ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. I, Nr 2 SECTIO A 1946

Z Seminarium Matematycznego II Wydz. Matematyczno-Przyrodniczego U. M. C. S. w Lublinie
Kierownik: prof. dr Jan G.-Mikusiński

Jan G.-Mikusiński

Sur les intégrales de quelques équations différentielles linéaires [1])

(O całkach pewnych równań różniczkowych liniowych)

Introduction. Nous nous occuperons ici des intégrales réelles des équations différentielles linéaires. En particulier, nous examinerons l'intégrale $\eta(x)$ de l'équation *non homogène*

$$y^{(n)} + c_1 y^{(n-1)} + \ldots + c_n y = \varphi(x) \qquad (c_1, \ldots, c_n \text{ constants})$$

qui s'annule avec ses dérivées $\eta'(x), \ldots, \eta^{(n-1)}(x)$ pour $x = a$. Lorsque $\varphi(x) \geqq 0$ pour $x \geqq a$, on démontre que $\eta(x)$ est pour $x \geqq a$ non négative aussi longtemps, au moins, que l'intégrale $\gamma(x)$ de l'équation *homogène*

$$y^{(n)} + c_1 y^{(n-1)} + \ldots + c_n y = 0$$

qui satisfait aux conditions initiales $\gamma(a) = \gamma'(a) = \ldots = \gamma^{(n-2)}(a) = 0$, $\varphi^{(n-1)}(a) = 1$ (Théorème 2a). Ce théorème est énoncé, dans le N° 1, sous une forme plus générale, concernant un système d'équations à coefficients constants (Théorème 2).

En appliquant dans un cas particulier ces théorèmes, nous comparons, dans le N° 2, les intégrales de l'équation

$$y^{(n)} + A(x) y = 0$$

avec celles de

$$y^{(n)} + \mu y = 0 \qquad (\mu > 0),$$

en supposant que la fonction $A(x)$ satisfait à l'inégalité $A(x) \geqq \mu$ ou

[1]) Les résultats de cet article ont été obtenus en 1940; leur publication a été retardée à cause de l'occupation allemande.

$A(x) \leq \mu$ (Théorème 3). En s'appuyant sur ce résultat, nous déterminons exactement la borne supérieure de la distance entre les zéros consécutifs des intégrales des équations $y''' + A(x)\,y = 0$, $y^{(4)} + A(x)\,y = 0$ et $y^{(6)} + A(x) = 0$, pourvu que la fonction $A(x)$ (continue) soit soumise à une condition unique $A(x) \geq \mu > 0$ (Théorèmes 4, 5 et 6).

1. Systèmes d'équations linéaires du premier ordre.

Théorème 1. *Soit*

$$\frac{d\sigma_i}{dx} + \sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu}(x)\,\sigma_\nu + \psi_i(x, \alpha) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

un système d'équations, où les $c_{i\nu}(x)$ sont continus dans un intervalle $[a, b]$ et les $\psi_i(x, \alpha)$ possèdent les dérivées partielles $\frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha}$ continues dans le carré $K = \{a \leq x \leq b,\ a \leq \alpha \leq b\}$. Soit de plus

$$\sigma_1(x, \alpha), \ldots, \sigma_n(x, \alpha),$$

où α joue le rôle d'un paramètre, une intégrale de (1) qui satisfait dans le point α de l'intervalle $[a, b]$ aux conditions initiales

$$\sigma_i(\alpha, \alpha) = \eta_i(\alpha) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

les $\eta_i(\alpha)$ étant les fonctions de α possédant des dérivées $\eta'_i(\alpha)$ continues pour $a \leq \alpha \leq b$.

