznaczam przez Σ_i brzeg zbioru E_i' bez punktu P_0. Dla $R\in\Sigma_i$ oznaczam przez $r(R)$ minimum odległości R od powierzchni Σ_j dla $i\neq j$, a przez $r'(Q)$ taką liczbę, by każda całka pola $M_{i+1}(P)+\bar{k}(T,1)$ wychodząca z pewnego punktu otoczenia $\bar{K}(Q,r'(Q))$, gdzie Q jest punktem hiperpłaszczyzny $t=i$, mogła być przedłużona aż do tej hiperpłaszczyzny; T oznacza tu element liniowy leżący na osi t.

Oznaczam w końcu przez $r''(R)$ odwrotność odległości punktu R od początku układu współrzędnych i przyjmuję

$$\varrho(R)=\begin{cases}\min\ (r(R),1), & \text{gdy } R\epsilon K,\\ \min\ (r(R),r'(R),r''(R)), & \text{gdy } R \text{ non}\epsilon K.\end{cases}$$

Wreszcie oznaczam przez H_i sumę otoczeń $K(R,\varrho(R)/6)$ i przez H'_i sumę otoczeń $K(R,\varrho(R)/3)$, gdzie $R\epsilon\Sigma_i$. Zbiory H'_i są rozłączne dla różnych wartości i. Ponadto $\Sigma_i\underset{i}{\subset}H_i\underset{i}{\subset}H'_i\subset W(0,+\infty)$ dla $i=2,3,\ldots$.

Ustalmy teraz wskaźnik i. Niech $u(P)$ będzie funkcją ciągłą i nieujemną w X_n, równą 1 w $H=H_i+K(E,1)$ i równą 0 poza $H'=H'_i+K(E,2)$. Agregat $M'(P)=u(P)\cdot M_{i+1}(P)+(1-u(P))\cdot T_1$, gdzie $T_1=k(T,1)$, jest polem ciągłym i

$$M'(P)=\begin{cases}M_{i+1}(P) & \text{w } H,\\ T_1 & \text{poza } H'.\end{cases}$$

Całki pola $M'(P)$ są określone w całym przedziale $0\leqslant t<+\infty$. Centrum pola $M'(P)$ jest polem ciągłym elementów liniowych. Odpowiednie równanie paratyngensowe jest więc równoważne układowi równań różniczkowych $x'_\nu=f_\nu(t,x)$, gdzie $\nu=1,2,\ldots,n$. Aproksymując prawe strony tych równań funkcjami analitycznymi $g_\nu(t,x)$ — co jest możliwe na podstawie cytowanego twierdzenia Whitney'a — otrzymujemy układ równań różniczkowych $x'_\nu=g_\nu(t,x)$, którego pole elementów liniowych jest zawarte wewnątrz pola $M'(P)$. Oznaczam teraz przez U przekształcenie analityczne określone w $W[0,+\infty)$, które przekształca całki tego układu równań różniczkowych w proste równoległe do osi t, nie zmieniając wartości odciętych t poszczególnych punktów. Dla uproszczenia oznaczam figury przekształcone, np. $U(E'_i)$, $U(H)$, tymi samymi symbolami, jakie miały przed przekształceniem, a więc przez E'_i, H itd.

Równocześnie z tym przekształceniem punktowym miotełka $M'(P)$ przekształca się liniowo w każdym punkcie z osobna tak, że całki pola przekształconego są obrazami odpowiednich całek pola przed przekształceniem. To samo dotyczy i innych pól. Dla pól przekształconych również pozostawiamy oznaczenia pierwotne.

Zbiór Σ_i przekształca się — jak łatwo okazać — w powierzchnię $t=F(x)$, gdzie $F(x)$ jest funkcją poprzeczną względem pola $M'(P)$, określoną w X_n wszędzie, z wyjątkiem punktu P_0. Stosując teraz lemat V do funkcji $F(x)$ w odpowiedni sposób, otrzymujemy funkcję analityczną $G(x)$, poprzeczną względem pola $M'(P)$, a tym samym względem pola $M(P)$, i taką, że jeśli ją uzupełnimy wartością 0 w punkcie P_0, to zbiór punktów Γ_i, określony nierównością $t\geqslant G(x)$

będzie spełniał warunki 1^0-4^0 i 6^0 względem pola $M(P)$ przekształconego. Warunek 5^0 będzie również spełniony na mocy lematu VII.

