

ANNALES  
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE - SKŁODOWSKA  
LUBLIN — POLONIA

VOL. I, Nr 2

SECTIO A

1946

Z Seminarium Matematycznego II Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego U. M. C. S. w Lublinie  
Kierownik: prof. dr Jan G. Mikusiński

Jan G. - Mikusiński

**Sur l'équation différentielle  $y^{(6)} + y = 0$  <sup>1)</sup>**  
**(O równaniu różniczkowym  $y^{(6)} + y = 0$ )**

**Introduction.** Considérons l'ensemble  $E$  des intégrales  $y = \varphi(x)$  de l'équation

$$y^{(n)} + A(x)y = 0 \quad [A(x) = \text{fonction réelle, continue}]$$

telles que  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi'(x) > 0$  dans le voisinage droit du point  $x = 0$ . Faisons correspondre à chaque intégrale  $\varphi(x)$  de l'ensemble  $E$  un nombre positif  $l_\varphi$  tel que  $(0, l_\varphi)$  soit le plus grand intervalle, où  $\varphi(x) > 0$ .

Désignons par  $\lambda_n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) la borne supérieure des  $l_\varphi$  dans le cas où  $A(x) \equiv 1$ . Pour  $n = 2, 3, 4, 5$  on trouve les valeurs approchées:

$$\lambda_2 \sim 3,14, \quad \lambda_3 \sim 4,23, \quad \lambda_4 \sim 8,88, \quad \lambda_5 \sim 9,67^2).$$

L'évaluation du nombre  $\lambda_6$  est le sujet de cet article.

1. Nous démontrerons que les distances entre les zéros successifs de toutes les intégrales de l'équation de sixième ordre

$$(1) \quad y^{(6)} + y = 0$$

sont  $\leq 5\pi$  <sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Le résultat énoncé dans cet article a été obtenu en 1943, il n'a pu être publié plus tôt à cause de l'occupation allemande.

<sup>2)</sup> En cherchant la valeur de  $\lambda_2$  on ne trouve aucune difficulté. Quant à celles de  $\lambda_3$  et de  $\lambda_4$  voir p. e. mon article „Sur les intégrales de quelques équations différentielles linéaires”, (ces Annales pp. 29—35). La méthode d'évaluation de  $\lambda_5$  n'a pas encore été publiée.

<sup>3)</sup> D'après l'article „Sur l'inégalité différentielle  $|f^{(n)}(x)| \geq m |f(x)|$ ” [Comptes Rendus, Paris, 222, 359—361 (1946)] on trouve que ces distances sont inférieures à  $22\sqrt[6]{71} \sim 91$ . La valeur  $5\pi \sim 15,7$  est évidemment beaucoup plus précise.

Pour le démontrer, on n'a pas besoin de considérer toutes les intégrales de cette équation, il suffit de se borner à celles qui sont des fonctions paires. De plus, on n'a à considérer, dans cette classe restreinte des intégrales, que les moindres zéros positifs (et les zéros négatifs de la même valeur absolue). Cela résulte, en effet, du lemme suivant:

**Lemme 1.** Si  $x_1 < x_2$  sont deux zéros consécutifs d'une intégrale quelconque de (1), il existe toujours une intégrale  $y_0(x)$  de la même équation, qui est une fonction paire, différente de zéro pour  $x=0$ , et dont le moindre zéro positif est égal à  $\frac{x_2 - x_1}{2}$ .

On vérifie, en effet, aisément, en posant  $y_0(x) = y\left(x + \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + y\left(-x + \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ , que cette fonction  $y_0(x)$  satisfait à toutes les conditions requises.

La théorie générale des équations différentielles à coefficients constants permet de trouver la forme explicite d'une intégrale paire de (1), différente de zéro pour  $x=0$ . La voici:

$$(2) \quad y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sh} \frac{x\sqrt{3}}{2} \sin \frac{x}{2} + c_3 \operatorname{ch} \frac{x\sqrt{3}}{2} \cos \frac{x}{2} \quad ^1);$$

les constantes  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  sont soumises à une condition unique  $c_1 + c_3 \neq 0$ .

