

Osiągnięcia matematyczne uczniów klasy trzeciej

Wprowadzenie

Zgodnie z zaleceniami Parlamentu Europejskiego i Rady UE w sprawie kompetencji kluczowych kompetencje matematyczne obejmują m.in. umiejętność wykorzystania myślenia matematycznego w rozwiązywaniu problemów wynikających z codziennych sytuacji. Myślenie matematyczne to „indywidualna zdolność do rozpoznania i zrozumienia roli, jaką matematyka odgrywa we współczesnym świecie, do formowania sądów opartych na matematycznym rozumowaniu oraz wykorzystania umiejętności matematycznych tam, gdzie wymagają tego potrzeby codziennego życia” (*Kompetencje kluczowe 2005*, s. 15). Dlatego interesujące wydało się sprawdzenie, czy uczniowie klasy III potrafią stosować wiedzę i umiejętności matematyczne zdobyte w edukacji szkolnej w rozwiązywaniu problemów, których źródłem jest życie codzienne.

Wykorzystany w badaniach test sprawdzający osiągnięcia matematyczne uczniów klasy III składał się z 17 zadań. Liczba punktów możliwych do uzyskania przez każde z dzieci wynosiła 36.

Kolejne zadania reprezentowały czynności z zakresu trzech bloków tematycznych kluczowych dla wczesnoszkolnej edukacji matematycznej uczniów. Dotyczyły one:

- techniki rachunkowej – 8 zadań; maksymalna liczba punktów: 12;
- rozwiązywania zadań tekstowych standardowych – 5 zadań; maksymalna liczba punktów: 12;
- rozwiązywania zadań tekstowych niestandardowych – 4 zadania; maksymalna liczba punktów: 12.

Konstruując test, przyjęto założenie, by każdemu z wyróżnionych obszarów edukacji matematycznej przypisać taką samą liczbę punktów możliwych do uzyskania przez badane dzieci. Rozwiązanie takie pozwoliło na łatwiejsze porównanie poziomów osiągnięć uczniów w zakresie wyróżnionych bloków, a ponadto sprzyjało sprawniejszej organizacji testowania. W toku badań cały test został podzielony na trzy części, tak aby czas pracy ucznia z testem nie przekraczał jednorazowo 30–35 minut.

Tabela 1. Szczegółowy plan testu sprawdzającego osiągnięcia matematyczne uczniów klasy III

Blok tematyczny (obszar edukacji matematycznej)	Nazwa sprawdzanej czynności	Numery zadań w części testu	Liczba punktów/ Kryteria oceny
Technika rachunkowa	Mnożenie i dzielenie w zakresie 100	Zadanie 1	2 – za poprawne uzupełnienie 8 liczb 1 – za poprawne wpisanie 6–7 liczb
		Zadanie 3	2 – za połączenie 3 takich samych liczb 1 – za połączenie 2 spośród 3 liczb
	Dodawanie i odejmowanie w zakresie 100	Zadanie 2	1 – za poprawne narysowanie trzech strzałek
		Zadanie 5	2 – za 6 prawidłowo wpisanych liczb 1 – za 5 poprawnie wpisanych liczb
		Zadanie 6	1 – za 4 prawidłowo zapisane działania
	Kolejność wykonywania działań	Zadanie 4	2 – za 4 poprawnie obliczone wyrażenia 1 – za 3 poprawnie wykonane przykłady
	Porównywanie liczb w zakresie 100	Zadanie 7	1 – za prawidłowo wpisane liczby
Własności układu dziesiętkowego	Zadanie 8	1 – za podkreślenie odpowiedzi b/	
Łącznie		8 zadań	12 punktów
Zadania tekstowe standardowe	Obliczenia zegarowe	Zadanie 1	2 – za poprawnie zapisane i wykonane obliczenia oraz uzupełnienie tekstu odpowiedzi
	Obliczenia pieniężne i pomiary masy	Zadanie 2	
	Pomiary pojemności	Zadanie 3	
	Obliczanie obwodów prostokątów i trójkątów	Zadanie 4	3 – za poprawnie zapisane i wykonane obliczenia oraz zapisanie odpowiedzi
Zadanie 5			
Łącznie		5 zadań	12 punktów
Zadania tekstowe niestandardowe	Zadanie z nadmiarem danych	Zadanie 1	3 – poprawnie zapisana treść zadania, dobór właściwej formuły rozwiązania i poprawne wykonanie obliczeń
	Zadanie z niedomiarem danych	Zadanie 2	
	Zadanie sprzeczne	Zadanie 3	
	Zadanie o złej treści	Zadanie 4	
Łącznie		4 zadania	12 punktów

Źródło: opracowanie własne.

Uzupełnieniem powyższych informacji jest tabela prezentująca szczegółowy plan wykorzystanego w badaniach testu. Zawiera on wyszczególnienie czynności matematycznych podlegających sprawdzaniu.