Wszystkie te własności będzie oczywiście miał względem pola $M(P)$ nieprzekształconego zbiór $C_i = U^{-1}\Gamma_i$ otrzymany ze zbioru Γ_i, przez transformację odwrotną względem U. Stąd już wynika teza twierdzenia, gdyż za i można było przyjąć dowolną liczbę naturalną.

Twierdzenie 1 może być poddane różnym modyfikacjom, w szczególności można rozważać pole $M(P)$ w warstwie $W[a,b]$; wtedy ciąg C_i jest zbieżny jednostajnie do $Z^+(P_0, M)$, jednakże warunek 1^0 musi ulec odpowiedniej zmianie. Jeżeli strefa emisji $Z^+(P_0, M)$ redukuje się do jednej jedynej całki wychodzącej z P_0, to twierdzenie 1 można uważać za warunek konieczny jednotliwości tej właśnie całki. Natychmiastowy jest dowód, że również i na odwrót: jeśli zachodzą warunki 1^0-6^0, w których jedynie należy zastąpić $Z^+(P_0, M)$ literą I_0, przedstawiającą całkę wychodzącą z P_0, i jeżeli $M(P_0) \subset M_0$, to I_0 jest jedyną całką wychodzącą z P_0.

W ten sposób otrzymuje się *zespół warunków koniecznych i dostatecznych dla jednotliwości całki* szczególnej równania paratyngensowego, a tym samym warunek konieczny i dostateczny jednotliwości całki dla układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Z twierdzenia 1 wynika łatwo następujące:

Twierdzenie 2. *Niech $M(P)$ będzie polem określonym w $W(a,\beta)$, gdzie $a<\beta$, ograniczonym w otoczeniu punktu $P_0=(a, x^0)$ i niech łuk C_0:*

$$x=\varphi(t), \qquad a \leqslant t < \beta$$

będzie w przedziale $a<t<\beta$ całką pola $M(P)$.

Wówczas na to, żeby C_0 było jedyną całką, docierającą do punktu P_0, potrzeba i wystarcza, aby istniał ciąg zbiorów C_i spełniający warunki 1^0 i 3^0-6^0, w których za $Z^+(P_0, M)$ należy podstawić C_0 oraz przyjąć $M_0 = \bar{k}(M^*, \delta)$, gdzie $\delta > 0$ i $M(P) \subset M^*$ w otoczeniu punktu P_0, a ponadto warunek następujący (zamiast 2^0):

$2'$ Dla każdego wskaźnika i istnieje takie otoczenie K_i punktu P_0, że $K_i \cdot W(a,\beta) \subset C_i$.

Warunek, żeby pole $M(P)$ było ograniczone w otoczeniu punktu P_0 jest tu niezbędny, co łatwo wykazać przykładem pola, które nie mając tej własności, nie spełnia tezy twierdzenia.

Rozdział 4.

Ograniczam się w tym rozdziale do przypadku $n=2$. Wykazuję, że można wtedy warunki konieczne i dostateczne jednotliwości, dowiedzione w Rozdziale 3, uzupełnić dodatkowym warunkiem:

7° *Przekroje brzegu zbioru C_i płaszczyznami $t=\tau$, gdzie $a<\tau<\beta$ — o ile istnieją — są obwodami analitycznymi.*