En tenant compte de ce que nous venons de dire, notre théorème se ramène au lemme suivant:

**Lemme 2.** L'équation

$$(3) \quad y(x) = 0,$$

où  $y(x)$  a la forme (2), possède au moins une racine dans l'intervalle

$$0 < x \leq \frac{5\pi}{2}.$$

**Démonstration.** On peut supposer que  $c_1 \geq 0$  [dans le cas contraire on n'aurait qu'à multiplier  $y(x)$  par  $-1$ ]. Celà posé, nous distinguerons les 4 cas suivants:

1<sup>o</sup> lorsque  $c_2 \geq 0$ ,  $c_3 \geq 0$ , on a  $y(0) > 0$ ,  $y\left(\frac{5\pi}{2}\right) \leq 0$ ,

2<sup>o</sup> lorsque  $c_2 \leq 0$ ,  $c_3 \geq 0$ , on a  $y(0) > 0$ ,  $y(\pi) \leq 0$ ,

3<sup>o</sup> lorsque  $c_2 \geq 0$ ,  $c_3 \leq 0$ , on a  $y(2\pi) \geq 0$ ,  $y(3\pi) \leq 0$ ,

4<sup>o</sup> lorsque  $c_2 \leq 0$ ,  $c_3 \leq 0$ , on a  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 0$ ,  $y(2\pi) \geq 0$ .

La fonction  $y(x)$  étant continue, on a donc, en désignant par  $x_0$  la moindre racine positive de l'équation (3), respectivement

<sup>1)</sup> sh = sinus hyperbolicus, ch = cosinus hyperbolicus.

$$x_0 \leq \frac{5\pi}{2}, \quad x_0 \leq \pi, \quad x \leq 3\pi, \quad x \leq 2\pi$$

dans les cas considérés. On voit que  $x_0 \leq \frac{5\pi}{2}$  dans tous les cas à l'exception, tout au plus, de 3<sup>o</sup>. Nous montrerons qu'il est possible, dans le cas 3<sup>o</sup> également, c'est-à-dire pour  $c_1 \geq 0$ ,  $c_2 \geq 0$  et  $c_3 \leq 0$ , d'améliorer la limite supérieure de  $x_0$  jusqu'à  $\frac{5\pi}{2}$ . En effet, on a à distinguer ici 2 cas que voici :

a)  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 0$ .

b)  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ :

Comme  $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) \geq 0$ , on a dans le cas a) sûrement  $x_0 \leq \frac{3\pi}{2}$ . Il ne reste donc à considérer que le second cas. En vertu de (2) on peut écrire l'inégalité b) sous la forme

$$c_2 \operatorname{sh} \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + c_3 \operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} > 0,$$

d'où

$$(4) \quad -c_3 < c_2 \operatorname{th} \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \quad 1).$$

En profitant des propriétés des fonctions sinus et cosinus, on peut écrire

$$(5) \quad y\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -c_2 \operatorname{sh} \frac{5\pi\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - c_3 \operatorname{ch} \frac{5\pi\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et, en vertu de (4),

$$y\left(\frac{5\pi}{2}\right) < -\frac{c_2}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} \frac{5\pi\sqrt{3}}{4} \cdot \left( \operatorname{th} \frac{5\pi\sqrt{3}}{4} - \operatorname{th} \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \right).$$

La fonction tangens hyperbolicus étant croissante, l'expression entre les parenthèses est positive et l'on a  $y\left(\frac{5\pi}{2}\right) < 0$ . Il s'en suit, en vertu de  $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) > 0$ , qu'il existe dans l'intervalle  $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$  une racine au moins de l'équation (3).

Le théorème est ainsi démontré entièrement.