W obrębie bloku określonego mianem techniki rachunkowej sprawdzaniu podlegały umiejętności wykonywania czterech podstawowych działań arytmetycznych, praktyczne stosowanie przez dzieci umów dotyczących kolejności wykonywania tych działań oraz elementarna wiedza i rozumienie własności dziesiętkowego, pozycyjnego układu liczenia.

Treści zadań tekstowych standardowych odnosiły się zarówno do podstawowych wiadomości i umiejętności praktycznych, takich jak: wykonywanie obliczeń zegarowych, pieniężnych oraz pomiaru masy i pojemności, jak też uwzględniały wiedzę z zakresu geometrii.

Zadania tekstowe niestandardowe reprezentowały cztery grupy wyróżnione w klasyfikacji B. Gleichgewichta (1988). Czynności podlegające sprawdzaniu, a występujące w teście osiągnięć matematycznych były zgodne z obecnie obowiązującymi i realizowanymi programami kształcenia w klasach początkowych.

Ogólny poziom osiągnięć matematycznych uczniów klasy trzeciej

Zgromadzony w badaniach materiał empiryczny poddano analizom, uwzględniając płeć badanych dzieci oraz środowisko ich życia. Pod uwagę wzięto wyniki kompletnego testu (3 części) 216 uczniów klasy III.

Badani uczniowie za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań zawartych w teście mogli zdobyć 7776 punktów. Z tej liczby uzyskali 4360 punktów, co stanowi 56,1%. Na ogólny wynik badanych uczniów składają się rezultaty uzyskane w obrębie trzech sprawdzanych obszarów edukacji. Poszczególne obszary będą analizowane w dalszych rozważaniach, ale warto w tym miejscu je przytoczyć, aby pokazać, który obszar sprawił uczniom najwięcej trudności, a który najmniej. Dane te ilustruje tabela 2.

Tabela 2. Liczba i procent punktów uzyskanych przez badanych uczniów klasy III za zadania z wyróżnionych obszarów edukacji matematycznej

Obszar edukacji matematycznej	Maksymalna liczba punktów do uzyskania	Liczba punktów uzyskanych	Procent punktów uzyskanych (%)
Technika rachunkowa	2592	1535	59,2
Zadania tekstowe niestandardowe	2592	1614	62,3
Zadania tekstowe standardowe	2592	1211	46,7
Razem	7776	4360	56,1

Powyższe dane informują nas, że spośród badanych obszarów najwyższy wynik (62,3% punktów) uzyskali uczniowie w zakresie pracy z zadaniami niestandardowymi. Nieco gorzej poradzili sobie z techniką rachunkową (59,2% punktów). Najwięcej trudności przysporzyły uczniom zadania tekstowe standardowe, za których rozwiązanie zdobyli 46,7% punktów. Analiza wyników wykazała, że zmienna niezależna, jaką była płeć badanych dzieci, nie różnicowała ich wyników. Ukazuje to tabela 3.

Tabela 3. Liczba i procent punktów uzyskanych przez uczniów klasy III w teście osiągnięć matematycznych z uwzględnieniem płci badanych dzieci

Płeć	N	Maksymalna liczba punktów do uzyskania	Liczba punktów uzyskanych	Procent punktów uzyskanych (%)
Dziewczynki	116	4176	2372	56,8
Chłopcy	100	3600	1988	55,2
Razem	216	7776	4360	56,1

Dziewczynki i chłopcy uzyskali bardzo zbliżone do siebie wyniki. Dziewczynki zdobyły 56,8% możliwych do zdobycia punktów, natomiast chłopcy 55,2%. Inaczej przedstawia się sytuacja w przypadku kolejnej zmiennej niezależnej, jaką było środowisko życia badanych uczniów. Dane na ten temat zawiera tabela 4.

Tabela 4. Liczba i procent punktów uzyskanych przez uczniów klasy III w teście osiągnięć matematycznych z uwzględnieniem środowiska życia badanych dzieci

Środowisko życia	N	Maksymalna liczba punktów do uzyskania	Liczba punktów uzyskanych	Procent punktów uzyskanych (%)
Miasto	175	6300	3634	57,7
Wieś	41	1476	726	49,2
Razem	216	7776	4360	56,1

Z danych w tabeli 4 wynika, że uczniowie ze szkół miejskich osiągnęli zdecydowanie wyższe wyniki od rówieśników ze szkół wiejskich. Uczniowie z miasta uzyskali 57,7% możliwych do zdobycia punktów, zaś uczniowie ze wsi 49,2%. Z powyższych danych wynika więc, że mimo stopniowego zacierania się różnic między środowiskiem miejskim i wiejskim sytuacja dziecka wiejskiego jako ucznia jest gorsza niż jego rówieśnika z miasta.

W trakcie analizy wyników badanych uczniów brano pod uwagę także sposób rozwiązywania zadań. Tabela 5 zawiera wynik w omawianym zakresie.