Metoda podana w dowodzie twierdzenia 1 nie zapewnia nam tego. Dlatego musimy ją dość znacznie zmienić. Załóżmy w tym celu, że I_0 jest jedyną całką wychodzącą z punktu $P_0=(0,\ldots,0)$ i należącą do pola $M(P)$ określonego w $W[0,+\infty)$; określmy ciągi $M_i(P)$, E_i i E'_i tak jak w dowodzie twierdzenia 1. Niech następnie X^τ będzie płaszczyzną $t=\tau$ (prostopadłą do osi t) i niech $E_i^\tau=E'_i\cdot X^\tau$. Zbiór $Z=X^\tau-E_i^\tau$ składa się z pewnej ilości obszarów otwartych, zawartych w X^τ, z których tylko jeden jest nieograniczony. Pozostałe, ograniczone, włączamy do E_i^τ, tworząc zbiór $E_i^{*\tau}$ [6]). Sumę wszystkich $E_i^{*\tau}$ dla $0\leqslant\tau\leqslant i$ oznaczamy przez E_i^*. Łatwo dowieść, że $E_{i+1}^*\underset{i}{\subset}E_i^*$ (z wyjątkiem P_0) i że $\prod_{i=1}^{\infty}E_i^*=I_0$. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 1, poddajemy obszar $W[0,+\infty)$ transformacji U i zachowujemy tę samą symbolikę dla zbiorów przekształconych.

Ustaliwszy wskaźnik i, możemy skonstruować [7]) funkcję $F^2(x)$ mającą następujące własności: wykres tej funkcji jest powierzchnią wielościenną zawartą w obszarze $[H\cdot W(i-1,i)+E_i\cdot W(0,i)]-E'_{i+1}$ (z wyjątkiem P_0) i złożoną z trójkątów; funkcja $F^2(x)$ ma jedyne minimum (równe 0) w punkcie P_0 i jest poprzeczna względem pola M_{i+1}.

Dowodzi się, że własności te zachowują się, jeśli poddać funkcję F^2 przekształceniu polegającemu na zastąpieniu skończonej liczby ścian wykresu wielobokami dostatecznie bliskimi (także co do nachylenia). Dzięki temu można skonstruować nową funkcję $F^3(x)$, mającą wszystkie wymienione własności funkcji $F^2(x)$, taką jednak, że wszystkie naroża jej wykresu leżą w różnych poziomach.

Oznaczmy przez $e(F^3,\tau)$ rzut na płaszczyznę X_2 przekroju wykresu funkcji F^3 płaszczyzną $t=\tau$. Rzut ten jest dla $\tau\geqslant i$ zbiorem pustym, dla $\tau=0$ redukuje się do punktu, a dla $0<\tau<i$ jest wielobokiem, mogącym posiadać punkty izolowane, który wyznacza w X_2 pewną ilość obszarów wielobocznych. Te spośród nich, gdzie $F^3(x)-\tau>0$, nazwijmy dodatnimi, pozostałe zaś — ujemnymi. Dla τ bliskiego zeru istnieje jeden tylko obszar ujemny ograniczony i jeden obszar dodatni nieograniczony. Gdy τ wzrasta, obszar ujemny rozszerza się i może tworzyć wypustki, które potem łączą się, zamykając nowe obszary dodatnie. Ponieważ funkcja F^3 nie posiada minimów poza P_0, więc obszar ujemny jest zawsze tylko jeden. W dalszym

[6]) Analogiczne kontinua rozpatrywał T. Ważewski w pracy *Zur Theorie des Unitätsproblems für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Math. Zeitschr. 35 (1832), str. 560.

[7]) Ten i inne szczegóły dowodu, tu pominięte, znajdują się w tekście francuskim tej pracy w tymże tomie, str. 77-89.

ciągu musimy się jednak pozbyć także obszarów dodatnich ograniczonych tak, by dla każdego τ istniał jeden tylko obszar dodatni nieograniczony. Okazuje się, że jest to możliwe: istnieje mianowicie funkcja $F^4(x)$ poprzeczna względem pola $M_{i+1}(P)$, której wykres zawarty wewnątrz obszaru

$$H^{**}=[H\cdot W(i-1,i)+E_i^*\cdot W(0,i)]-E_{i+1}^*$$

(z wyjątkiem P_0) składa się z trójkątów i która poza jedynym minimum w P_0 nie posiada extremów lokalnych. Zbiory $e(F^4,\tau)$ są dla $0<\tau<i$ pojedynczymi obwodami wielobocznymi.