Cela posé, les fonctions σ_i $(i = 1, \ldots, n)$ possèdent dans l'intervalle $[a, b]$ les dérivées partielles par rapport à α $\tau_i = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \alpha}$ qui satisfont dans $[a, b]$ au système des équations

$$\frac{d\tau_i}{dx} + \sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu}(x)\tau_\nu + \frac{\partial \psi_i(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

avec les conditions initiales

$$\tau_i(\alpha, \alpha) = \eta'_i(\alpha) + \sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu}(\alpha)\,\eta_\nu(\alpha) + \psi_i(\alpha, \alpha) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Démonstration. Considérons les fonctions $\tau_i = \tau_i(x, \alpha)$ $(i = 1, \ldots, n$ qui satisfont dans le carré K au système (3) avec les conditions initiales (4). En vertu des théorèmes classiques les fonctions τ_i sont continues dans K. Posons

$$(5) \qquad \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_i(x,\alpha) = \eta_i(x) - \int_\alpha^x \tau_i \, dx \qquad (i=1,\ldots,n).$$

En dérivant (5) par rapport à x, on obtient

$$\frac{d\bar{\sigma}_i}{dx} = \eta'_i(x) - \tau_i(x,x) - \int_\alpha^x \frac{d\tau_i}{dx} dx \qquad (i=1,\ldots,n)$$

et, en vertu de (3) et (4),

$$\frac{d\bar{\sigma}_i}{dx} = -\sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu}(x)\,\eta_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu}(x) \int_\alpha^x \tau_i dx - \psi_i(x,\alpha) \qquad (i=1,\ldots,n)$$

et enfin, en tenant compte de (5),

$$\frac{d\bar{\sigma}_i}{dx} + \sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu}(x)\,\bar{\sigma}_\nu + \psi_i(x,\alpha) = 0 \qquad (i=1,\ldots,n).$$

On voit que les fonctions $\bar{\sigma}_i$ satisfont au système (1), mais en vertu de (5) on a $\bar{\sigma}_i(\alpha,\alpha) = \eta_i(\alpha)$, donc les fonctions $\bar{\sigma}_i$ sont identiques avec σ_i. On trouve encore selon (5) que $\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\alpha_i} = \tau_i$, ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 2. *Soit donné un système de n équations linéaires non homogènes aux coefficients constants*

$$(6) \qquad \frac{dy_i}{dx} + \sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu} y_\nu = k_i \varphi(x) \qquad (i=1,\ldots,n),$$

où les k_i sont des nombres réels quelconques et $\varphi(x)$ une fonction arbitraire, continue et non négative dans [a,b]. Soit

$$\eta_1(x),\ldots,\eta_n(x)$$

une intégrale du système (6) avec les conditions initiales

$$(7) \qquad \eta_i(a) = 0 \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Considérons, d'autre part, le système des équations homogènes aux mêmes coefficients:

$$(8) \qquad \frac{dy_i}{dx} + \sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu} y_\nu = 0 \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Soit

$$\gamma_1(x),\ldots,\gamma_n(x)$$

l'intégrale de ce système, satisfaisant aux conditions initiales

$$\gamma_i(a) = k_i \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Cela posé, lorsque l'inégalité $\gamma_m(x) \geqq 0$ *[resp.* $\gamma_m(x) \leqq 0$*] a lieu dans [a,b] pour un certain m, alors on a aussi* $\eta_m(x) \geqq 0$ *[resp.* $\eta_m(x) \leqq 0$*] dans [a,b] pour le même m.*

Démonstration. Considérons le système de n fonctions

$$\sigma_1(x,\alpha), \ldots, \sigma_n(x,\alpha),$$

où x est envisagé comme variable et α comme paramètre, qui satisfont dans [a, b] au système des équations (8) avec les conditions initiales:

$$\sigma_i(\alpha,\alpha) = \eta_i(a) \qquad (a \leqq \alpha \leqq b,\ i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Les fonctions σ_i satisfont aux conditions du théorème 1 avec $c_{i\nu}(x) \equiv c_{i\nu}$, $\psi_i(x, \alpha) \equiv 0$, elles possèdent donc les dérivées partielles $\tau_i = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \alpha}$ $(i = 1, \ldots, n)$ qui représentent une intégrale de (8) avec les conditions initiales:

$$\tau_i(\alpha,\alpha) = \eta'_i(\alpha) + \sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu}\, \eta_\nu(\alpha) = k_i \varphi(\alpha) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Nous allons montrer que, si $\gamma_m(x) \geqq 0$ dans *[a, b]*, alors $\tau_m(x,\alpha) \geqq 0$ pour $a \leqq \alpha \leqq x \leqq b$. En effet, si $\varphi(\alpha) = 0$ pour une valeur α de l'intervalle *[a,b]*, on a identiquement $\tau_i(x,\alpha) \equiv 0$ pour cette valeur α et pour x appartenant à l'intervalle *[a,b]*. Si, au contraire, $\varphi(\alpha) > 0$ il est aisé de voir, en posant

$$\gamma_i(x, \alpha) = \frac{\tau_i(x - e + \alpha, \alpha)}{\varphi(\alpha)} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

que les fonctions $\gamma_i(x,\alpha)$ satisfont, dans l'intervalle $a \leqq x \leqq a + b - \alpha$, au système des équations (8) avec les conditions initiales $\gamma_i(a, \alpha) = k_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Donc ces fonctions $\gamma_i(x,\alpha)$ ne dépendent qu'en apparence du paramètre α et elles sont identiquement égales à $\gamma_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$. En particulier on a $\gamma_m(x,\alpha) = \gamma_m(x)$ pour $a \leqq x \leqq a \quad b - \alpha$; il en résulte que $\tau_m(x,\alpha) \geqq 0$ pour $a \leqq \alpha \leqq x \leqq b$, aussitôt que $\gamma_m(x) \geqq 0$ dans $[a,b]$.

Revenons maintenant aux fonctions $\sigma_i(x,\alpha)$ $(i = 1, \ldots, n)$. On déduit de (7), (8) et (9) que ces fonctions sont, pour $\alpha = a$, identiquement nulles dans l'intervalle entier *[a, b]*. Fixons arbitrairement x dans *[a, b]*. Comme la dérivée $\tau_m = \frac{\partial \sigma_m}{\partial \alpha}$ est non négative dans $a \leqq \alpha \leqq x$ (ce que nous venons de démontrer), la fonction $\sigma_m(x,\alpha)$ ne peut pas décroître, lorsque x est constant et α parcourt les valeurs de a jusqu'à x, on a donc sûrement, grâce à $\sigma_m(x,\alpha) = 0$, $\sigma_m(x,x) \geqq 0$, c'est-à-dire, en vertu de (9), $\eta_m(x) \geqq 0$.

Le premier cas du théorème est ainsi démontré, car x a été choisi arbitrairement dans $[a, b]$.

Le second cas du théorème $[\gamma_m(x) \leq 0]$ se ramène aisément au cas précédent, et considérant les fonctions $\eta_i(x) = -\eta_i(x)$.

Théorème 2a. *Soit*

$$y^{(n)} + c_1 y^{(n-1)} + \ldots + c_n = \varphi(x) \tag{10}$$

une équation linéaire non homogène, où $c_1, \ldots c_n$ sont des constantes arbitraires et $\varphi(x)$ une fonction continue, non négative dans un intervalle donné $[a,b]$.

Si l'intégrale $\gamma(x)$ de l'équation homogène

$$y^{(n)} + c_1 y^{(n-1)} + \ldots + c_n y = 0,$$

qui satisfait aux conditions initiales $\gamma(a) = \gamma'(a) = \ldots = \gamma^{(n-2)}(a) = 0$, $\gamma^{(n-1)}(a) = 1$, est constamment non négative dans $[a,b]$, alors l'intégrale $\eta(x)$ de l'équation (10), satisfaisant aux conditions initiales $\eta(a) = \eta'(a) = \ldots = \eta^{(n-1)}(a) = 0$, l'est également.