Tabela 5. Sposób rozwiązywania zadań testu przez badanych uczniów klasy III

N	Liczba zadań rozwiązywanych ogółem	Liczba zadań rozwiązanych:			Liczba zadań opuszczonych
		P_p	C_p	O_f	O_b
216	3672	1745	654	865	408
	100,0%	47,5	17,8	23,6	11,1

Spośród 3672 zadań uczniowie poprawnie rozwiązali niespełną połowę, czyli 1745 (47,5%), 654 zadań rozwiązali częściowo poprawnie. Uczniowie błędnie rozwiązali aż 865 zadań (23,5%), natomiast nie podjęli próby rozwiązania 408 zadań. W grupie zadań rozwiązanych poprawnie więcej było zadań rozwiązanych przez dziewczynki niż chłopców, analogicznie sytuacja wyglądała w przypadku zadań rozwiązanych poprawnie częściowo. Dokładne dane dotyczące omawianego zagadnienia zawiera tabela 6.

Tabela 6. Sposób rozwiązywania zadań testu przez uczniów klasy III a płeć badanych

Płeć	Liczba zadań rozwiązywanych ogółem	Liczba zadań rozwiązanych:			Liczba zadań opuszczonych
		P_p	C_p	O_f	O_b
Dziewczynki 116	1972	950	379	425	218
	100,0%	48,2	19,2	21,6	11,0
Chłopcy 100	1700	795	275	440	190
	100,0%	46,8	16,2	25,9	11,1
Razem 216	3672	1745	654	865	408
	100,0%	47,5	17,8	23,6	11,1

Z tabeli 6 wynika również, że w grupie zadań rozwiązanych nieprawidłowo dziewczynki popełniły mniej błędów niż chłopcy, natomiast liczba opuszczonych zadań była prawie identyczna w grupie dziewczynek i chłopców. Dziewczynki opuściły 11,0% liczby zadań, chłopcy 11,1%.

Zmienną niezależną, którą uwzględniono w trakcie analizy sposobu rozwiązywania zadań, było środowisko życia badanych dzieci. W tabeli 7 zebrano dane ilustrujące ten problem. Dane w tabeli wskazują, że uczniowie szkół miejskich rozwiązali poprawnie więcej zadań (48,9%) niż uczniowie szkół wiejskich (41,6%), a w związku z powyższym mniej zadań (21,5%) rozwiązali błędnie w porównaniu z uczniami szkół wiejskich (32,3%). Jednak uczniowie z miasta opuścili więcej zadań (11,9%) niż uczniowie ze wsi (7,7%). Tabela 8 zawiera dane dotyczące średniej arytmetycznej liczby punktów uzyskanych w teście przez badanych trzecioklasistów.

Tabela 7. Sposób rozwiązywania zadań testu przez uczniów klasy III a środowisko życia badanych

Środowisko życia	Liczba zadań rozwiązywanych ogółem	Liczba zadań rozwiązanych:			Liczba zadań opuszczonych
		P_p	C_p	O_f	
Miasto 175	2975	1455	526	640	354
	100,0%	48,9	17,7	21,5	11,9
Wieś 41	697	290	128	225	54
	100,0%	41,6	18,4	32,3	7,7
Razem 216	3672	1745	654	865	408
	100,0%	47,5	17,8	23,6	11,1

Tabela 8. Średnia arytmetyczna liczby punktów uzyskana w teście osiągnięć matematycznych przez badanych uczniów klasy III

N	\bar{x}	s_x	δ_x
216	20,4	7,94	0,540

Średnia arytmetyczna liczby punktów otrzymanych przez badanych uczniów za cały test wynosi 20,4. Warto przypomnieć, że każdy uczeń mógł zdobyć 36 punktów. Ten wynik oznacza, że każdy z nich otrzymał ponad 2/3 liczby możliwych do zdobycia punktów. W tabeli 9 zawarto dane dotyczące porównania wartości średnich arytmetycznych dziewczynek i chłopców.

Tabela 9. Średnia arytmetyczna liczby punktów uzyskana w teście osiągnięć matematycznych przez uczniów klasy III a płeć badanych

Płeć	N	\bar{x}	s_x	δ_x
Dziewczynki	116	20,8	7,31	0,677
Chłopcy	100	19,9	8,59	0,859
Razem	216	20,4	7,94	0,540

z – współczynnik istotności różnic pomiędzy średnimi arytmetycznymi
 $z=0,826$; różnica nieistotna statystycznie ; $\alpha>0,1$

Z powyższych danych wynika, że dziewczynki i chłopcy uzyskali bardzo zbliżone wyniki w zakresie średnich arytmetycznych. Różnica między nimi jest nieistotna statystycznie ($\alpha>0,1$). Tak więc płeć nie różnicowała wyników badanych dziewczynek i chłopców w zakresie umiejętności matematycznych na poziomie edukacji wczesnoszkolnej.