Najistotniejszą częścią dowodu jest pozbycie się naroży więcej niż trójściennych wykresu tej funkcji. Dowodzi się mianowicie, że istnieje funkcja $F^5(x)$ mająca wszystkie wymienione własności funkcji F^4 z tą tylko odmianą, że ściany jej wykresu mogą być wielobokami o dowolnej ilości wierzchołków, który w zamian za to ma tylko naroża trójścienne. Dowód polega na zastępowaniu pojedynczego naroża wielościennego przez skończoną ilość naroży trójściennych z zachowaniem istotnych własności funkcji F^4. Trudność leży w tym, że dane naroża nie muszą być wypukłe.

Funkcja F^5 spełnia — jak łatwo okazać — założenia lematu VI, można ją więc zastąpić funkcją $G(x)$ analityczną (z wyjątkiem P_0), poprzeczną względem pola M_{i+1}, której wykres zawiera się wewnątrz H^{**} (z wyjątkiem P_0) i której pochodne cząstkowe nie są równocześnie zerami w żadnym punkcie płaszczyzny X_2 różnym od P_0. Przekroje poziome wykresu tej funkcji są analitycznymi obwodami pojedynczymi.

Dla zakończenia dowodu wystarcza oznaczyć przez Γ_i obszar $t\geqslant G(x)$ dla $x\epsilon X_2$ i poddać wszystkie rozważane figury i pola transformacji U^{-1}, odwrotnej względem U. Przyjmując jeszcze $C_i=U^{-1}\Gamma_i$, otrzymuje się żądany ciąg kontinuów, zważywszy że i jest dowolną liczbą naturalną.

Rozdział 5.

Chcąc uogólnić wynik uzyskany w Rozdziale 4 na przestrzenie o dowolnej ilości wymiarów, należy się zdecydować, jak sformułować warunek 7° dla $n>2$. Rozpatruję dwie możliwości nasuwające się w sposób naturalny, a mianowicie warunek:

7′ Przekroje kontinuum C_i hiperpłaszczyznami $t=\tau$, dla $\alpha<\tau<\beta$, są homeomorficzne z kulą n wymiarową:

oraz warunek:

7″ Część brzegu kontinuum C_i zawarta w $W(\alpha,\beta)$ jest hiperpowierzchnią regularną, której hiperpłaszczyzny styczne nie są nigdzie prostopadłe do osi t.

Okazuje się, że *twierdzenie udowodnione w Rozdziale 4 nie jest już prawdziwe dla* $n=3$, *jeśli warunek* 7^0 *zastąpić przez warunek* $7'$ *lub* $7''$.

Dowodzi tego przykład układu trzech równań różniczkowych

$$x'_\sigma = f_\sigma(x_1, x_2, x_3), \qquad \sigma = 1, 2, 3, \tag{1}$$

których prawe strony są funkcjami ciągłymi w całej przestrzeni $X_{3,1}$, niezależnymi od zmiennej t, względem której się różniczkuje, i takimi, że nie istnieje dla układu (1) ciąg kontinuów C_i, spełniający warunki 1^0-6^0 z Rozdziału 3 i warunek $7'$ lub $7''$ względem pewnej szczególnej całki jednotliwej układu.

Podstawiając w równaniu

$$(\varrho - R)^2 + (x_3)^2 = r^2,$$

gdzie $\varrho^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2$, kolejno $r = 1/2$, $1/6$ i $1/12$ oraz przyjmując $R = 1$, otrzymujemy trzy torusy T_0, T'_0 i T''_0. Powierzchnia ostatniego z nich może być przedstawiona za pomocą równań:

$$x_1 = R\cos\varphi + r\cos\varphi\cdot\cos\psi,$$

$$x_2 = R\sin\varphi + r\sin\varphi\cdot\cos\psi,$$

$$x_3 = r\sin\psi,$$

gdzie $R = 1$, $r = 1/12$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ i $0 \leqslant \psi < 2\pi$. Biorąc $\psi = \varphi$ i $\psi = \varphi + \pi$, otrzymujemy dwie krzywe zamknięte l_0 i l'_0. Oznaczamy następnie przez $V(\varphi, \psi)$ wektor jednostkowy styczny do południka torusa T''_0 i skierowany w stronę rosnącego kąta φ. Przyjmujemy dalej

$$v_0(x) = v_0(\varphi, \psi) = \Phi(\varphi)\{R + \cos\psi\}V(\varphi, \psi),$$

gdzie

$$\Phi(\varphi) = \varepsilon\sqrt{(\varphi - \psi)(\psi + \pi - \varphi)} \qquad \text{i} \qquad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{dla } \psi \leqslant \varphi \leqslant \varphi + \pi, \\ -1 & \text{poza tym odcinkiem.} \end{cases}$$