Ce théorème est un cas particulier du théoréme précédant; on l'obtient en posant

$$\eta(x) = \eta_1(x),$$

$$\eta^{(i-1)}(x) = \eta_i(x) \text{ pour } i = 2, \ldots, n;$$

$$c_{i\nu} = -1 \text{ pour } 1 \leq i = \nu - 1 \leq n - 1,$$

$$c_{n\nu} = c_{n-\nu+1} \text{ pour } 1 \leq \nu \leq n,$$

$$c_{i\nu} = 0 \text{ pour toutes les autres combinaisons de } i, \nu;$$

$$k_i = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n - 1,$$

$$k_n = 1.$$

2. L'inégalité différentielle $y^{(n)} + y \geq 0$.

Le résultat précédent peut être aisément appliqué à l'inégalité différentielle $y^{(n)} + y \geq 0$.

Nous introduirons d'abord une suite infinie de nombres réelles

$$\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n, \ldots$$

définie comme il suit:

Nous considérons une suite de fonctions $f_n(x)$ $(n = 2, 3, \ldots)$, satisfaisant aux équations différentielles

$$y^{(n)} + y = 0 \tag{11}$$

avec les conditions initiales $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-2)}(0) = 0$, $f^{(n-1)}(0) = 1$. Ces fonctions $f_n(x)$ sont, pour chaque n, définies univoquement; elles sont continues pour $x \geq 0$ et positives dans le voisinage droit du point $x = 0$. Nous désignons par β_n la plus petite racine positive de l'équation $f_n(x) = 0$.

Le calcul effectif des valeurs approchées des $\mathfrak{p}_n$ ne présente, au moins théoriquement, aucune difficulté. On peut p.e. chercher d'abord la forme analytique de $f_n(x)$ d'après les méthodes générales de solution des équations différentielles linéaires à coefficients constants et ensuite il suffit d'appliquer les méthodes numériques classiques pour évaluer la racine de $f_n(x)=0$. On trouve ainsi, pour les premières valeurs de n,

$$\mathfrak{p}_2 \sim 3{,}14, \quad \mathfrak{p}_3 \sim 4{,}22, \quad \mathfrak{p}_4 \sim 5{,}55, \quad \mathfrak{p}_5 \sim 6{,}85, \quad \mathfrak{p}_6 \sim 8{,}32 \text{ etc.}$$ [1])

En posant maintenant dans le théorème 2a: $c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$, $c_n = 1$, $a = 0$, on obtient un cas particulier qui peut s'énoncer sous la forme suivante:

Théorème 2b. *Si la fonction $\eta(x)$, n fois continuement dérivable dans l'intervalle $0 \leq x \leq b$ $(b \leq \mathfrak{p}_n)$ vérifie dans $0 \leq x \leq b$ l'inégalité différentielle*

$$\eta^{(n)}(x) + \eta(x) \geq 0 \tag{12}$$

avec les conditions initiales $\eta(0) = \eta'(0) = \ldots = \eta^{(n-1)}(0) = 0$, alors on a

$$\eta(x) \geq 0$$

dans cet intervalle.

3. L'équation différentielle $y^{(n)} + A(x)y = 0$.

Théorème 3. *Soit $y(x)$ une fonction non négative dans un intervalle $[a,b]$ et qui satisfait à l'équation différentielle*

$$y^{(n)} + A(x)y = 0,$$

où $A(x)$ est une fonction continue dans $[a,b]$. Soit, de plus, $y_0(x)$ une intégrale l'équation

$$y^{(n)} + \mu y = 0 \qquad (\mu > 0)$$

satisfaisant pour $x = a$ aux mêmes conditions initiales que $y(x)$. Supposons enfin que $b - a \leq \frac{\mathfrak{p}_n}{\sqrt[n]{\mu}}$.

Lorsque $A(x) \geq \mu$ dans $[a,b]$, on a $y(x) \leq y_0(x)$ dans cet intervalle; lorsque $A(x) \leq \mu$ dans $[a,b]$, on a $y(x) \geq y_0(x)$ dans $[a,b]$ [2]).