Nieco inaczej przedstawia się sytuacja w przypadku kolejnej zmiennej niezależnej (środowisko życia badanych dzieci), o czym informuje tabela 10.

Tabela 10. Średnia arytmetyczna liczby punktów, uzyskana w teście osiągnięć matematycznych przez uczniów klasy III a środowisko życia badanych

Środowisko życia	N	\bar{x}	s_x	δ_x
Miasto	175	20,9	8,14	0,615
Wieś	41	18,1	6,55	1,021
Razem	216	20,4	7,94	0,540

z – współczynnik istotności różnic pomiędzy średnimi arytmetycznymi
 $z = 2,35$ różnica istotna statystycznie; $0,05 \geq \alpha > 0,01$

Okazało się, że zmienna niezależna w postaci środowiska życia badanych dzieci różnicuje w sposób istotny statystycznie ($0,05 \geq \alpha > 0,01$) osiągnięcia matematyczne badanych trzecioklasistów na korzyść dzieci szkół miejskich. Po raz kolejny potwierdził się znaczący wpływ środowiska, w którym wychowuje się dziecko, na jego sukcesy w nauce.

Uzyskane wyniki pozwoliły przyporządkować każdego z uczniów do odpowiedniego poziomu osiągnięć matematycznych, zgodnie z kryteriami zawartymi w tabeli 11.

Tabela 11. Liczba uzyskanych punktów a poziomy osiągnięć umiejętności matematycznych

Liczba uzyskanych punktów	Odpowiadający liczbie punktów poziom osiągnięć matematycznych
10–12	wysoki
7–9	średni
0–6	niski

Tabela 12. Poziomy osiągnięć matematycznych badanych uczniów klasy III

Poziomy osiągnięć matematycznych	Liczba uczniów (N)	Procent uczniów (%)
Wysoki	29	13,4
Średni	100	46,3
Niski	87	40,3
Razem	216	100,0

Z tabeli 12 wynika, że tylko 29 uczniów prezentowało wysoki poziom osiągnięć matematycznych. Najwięcej badanych uczniów (100) znalazło się na średnim poziomie omawianych umiejętności. Niepokojący jest fakt, że wielu uczniów (40,3%) wykazało się niskim poziomem osiągnięć matematycznych.

Tabela 13 zawiera dane wskazujące na poziomy osiągnięć matematycznych uczniów z uwzględnieniem płci.

Tabela 13. Poziomy osiągnięć matematycznych badanych uczniów klasy III a ich płeć

Poziom osiągnięć matematycznych	Płeć				Razem	
	dziewczynki		chłopcy			
	N	%	N	%	N	%
Wysoki	17	14,7	12	12,0	29	13,4
Średni	53	45,7	47	47,0	100	46,3
Niski	46	39,6	41	41,0	87	40,3
Razem	116	100,0	100	100,0	216	100,0

W grupie badanych dziewczynek i chłopców rozkład wyników jest bardzo podobny. Najmniej dziewczynek (14,7%) i najmniej chłopców (12,0%) może poszczycić się opanowaniem umiejętności matematycznych w stopniu wysokim. Największą grupę dziewczynek (45,7%) i chłopców (47,0%) stanowią uczniowie, którzy pod względem poziomu umiejętności znajdują się na poziomie średnim. Liczna grupa zarówno dziewczynek (39,6), jak i chłopców (41,0%) to uczniowie o niskim poziomie umiejętności matematycznych.

Tabela 14 zawiera informacje dotyczące poziomów osiągnięć matematycznych badanych uczniów w zależności od środowiska ich życia.

Tabela 14. Poziomy osiągnięć matematycznych badanych uczniów klasy III a środowisko ich życia

Poziom osiągnięć matematycznych	Środowisko				Razem	
	miasto		wieś			
	N	%	N	%	N	%
Wysoki	28	16,0	1	2,4	29	13,4
Średni	81	46,3	19	46,4	100	46,3
Niski	66	37,7	21	51,2	87	40,3
Razem	175	100,0	41	100,0	216	100,0

Wśród uczniów szkół miejskich 16% badanych uczniów opanowało umiejętności matematyczne w stopniu wysokim. Na tym poziomie umiejętności był tylko jeden uczeń szkoły wiejskiej. Biorąc pod uwagę średni poziom omawianych umiejętności, stwierdzamy, że procent uczniów szkół miejskich i wiejskich był prawie identyczny, odpowiednio 46,3% i 46,4%. Większy natomiast procent uczniów szkół wiejskich (51,2%) opanował umiejętności matematyczne na niskim poziomie. Trzecioklasistów szkół miejskich na poziomie niskim było 37,7%.