Pole wektorowe $v_0(x)$, określone już na powierzchni torusa T''_0, może być oczywiście przedłużone w sposób ciągły na cały torus T'_0 tak, by było zerem na całej jego powierzchni.

Niech $k = \int_\psi^{\psi+\pi} d\varphi/\Phi(\varphi)$ i $x^0 \epsilon l_0$. Dowodzi się z łatwością, że strefa emisji punktu (t^0, x^0), ze względu na układ (1), gdzie prawe strony są składowymi wektora $v_0(x)$, przecina się z płaszczyzną $t = t^0 + k$ wzdłuż obwodu, którego rzut na X_3 jest równoleżnikiem torusa T''_0, przechodzącym przez x^0.

Oznaczamy następnie przez S punkt $(3/2, 0, 0) \epsilon X_3$ i poddajemy przestrzeń X_3 transformacji W:

$$x_1 = 3x_1 - 3, \qquad x_2 = 3x'_3, \qquad x_3 = -3x'_2.$$

Określamy teraz rekurencyjnie trzy ciągi torusów:

$$T_{\mu+1} = W(T_\mu), \qquad T'_{\mu+1} = W(T'_\mu) \qquad \text{i} \qquad T''_{\mu+1} = W(T''_\mu),$$

gdzie $\mu = 1, 2, \ldots$ Ciągi te dążą do S, gdy $\mu \to \infty$. Przyjmujemy jeszcze $l_{\mu+1} = Wl_\mu$ oraz $l_{\mu+1} = Wl'_\mu$. Transformacja W^μ, która — jak łatwo dostrzec — przekształca T'_0 w T'_μ, przekształca pole $v_0(x)$ w pewne pole wektorowe $w_\mu(x)$, określone w T'_μ. Niech

$$v(x) = \begin{cases} (3/2)^\mu w_\mu(x), & \text{dla } x \in T'_\mu \text{ gdzie, } \mu = 1, 2, \ldots. \\ 0 & \text{poza torusami } T'_\mu. \end{cases}$$

Określone w ten sposób pole wektorowe jest ciągłe i układ równań (1), którego prawe strony są składowymi tego pola, ma — jak nie trudno dowieść — następującą własność:

Jeśli kontinuum $C \subset X_{3,1}$ spełnia warunki:

(α) *rzut C_{t_1} przekroju C płaszczyzną $t = t_1$ na X_3 obejmuje pewne otoczenie punktu S;*

(β) *strefy emisji ze względu na układ* (1) *punktów należących do C są zawarte w C dla $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + 3k$;*

(γ) *każdy obwód Γ leżący na hiperpłaszczyźnie $t = \tau$, gdzie $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_1 + 3k$, można przekształcić w sposób ciągły w punkt, pozostając w obrębie C;*

to wówczas zbiór C_{t_1+3k} zawiera równoleżnik torusa T''_0.

Z drugiej strony — jak łatwo zauważyć — prosta przez S równoległa do osi t jest całką jednotliwą układu (1).

Z tego wynika już niemal bezpośrednio, że równania (1) stanowią przykład, obalający możliwość zastąpienia dla $n = 3$ warunku 7° przez warunek 7'. Można okazać, że podobnie ma się rzecz z warunkiem 7''.

Oba ostatnie wyniki uogólniają się na przestrzenie o większej liczbie wymiarów. Jako przykład może służyć układ równań różniczkowych:

$$\frac{dx_v}{dt} = \begin{cases} f_v(x_1, x_2, x_3) & \text{dla } v = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{dla } v = 4, 5, \ldots, n. \end{cases}$$

Lublin, 16 lipca 1948 roku.

Drukarnia Uniwersytetu i Politechniki we Wrocławiu.