---

[1]) On peut démontrer que la suite $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ est croissante et tend vers l'infini et que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{p}_n}{n} = \frac{4}{e}$.

[2]) On pourait énoncer un théorème analogue pour l'équation $y^{(n)} + c_1 y^{(n-1)} + \ldots + c_{n-1}y' + A(x)y = 0$, où $c_1, \ldots, c_{n-1}$ sont des constantes arbitraires.

Démonstration. Supposons d'abord que $A(x) \geqq \mu$ dans $[a,b]$. On a alors

$$y^{(n)}(x) + \mu y(x) \leqq 0$$

dans cet intervalle. En retranchant cette intégalité de

$$y_o^{(n)}(x) + \mu y_o(x) \leqq 0.$$

on obtient pour $a \leqq x \leqq b$

$$r_1^{(n)}(x) + \mu r_1(x) \geqq 0,$$

où $r_1(x) = y_o(x) - y(x)$. La fonction $r_1(x)$ est, ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à la $(n-1)^{\text{ème}}$ inclusivement, nulle pour $x = a$. Posons

$$\eta(x) = r_1\left(\frac{x}{\sqrt[n]{\mu}} + a\right);$$

$\eta(x)$ satisfait pour $0 \leqq x \leqq x_o = \sqrt[n]{\mu}(b-a)$ à l'inégalité (12). Comme $\eta(0) = \eta'(0) = \ldots = \eta^{(n-1)}(0) = 0$, le théorème 2b donne $\eta(x) \geqq 0$ pour $0 \leqq x \leqq x_o$. Il vient ainsi $r_1(x) \geqq 0$ pour $a \leqq x \leqq b$, c. q. f. d.

En supposant maintenant que $A(x) \leqq \mu$ dans $[a, b]$, on a

$$y^{(n)}(x) + \mu\, y(x) \geqq 0.$$

En retranchant (13) de l'inégalité ci-dessus et en posant $r_2(x) = y(x) - y_0(x)$, on obtient

$$r_2^{(n)}(x) + \mu r_2(x) \geqq 0$$

pour $a \leqq x \leqq b$. D'où, de la même manière que dans le cas précédant, il résulte l'inégalité demandée $r_2(x) \geqq 0$ pour $a \leqq x \leqq b$.

4. L'équation $y''' + A(x)y = 0$,

Nous appliquerons maintenant le théorème 3 pour apprécier la distance entre les zéros successifs des intégrales qui satisfont à l'équation du troisième ordre $y''' + A(x)\, y = 0$, où $A(x) \geqq \mu \geqq o$. Dans ce but nous nous servirons du lemme suivant:

Lemme. *Si une intégrale $y_o(x)$ de l'équation*

(14) $$y''' + y = 0 \qquad (\mu > 0)$$

est différente de zéro dans un intervalle ouvert (a,b) et s'annule pour $x = a$, la longueur $b - a$ de cet intervalle (a,b) ne peut pas dépasser le nombre $\frac{p_3}{\sqrt[3]{\mu}}$.

Démonstration. Considérons l'intégrale $f_3(x)$ de l'équation

$$y''' + y = 0,$$

qui satisfait aux conditions initiales:

$$f_3(0) = f'_3(0) = 0, \qquad f''_3(0) = 1.$$

Cette intégrale $f_3(x)$ est (v. § 2) positive dans l'intervalle $(0, p_3)$ et nulle à ses extremités, de plus, elle est positive pour $x < 0$, ce qui n'est pas difficile à vérifier.

Désignons par c un nombre $\geqq b$, tel que l'intégrale $y_0(x)$ soit différente de zéro dans (a,c) et nulle pour $x = c$ [1]). Soit p. e. $y_0(x) > 0$ dans (a, c).