Poziom umiejętności uczniów klasy trzeciej w zakresie techniki rachunkowej

Pojęcie *technika rachunkowa* oznacza biegłość w pamięciowym, poprawnym wykonywaniu działań arytmetycznych. Opanowanie tej umiejętności „[...] to, zgodnie z naszą tradycją, podstawowy i najobszerniejszy cel edukacji elementarnej w zakresie umiejętności matematycznych” (Dąbrowski 2008, s. 20). Analiza obowiązującej podstawy programowej czy wykorzystywanych podręczników szkolnych potwierdzają ten fakt. Dlatego nie mogło zabraknąć w teście zadań dotyczących tej grupy umiejętności. Jak już wcześniej zasygnalizowano, uczniowie rozwiązywali 8 zadań dotyczących techniki rachunkowej. Ogólne wyniki uzyskane przez badanych uczniów w omawianym zakresie przedstawia tabela 15.

Tabela 15. Liczba i procent punktów uzyskanych przez badanych uczniów klasy III w zakresie techniki rachunkowej

Obszar edukacji matematycznej	Maksymalna liczba punktów do uzyskania	Liczba punktów uzyskanych	Procent punktów uzyskanych (%)
Technika rachunkowa	2592	1535	59,2

Z tabeli wynika, że sprawność rachunkowa nie jest mocną stroną badanych uczniów. Spośród 2592 punktów możliwych do zdobycia uzyskali oni 1535 punktów, co stanowi 59,2%.

W tabeli 16 zawarto wyniki sposobu rozwiązywania zadań z zakresu techniki rachunkowej.

Tabela 16. Sposób rozwiązywania zadań w zakresie techniki rachunkowej przez badanych uczniów klasy III

Obszar edukacji matematycznej	Liczba zadań rozwiązywanych ogółem	Liczba zadań rozwiązanych:			Liczba zadań opuszczonych
		P_p	C_p	O_f	
Technika rachunkowa	1728	966	150	399	213
	100,0%	55,9	8,7	23,1	12,3

Na 1728 zadań z tego obszaru edukacji matematycznej uczniowie poprawnie rozwiązali ponad połowę z nich, to jest 966 (55,9%). Częściowo poprawnie uczniowie rozwiązali 150 zadań (8,7%), natomiast 399 zadań (23,1%) zostało rozwiązanych błędnie. W przypadku 213 zadań (12,3%) uczniowie nie podjęli próby ich rozwiązania.

Analiza wyników uzyskanych przez badanych uczniów pokazuje, że najwięcej z nich poprawnie rozwiązało zadanie 7, które wymagało wpisania między znakami $<$, $>$ brakujących liczb, aby nierówności były prawdziwe:

7. W okienka wpisz brakujące liczby:

$$85 < \square, \square < \square, \square > \square, \square < 39, 41 > \square$$

Zadanie to rozwiązało 163 uczniów, to jest 75,5%. Zdecydowanie najwięcej kłopotu sprawiło uczniom zadanie 5, w którym należało uzupełnić brakującymi liczbami następującą tabelę:

5. Uzupełnij tabelę:

a	27		
a-7		27	
a+6			27

Problem w rozwiązaniu powyższego zadania wynikał z pewnością z faktu, że nie wystarczyło tylko sprawnie dodawać i odejmować, ale przede wszystkim rozumieć związki między dodawaniem i odejmowaniem. Zadanie poprawnie rozwiązało zaledwie 70 uczniów, to jest 32,4% badanych, natomiast 41 uczniów (19%) nie podjęło próby jego rozwiązania. Z analizy rozwiązań zadań okazało się również, że badani uczniowie mieli problem z zastosowaniem podstawowych reguł dotyczących kolejności wykonywania obliczeń. Umiejętność tę sprawdzało zadanie 4, obejmujące następujące działania:

4. Oblicz:

$$9 \times 3 - 3 \times 9 = \dots$$

$$7 \times 5 - 4 \times 7 = \dots$$

$$28 : 4 - 4 = \dots$$

$$10 - 27 : 3 = \dots$$

Spośród 198 uczniów, którzy podjęli próbę jego rozwiązania, 100 uczniów (46,3%) rozwiązało zadanie poprawnie, natomiast 18 uczniów (8,3%) nie próbowało tego zadania rozwiązać.

Analizując uzyskane wyniki w zakresie techniki rachunkowej, wzięto pod uwagę także płeć badanych dzieci. Dane na ten temat zawiera tabela 17. Z danych zawartych w tabeli wynika, że badani chłopcy pamięciowo liczą sprawniej niż dziewczynki. Uzyskali oni 732 punkty na 1200, co stanowi 61,0% punktów możliwych do zdobycia, natomiast dziewczynki otrzymały 803 punkty spośród 1392 punktów możliwych do zdobycia, to jest 57,7%. Kolejną zmienną niezależną, jaką

brano pod uwagę analizując wyniki uzyskane przez badanych uczniów, było środowisko ich życia. Tabela 20 pokazuje wyniki dzieci ze szkół wiejskich i szkół miejskich.