2. On voit d'après le numéro précédent que  $\lambda_6 \leq 5\pi$ . D'autre part on peut vérifier que la fonction

$$y_0(x) = \varepsilon \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sh} \frac{(x - 2\pi)\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{x}{2} - \pi\right),$$

où  $\varepsilon$  est une constante positive suffisamment petite, est une intégrale

<sup>1)</sup> th = tangens hyperbolicus.

de (1) qui s'annule pour  $x = 0$  et qui est positive  $0 < x \leq 4\pi$ . En vertu de la définition de  $\lambda_0$  on est donc conduit à l'inégalité

$$4\pi \leq \lambda_0 \leq 5\pi.$$

Nous exposerons maintenant une méthode qui permet de renfermer  $\lambda_0$  dans un intervalle beaucoup plus étroit, notamment dans l'intervalle :

$$15,47 < \lambda_0 < 15,48.$$

Nous démontrons d'abord que  $\lambda_0 < 15,48$ . Il suffit, dans ce but, de faire voir que le nombre  $x_0$  du numéro précédent est toujours inférieur à 7,24. Or, on a obtenu ci-dessus l'inégalité  $x_0 < 2\pi$ , dans tous les cas à l'exception de ceux-ci :

$$1^0 \quad c_1 \geq 0, \quad c_2 \geq 0, \quad c_3 \geq 0;$$

$$3^0 \text{ b) } \quad c_1 \geq 0, \quad 0 \leq -c_3 < c_2 \operatorname{th} \frac{\pi\sqrt{3}}{4}.$$

Nous montrerons qu'il est encore possible de rétrécir, dans ces deux cas, la limite supérieure de  $x_0$ .

Considérons d'abord le cas 1<sup>0</sup>. Lorsque  $y(\pi) \leq 0$ , on a  $x_0 \leq \pi$ , car  $y(0) > 0$ . Lorsque, au contraire,

$$(6) \quad y(\pi) = -c_1 + c_2 \operatorname{sh} \frac{\pi\sqrt{3}}{2} > 0,$$

on considère encore la valeur

$$y\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2} \operatorname{sh} \frac{7\pi\sqrt{3}}{6} - c_3 \operatorname{ch} \frac{7\pi\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

qui, en vertu de 1<sup>0</sup> et (6), est négative, la fonction sinus hyperbolicus étant croissante. Alors  $x_0 < \frac{7\pi}{2}$ . On obtient donc toujours  $x_0 < \frac{7\pi}{3}$  dans le cas 1<sup>0</sup>.

Nous abordons maintenant le cas 3<sup>0</sup>b). Lorsque  $y(\pi) \leq 0$ , on a  $x_0 \leq 2\pi$ , car  $y(2\pi) \geq 0$ . Lorsque  $y(\pi) > 0$ , on a, en vertu de (4) et (6)

$$y(x) < c_2 \varphi(x) \quad \text{pour } 2\pi < x < \frac{5\pi}{2},$$

où

$$\varphi(x) = \operatorname{sh} \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \cos x + \operatorname{sh} \frac{x\sqrt{3}}{2} \sin \frac{x}{2} - \operatorname{th} \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \operatorname{ch} \frac{x\sqrt{3}}{2} \cos \frac{x}{2}.$$

Si  $\xi$  est une racine de l'équation  $\varphi(x) = 0$  contenue dans l'intervalle  $2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$ , on a  $y(\xi) < 0$  et par suite  $x_0 < \xi$ , car  $y(2\pi) > 0$ . En évaluant  $\xi$  par des méthodes numériques, on trouve

$$(7) \quad 7,735 < \xi < 7,74.$$

Or, il est aisé de voir que  $2\pi < \frac{7\pi}{3} < \xi$ , on a donc  $x_0 < \xi$  dans tous les cas possibles.

Pour obtenir maintenant l'inégalité  $15,47 < \lambda_6$  il suffit de démontrer qu'il existe une intégrale  $y(x)$  de (1) qui soit une fonction paire, non nulle pour  $x=0$  et dont le moindre zéro positif  $\eta$  soit supérieur à 7,735. En effet, lorsque  $y(x)$  est une telle intégrale, la fonction  $y_1(x) = y(x - \eta)$  est encore une intégrale de (1) qui s'annule pour  $x=0$  et dont le moindre zéro positif est supérieur à  $2\eta \geq 15,47$ , c'est ce qui entraîne l'inégalité  $15,47 < \lambda_6$ .