En posant

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\mu}} \frac{y'(c)}{f'_3(p_3)} \cdot f_3\left[\sqrt[3]{\mu}\,(x-c)p_3\right] - y_0(x), \tag{15}$$

on voit que $\varphi(x)$ est encore une intégrale de l'équation (14), notamment telle que $\varphi(c) = \varphi'(c) = 0$; on peut donc écrire

$$\varphi(x) = \alpha(c-x)^2 + \frac{\mu}{2}\int_x^c (t-x)^2 \varphi(t)\, dt; \tag{16}$$

le coefficient constant α ne peut pas être négatif, car on aurait alors $\varphi(x) < 0$ constamment pour $x < c$, c'est ce que l'on déduit sans peine de la forme de l'équation intégrale (16). L'intégrale $y_0(x)$ serait, en vertu de (15), positive pour chaque $x < c$, ce qui n'est pas compatible avec l'hypothèse $y_0(a) = 0$. On a donc $\alpha \geqq 0$ et $\varphi(x) > 0$ pour $x < c$. Il en résulte que $a \geqq c - \frac{p_3}{\sqrt[3]{\mu}}$, parce que dans le cas contraire on obtiendrait une contradiction, en posant $x = c - \frac{p_3}{\sqrt[3]{\mu}}$ dans (15) et en tenant compte de ce que $f_3(0) = 0$ et $y_0(x) > 0$ pour $a < x < c$. L'inégalité $a \geqq c - \frac{p_3}{\sqrt[3]{\mu}}$ entraîne $a \geqq b - \frac{p_3}{\sqrt[3]{\mu}}$, c. q. f. d.

Théorème 4 [2]). *Si a et b sont deux zéros consécutifs d'une intégrale $y(x)$ de l'équation*

[1]) Il est très facile de démontrer l'existence d'un tel nombre c; cela résulte aussi d'un théorème plus général, énoncé dans ma note „Sur l'inégalité différentielle $|f^{(n)}(x)| \geqq m|f(x)|$" (*Comptes Rendus, T. 222, p. 359, 1946*).

[2]) Ce théorème a été énoncé par A. Davidoglou en 1900, mais l'auteur n'a pas publié sa démonstration (Sur les zéros des intégrales réelles des équations linéaires du troisième ordre, Comptes Rendus, T. 130, 1900, p. 399—401).

$$y''' + A(x)y = 0,$$

où $A(x)$ est une fonction continue, qui satisfait dans l'intervalle $[a,b]$ à l'inégalité $A(x) \geqq \mu > 0$, alors on a $b - a \leqq \frac{p_3}{\sqrt[3]{\mu}}$.

Démonstration. Considérons l'intégrale $y_0(x)$ de l'équation (14) qui satisfait, pour $x = a$, aux mêmes conditions initiales que $y(x)$. On peut supposer, sans restreindre la généralité de la démonstration, que $y(x) > 0$ dans l'intervalle ouvert (a,b). Si l'on avait $a - b > \frac{p_3}{\sqrt[3]{\mu}}$, la fonction $y_0(x)$ serait, en vertu du théorème 3, positive pour $a < x \leqq a + \frac{p_3}{\sqrt[3]{\mu}}$ et, étant continue, elle serait encore positive dans le voisinage droit du point $x = a + \frac{p_3}{\sqrt[3]{\mu}}$, ce qui est en contradiction avec le lemme démontré ci-dessus.

5. L'équation $y^{(4)} + A(x)\,y = 0$.

Le théorème 3 permet aussi d'apprécier la distance entre les zéros consécutifs des intégrales de l'équation du quatrième ordre $y^{(4)} + A(x)y = 0$, où $A(x) \geqq \mu > 0$. Nous énoncerons d'abord le lemme suivant:

Lemme. *Si une intégrale $y_0(x)$ de l'équation*

$$y^{(4)} + \mu y = 0 \qquad (\mu > 0) \tag{17}$$

est différente de zéro dans un intervalle ouvert (a,b), la longueur $b - a$ de cet intervalle ne peut pas surpasser le nombre $\frac{2\sqrt{2}\,\pi}{\sqrt[4]{\mu}}$.