Tabela 17. Liczba i procent punktów uzyskanych przez uczniów klasy III za zadania w zakresie techniki rachunkowej z uwzględnieniem płci badanych dzieci

Obszar edukacji matematycznej	Płeć	N	Maksymalna liczba punktów do uzyskania	Liczba punktów uzyskanych	Procent punktów uzyskanych (%)
Technika rachunkowa	K	116	1392	803	57,7
	M	100	1200	732	61,0
	Razem	216	2592	1535	59,2

Tabela 18. Liczba i procent punktów uzyskanych przez uczniów klasy III za zadania z techniki rachunkowej z uwzględnieniem środowiska życia badanych dzieci

Obszar edukacji matematycznej	Środowisko życia	N	Maksymalna liczba punktów do uzyskania	Liczba punktów uzyskanych	Procent punktów uzyskanych (%)
Technika rachunkowa	Miasto	175	2100	1281	61,0
	Wieś	41	492	254	51,6
	Razem	216	2592	1535	59,2

Wyniki zawarte w tabeli 18 wskazują na zdecydowanie wyższy poziom sprawności rachunkowej uczniów szkół miejskich od poziomu sprawności rachunkowej uczniów szkół wiejskich. Uczniowie szkół miejskich uzyskali 1281 na 2100 możliwych do zdobycia, co stanowi 61,0%. Natomiast ich rówieśnicy ze szkół wiejskich uzyskali 254 punkty spośród 492 możliwych do zdobycia (51,6%).

Poziom umiejętności uczniów klasy trzeciej w zakresie rozwiązywania zadań tekstowych standardowych

Zadania tekstowe można klasyfikować według różnych kryteriów, stąd różne ich rodzaje bądź typy. Praktyka szkolna pokazuje, że większość zadań tekstowych rozwiązywanych na etapie edukacji wczesnoszkolnej to zadania standardowe, które można najkrócej określić jako zadania o poprawnej strukturze. B. Gleichgewicht podaje następujące warunki, jakie spełnia zadanie standardowe:

- zawiera wystarczającą ilość danych dla otrzymania jednoznacznego rozwiązania i przy tym brak jest zbędnych danych;
- treść zadania nie prowadzi do sprzeczności;

• pytania wykazują ścisły związek z danymi, zadanie ma sens życiowy, warunki są wystarczająco precyzyjne, zadanie poddaje się matematyzacji arytmetycznej (Gleichgewicht 1988, s. 5).

W trakcie pracy z zadaniem standardowym rolą ucznia jest je rozwiązać po ustaleniu ukrytych w nim związków, bez jakiegokolwiek ingerencji w jego strukturę.

Powyższe zadania często wymagają zastosowania zapamiętanych schematów postępowania. W teście, jak już wspomniano, zawarto 5 zadań tekstowych standardowych. Dotyczyły one wiadomości i umiejętności praktycznych oraz geometrii. Wyniki uzyskane przez uczniów w zakresie ich rozwiązywania zawiera tabela 19.

Tabela 19. Liczba i procent punktów uzyskanych przez badanych uczniów klasy III za zadania tekstowe standardowe

Obszar edukacji matematycznej	Maksymalna liczba punktów do uzyskania	Liczba punktów uzyskanych	Procent punktów uzyskanych (%)
Zadania tekstowe standardowe	2592	1211	46,7

Z danych zawartych w tabeli wynika, że poziom rozwiązywania zadań tekstowych standardowych jest niezadowalający. Badani uczniowie otrzymali bowiem 46,7% możliwych do zdobycia punktów.

Tabela 20 ilustruje, w jaki sposób uczniowie je rozwiązywali.

Tabela 20. Sposób rozwiązywania zadań tekstowych standardowych przez badanych uczniów klasy III

Obszar edukacji matematycznej	Liczba zadań rozwiązywanych ogółem	Liczba zadań rozwiązanych:			Liczba zadań opuszczonych
		P_p	C_p	O_f	
Zadania tekstowe standardowe	1080	372	245	306	157
	100,0%	34,4	22,7	28,3	11,6

Z danych zawartych w tabeli wynika, że spośród 1080 uczniowie rozwiąza-li poprawnie 372 zadania. Stanowi to 34,4%. Częściowo poprawnie rozwiązano 245 zadań (22,7%), zaś 306 (28,3%) rozwiązano błędnie, a 157 uczniowie nie próbowali rozwiązać.

Analiza rozwiązań wskazuje, że najłatwiejszym zadaniem dla badanych uczniów okazało się takie oto zadanie:

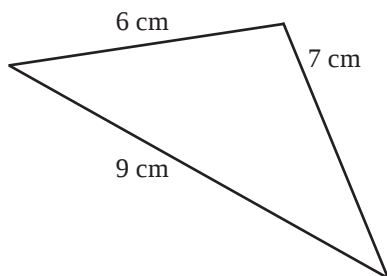
3. Wodę z butelki, w której mieści się jeden litr, można przelać do trzech takich kubków.