Pour construire une intégrale qui satisfait aux conditions exigées nous considérons d'abord une intégrale particulière  $y_0(x)$  de la forme (2), où

$$c_1 = \sqrt{3} + \operatorname{sh} \frac{\pi\sqrt{3}}{2}, \quad c_2 = 2\sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{2}}{4}, \quad c_3 = -2\sqrt{2} \operatorname{sh} \frac{\pi\sqrt{3}}{4};$$

les coefficients ci-dessus sont choisis de la sorte que  $y_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_0'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

En étudiant le comportement de la fonction  $y_0(x)$  (p. e. par la méthode de la différentiation), on vérifie que l'équation

$$(9) \quad y_0(x) = \left(\sqrt{3} + \operatorname{sh} \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right) \cos x + 2\sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \cdot \operatorname{sh} \frac{x\sqrt{3}}{2} \sin \frac{x}{2} - \\ 2\sqrt{2} \operatorname{sh} \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{x\sqrt{3}}{2} \cos \frac{x}{2} = 0$$

possède, dans l'intervalle  $0 \leq x < \frac{5\pi}{2}$  exactement 2 racines: l'une, égale à  $\frac{\pi}{2}$ , est double; la seconde, soit  $\xi'$ , est simple et appartient à l'intervalle  $2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$ . En outre, la fonction  $y_0(x)$  est positive pour  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  et pour  $\frac{\pi}{2} < x < \xi'$ .

En appliquant les méthodes numériques, on trouve pour  $\xi'$  les mêmes inégalités que pour  $\xi$ :

$$7,735 < \xi' < 7,74.$$

Posons maintenant

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon \operatorname{sh} \frac{x\sqrt{3}}{2} \sin \frac{x}{2} \quad (\varepsilon > 0),$$

$y(x)$  sera encore une intégrale de (1). Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit on obtient une intégrale  $y(x)$  qui est différent de zéro pour  $x=0$  et dont le moindre zéro positif  $\eta$  s'approche autant que l'on veut de  $\xi'$ . On peut donc choisir un tel  $\varepsilon$  que  $\eta$  satisfait aux mêmes inégalités que  $\xi$ :

$$7,735 < \eta < 7,74.$$

Comme l'intégrale  $y(x)$  est une fonction paire, elle satisfait ainsi à toutes les conditions exigées.

## Streszczenie

Weźmy pod uwagę zbiór  $E$  całek  $y = \varphi(x)$  równania

$$y^{(n)} + A(x)y = 0 \quad [A(x) = \text{funkcja rzeczywista, ciągła}]$$

takich że  $\varphi(0) = 0$  i  $\varphi(x) > 0$  w prawostronnym otoczeniu punktu  $x = 0$ . Przy-  
porządkujmy każdej całce  $\varphi(x)$  zbioru  $E$  liczbę dodatnią  $l_\varphi$ , taką żeby  $(0, l_\varphi)$   
był największym przedziałem, w którym  $\varphi(x) > 0$ .

Oznaczmy przez  $\lambda_n$  ( $n=2, 3, \dots$ ) kres górny liczb  $l_\varphi$  w przypadku  
 $A(x) \equiv 1$ . Dla  $n=2, 3, 4, 5$  mamy odpowiednio:  $\lambda_2 \sim 3,14$ ;  $\lambda_3 \sim 4,23$ ;  $\lambda_4 \sim 8,88$   
 $\lambda_5 \sim 9,67$ . Przybliżone obliczenie wartości  $\lambda_n$  jest celem niniejszego arty-  
kułu. Okazuje się, że dla rozwiązania zagadnienia wystarcza rozważać  
funkcje  $\varphi(x)$  kształtu

$$c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sh} \frac{x\sqrt{3}}{2} \sin \frac{x}{2} + c_3 \operatorname{ch} \frac{x\sqrt{3}}{2} \cos \frac{x}{2};$$

uwzględniając różne kombinacje znaków współczynników  $c_1, c_2, c_3$ , dowo-  
dzimy, że  $15,47 < \lambda_6 < 15,48$ .