Pour démontrer ce lemme il suffit d'écrire l'intégrale générale de l'équation (17) sous la forme d'une somme

$$y_1(x) + y_2(x),$$

où

$$y_1(x) = p_1 e^{\alpha x} \sin(\alpha x + q_1),$$

$$y_2(x) = p_2\, e^{-\alpha x} \sin(\alpha x + q_2),$$

$\alpha = \frac{\sqrt[4]{\mu}}{\sqrt{2}}$, p_1, q_1, p_2 et q_2 étant des constantes. En tenant compte de ce que les distances entre les zéros consécutifs de $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont égales

exactement à $\frac{\sqrt[4]{2\pi}}{\sqrt{\mu}}$, il est aisé de voir que $b-a<\frac{2\sqrt[4]{2\pi}}{\sqrt{\mu}}$.

Théorème 5. *Si a et b sont deux zéros consécutifs d'une intégrale $y(x)$ de l'équation*

$$y^{(4)}+A(x)y=0,$$

où $A(x)$ est une fonction continue qui satisfait dans un intervalle (a, b) à l'inégalité $A(x)\geq\mu>0$, alors on a $b-a<\frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\mu}}$ [1]).

Démonstration. Supposons, ce qui ne diminue pas la généralité de la démonstration, que $y(x)>0$ dans (a, b). Considérons ensuite l'intégrale $y_0(x)$ de l'équation (17) qui satisfait pour $x=\xi=\frac{a+b}{2}$ aux mêmes conditions initiales que $y(x)$. Supposons, au contraire, que $b-a\geq\frac{2\sqrt[4]{2\pi}}{\sqrt{\mu}}$. Comme $\sqrt{2\pi}<p_4$, on a, en vertu du théorème 3, $y_0(x)>0$ pour $\xi\leq x\leq\xi+\frac{\sqrt[4]{2\pi}}{\sqrt{\pi}}$. D'autre part, en posant $\eta(x)=y(-x)$, $\eta_0(x)=y_0(-x)$, on voit que $\eta(x)$ satisfait dans l'intervalle $\left[-\xi, -\xi+\frac{\sqrt[4]{2\pi}}{\sqrt{\mu}}\right]$ à l'équation $y^{(4)}+A(-x)y=0$ et que $\eta_0(x)$ satisfait dans le même intervalle à l'équation (17). En procédant de la même manière que ci-dessus, on est conduit à la conclusion que $\eta_0(x)>0$ dans l'intervalle $\left[-\xi, -\xi+\frac{\sqrt[4]{2\pi}}{\sqrt{\mu}}\right]$ ou, ce qui revient au même, que $y_0(x)>0$ dans $\left[\xi-\frac{\sqrt[4]{2\pi}}{\sqrt{\mu}}, \xi\right]$. L'inégalité $y_0(x)>0$ a donc

---

[1]) Il est aisé de voir que cette limitation est exacte, c.-à-d. que le nombre $\frac{2\sqrt[4]{2\pi}}{\sqrt{\mu}}$ dans le théorème 5 ne peut pas être remplacé par un nombre inférieur. Une appréciation approchée pour la différence $b-a$ a été obtenue pour la première fois par M. Biernacki en 1938.

lieu dans l'intervalle entier $\left[\xi - \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt[4]{\mu}}, \xi + \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt[4]{\mu}}\right]$, c'est ce qui est cependant impossible d'après le lemme précédent.

6. L'équation $y^{(6)} + A(x)y = 0$ [1].

En abordant maintenant le même problème pour l'équation du sixième ordre, on ne peut plus rattacher la borne supérieure de $b-a$ à un nombre déjà connu. C'est justement l'équation $y^{(6)} + y = 0$ (on a posé ici $\mu = 1$) qui définit une nouvelle constante, soit λ_6, qui est la borne supérieure des distances entre les zéros consécutifs de ses intégrales. La valeur approchée de cette constante est 15,4. Pour démontrer le théorème ci-dessous nous nous appuyerons sur l'inégalité

$$\lambda_6 < 2p_6 \qquad (\sim 16{,}65)$$

dont la démonstration (ainsi que l'évaluation de p_6 à 2 décimales près) est exposée dans l'article „Sur l'équation différentielle $y^{(6)} + y = 0$" [2]).