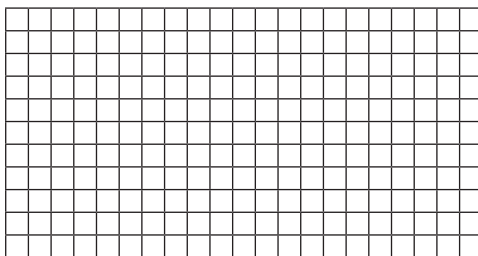
Ile takich kubków wody trzeba wlać do trzylitrowego naczynia?

Próbę jego rozwiązania podjęło 185 uczniów, z których 139 rozwiązało zadanie poprawnie, 10 częściowo poprawnie, 36 błędnie. Natomiast 31 uczniów nie podjęło próby rozwiązania powyższego zadania. Zdecydowanie najtrudniejszym zadaniem dla badanych uczniów było zadanie z zakresu geometrii:

5. Zosia narysowała trójkąt taki, jak na rysunku:



Narysuj prostokąt, którego obwód będzie równy obwodowi tego trójkąta.
Zapisz wymiary tego prostokąta.



Powyższe zadanie poprawnie rozwiązało tylko 21 uczniów (9,7%), blisko połowa badanych uczniów (107) rozwiązała poprawnie tylko pierwszą część zadania, to znaczy obliczyli oni obwód narysowanego trójkąta, ale nie wykonali drugiej części zadania. 52 badanych (24%) rozwiązało zadanie błędnie. Większość z nich nie obliczyła obwodu trójkąta, lecz przystąpiła od razu do narysowania prostokąta.

Dlatego obwody wykonanych przez uczniów prostokątów nie były zgodne z obwodem trójkąta. W zadaniu polecenie obliczenia obwodu trójkąta nie było podane wprost. Uczeń powinien jednak wyciągnąć samodzielnie wniosek, że bez wykonania tej czynności nie da się rozwiązać zadania poprawnie. Drugi rodzaj błędów wynikał z usterek rachunkowych. Uczniowie niepoprawnie wyliczyli sumę boków trójkąta i rysowali prostokąty o złych wymiarach. Zadania tego nie próbowało rozwiązać 36 uczniów, tj. 16,7%.

Drugim pod względem trudności dla badanych uczniów okazało się następujące zadanie:

2. Rozwiąż zadanie:

CENNIK	
(za 1 kilogram)	
ogórki	4 zł
pomidory	6 zł
ziemniaki	1 zł
papryka	8 zł

Zosia miała na zakupy 30 zł. Kupiła 3 kilogramy ziemniaków, 1 i pół kilograma ogórków, 2 kilogramy pomidorów, pół kilograma papryki. Za resztę pieniędzy kupiła cytryny.
Ile kilogramów cytryn kupiła?

Powyższe zadanie wymagało wybrania odpowiednich informacji z podanego obok treści zadania cennika, a następnie użycia ich w obliczeniach rachunkowych. Wbrew pozorom nie jest to trudne zadanie, chociaż jego forma zewnętrzna może to sugerować. Zadanie nawiązuje do sytuacji znanej dzieciom i pokazuje w sposób namacalny związek matematyki z życiem codziennym. Tymczasem tylko 49 uczniów (22,7%) zadanie to rozwiązało poprawnie. Tyle samo uczniów rozwiązało zadanie poprawnie częściowo. Obliczyli oni wartość zakupów Zosi i na tym poprzestali. Nasuwa się wniosek, że być może w zadaniach o zakupach, które uczniowie rozwiązują w trakcie zajęć, należy obliczać przede wszystkim ich wartość. Ponadto może to świadczyć o tym, że uczniowie nie czytają wnikliwie zadań i rozwiązują je, nie uświadamiając sobie głównego pytania w zadaniu. Swoją uwagę skupiają na liczbach podanych w treści zadania.

Uczniów, którzy próbowali rozwiązać zadanie, lecz im się nie powiodło, było 93 (43,0%). Analiza błędnych rozwiązań pokazała najbardziej charakterystyczne błędy popełnione przez badanych uczniów. Niektórzy uczniowie stwierdzili, że pytanie jest niewłaściwe i wpisywali swoje, np.: „*Ile kg kupiła wszystkiego?*”, „*Czy wystarczyło jej pieniędzy?*”, „*Ile zapłaciła?*”. Jest to niewątpliwie odwołanie się do zadań z podręczników. Drugi rodzaj błędów polegał na napisaniu działania z użyciem liczb z treści zadania, lecz nie uwzględniono przy tym wszystkich danych, np. $30\text{ zł} - 4\text{ zł} = 26\text{ zł}$, kolejny rodzaj błędów to błędy rachunkowe. W przypadku omawianego zadania 25 uczniów (11,6%) nie podjęło próby jego rozwiązania.

W analizie wyników uwzględniono zmienną niezależną, jaką była płeć badanych dzieci. Tabela 21 zawiera dane na ten temat.