Lemme. *Si une intégrale $y_0(x)$ de l'équation*

$$y^{(6)} + \mu y = 0 \qquad (\mu < 0)$$

est différente de zéro dans un intervalle ouvert (a,b), la longueur $a - b$ de cet intervalle ne peut pas dépasser le nombre $\frac{\lambda_6}{\sqrt[6]{\mu}}$.

Ce lemme se déduit directement de la définition du nombre λ_6 au moyen de la transformation $x = \bar{x}\sqrt[6]{\mu}$, $y(x) = \bar{y}(\bar{x})$.

Théorème 6. *Si a et b sont deux zéros consécutifs d'une intégrale $y(x)$ de l'équation*

$$y^{(6)} + A(x)y = 0,$$

où $A(x)$ est une fonction continue qui satisfait dans l'intervalle (a, b) à l'inégalité $A(x) \geqq \mu > 0$, alors on a $b - a < \frac{\lambda_6}{\sqrt[6]{\mu}}$.

La démonstration est exactement la même que dans le cas $n = 4$; il ne faut que remplacer $\frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt[4]{\mu}}$ par $\frac{\gamma_6}{\sqrt[6]{\mu}}$ et l'inégalité $\sqrt{2\pi} < p_4$ par $\lambda_6 < 2p_6$.

---

[1]) On ne considère dans cet article que des cas $n = 3$, 4 et 6. Le théorème a été démontré encore pour $n = 5$; ce cas est beaucoup plus compliqué et ne sera pas traité ici.

[2]) On démontre au commencement de cet article une intégalité plus forte $\lambda_6 < 5\pi$ ($\sim 15{,}7$) (v. ces Annales p. 35).

Streszczenie

W pracy zajmujemy się całkami rzeczywistymi równań różniczkowych liniowych. W szczególności badamy przebieg całki $\eta(x)$ równania niejednorodnego

$$y^{(n)}+c_1y^{(n-1)}+\ldots+c_ny=\varphi(x) \qquad (c_1,\ldots,c_n \text{ stałe}),$$

która w pewnym punkcie $x=a$ staje się zerem wraz ze swymi pochodnymi $\eta_1(x),\ldots,\eta^{(n-1)}(x)$. Okazuje się mianowicie, że jeżeli $\varphi(x)\geqq 0$ dla $x\geqq a$, to całka $\eta(x)$ jest dla $x\geqq a$ co najmniej tak długo nieujemna, jak długo nieujemna jest całka $\gamma(x)$ równania jednorodnego

$$y^{(n)}+c_1y^{(n-1)}+,\ldots+c_ny=0,$$

spełniająca warunki początkowe $\gamma(a)=\gamma'(a)-\ldots-\gamma^{(n-2)}(a)=0$, $\gamma^{(n-1)}(a)=1$. Twierdzenie to wyprowadzamy w Nr 1 w formie nieco ogólniejszej dla układu równań o współczynnikach stałych.

Korzystając z pewnego przypadku szczególnego powyższych twierdzeń, porównujemy całki równania

$$y^{(n)}+A(x)y=0$$

z całkami równania

$$y^{(n)}+\mu y=0 \qquad (\mu>0),$$

gdy funkcja $A(x)$ spełnia nierówność $A(x)\leqq\mu$ albo $A(x)\geqq\mu$. Na tej podstawie daje się wyznaczyć dokładnie kres górny odległości kolejnych zer całek równań $y'''+A(x)y=0$, $y^{(4)}+A(x)y=0$ oraz $y^{(6)}+A(x)y=0$, gdy funkcja $A(x)$ (ciągła) jest poddana jedynemu warunkowi $A(x)\geqq\mu>0$.