Tabela 21. Liczba i procent punktów uzyskanych przez uczniów klasy III za zadania tekstowe standardowe z uwzględnieniem płci badanych dzieci

Obszar edukacji matematycznej	Płeć	N	Maksymalna liczba punktów do uzyskania	Liczba punktów uzyskanych	Procent punktów uzyskanych (%)
Zadania tekstowe standardowe	K	116	1392	657	47,2
	M	100	1200	554	46,2
	Razem	216	2592	1211	46,7

Z analizy wyników zawartych w tabeli wynika, że płeć nie była czynnikiem różnicującym wyniki badanych uczniów w zakresie rozwiązywania zadań tekstowych standardowych. Wyniki uzyskane przez dziewczynki i chłopców były bardzo zbliżone, z minimalną przewagą na korzyść dziewczynek. Kolejną zmienną niezależną przyjętą w omawianych badaniach było środowisko życia badanych uczniów. Uzyskane przez uczniów szkół miejskich i wiejskich wyniki zebrano w tabeli 22.

Tabela 22. Liczba i procent punktów uzyskanych przez uczniów klasy III za zadania tekstowe standardowe z uwzględnieniem środowiska życia badanych dzieci

Obszar edukacji matematycznej	Środowisko życia	N	Maksymalna liczba punktów do uzyskania	Liczba punktów uzyskanych	Procent punktów uzyskanych (%)
Zadania tekstowe standardowe	Miasto	175	2100	1021	48,6
	Wieś	41	492	190	38,6
	Razem	216	2592	1211	46,7

Dane w tabeli wskazują na zdecydowanie wyższy poziom umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych standardowych przez uczniów szkół z miasta od poziomu umiejętności uczniów szkół ze wsi w omawianym zakresie. Uczniowie szkół miejskich uzyskali 1021 punktów spośród 2100 możliwych do zdobycia, co stanowi 48,6%. Natomiast uczniowie ze szkół wiejskich zdobyli 190 punktów na 492, to jest 38,6%.

Poziom umiejętności uczniów klasy trzeciej w zakresie rozwiązywania zadań niestandardowych

Zadania niestandardowe to specyficzny rodzaj zadań tekstowych, które można określić jako zadania o zaburzonej celowo strukturze. Rodzaje zadań niestandardowych

zostały najpełniej opisane przez B. Gleichgewichta w książce pt. *Arytmetyczne zadania tekstowe dla nauczycieli klas 1–4* (Gleichgewicht 1988). Praca z zadaniami niestandardowymi stanowi znakomitą okazję do rozwijania myślenia matematycznego dzieci i do wnikliwej analizy treści zadań tekstowych. Dlatego nie powinno tego zabraknąć w edukacji matematycznej uczniów na poziomie klas I–III.

W teście badającym poziom wiadomości i umiejętności matematycznych uczniów klasy III zamieszczono cztery zadania niestandardowe. Były to:

- zadanie z nadmiarem danych, w którym wystąpiły dane dublujące się;
- zadanie z niedomiarem danych, którego nie można było rozwiązać wskutek braku pewnych danych;
- zadanie sprzeczne, w którym dane były sprzeczne z pytaniem;
- zadanie o złej treści, w którym pytanie nie miało związku z danymi.

Każdy z powyższych rodzajów zadań niestandardowych wymagał od uczniów wykonania innych czynności intelektualnych, prowadzących do przekonstrowania go w postać zadania standardowego.

Ogólne wyniki uzyskane przez uczniów w zakresie rozwiązywania takich zadań ilustruje tabela 23.

Tabela 23. Liczba i procent punktów uzyskanych przez badanych uczniów klasy III za zadania niestandardowe

Obszar edukacji matematycznej	Maksymalna liczba punktów do uzyskania	Liczba punktów uzyskanych	Procent punktów uzyskanych (%)
Zadania tekstowe niestandardowe	2592	1614	62,3

Jak wynika z powyższej tabeli, badani uczniowie mieli możliwość uzyskania 2592 punkty za poprawne rozwiązanie czterech zadań niestandardowych. Otrzymali 1614 – co stanowi 62,3% maksymalnej liczby punktów.

Tabela 24 ilustruje sposób rozwiązywania zadań niestandardowych przez badanych uczniów.

Tabela 24. Sposób rozwiązywania zadań niestandardowych przez badanych uczniów klasy III

Obszar edukacji matematycznej	Liczba zadań rozwiązywanych ogółem	Liczba zadań rozwiązanych:			Liczba zadań opuszczonych
		P_p	C_p	O_f	
Zadania tekstowe niestandardowe	864	407	259	160	38
	100,0%	47,1	30,0	18,5	4,4

Z tabeli wynika, że spośród liczby wszystkich 864 zadań niestandardowych uczniowie bezbłędnie rozwiązali blisko połowę, to jest 407 zadań (47,1%).

259 zadań (30,0%) uczniowie rozwiązali częściowo poprawnie. Natomiast 160 zadań, czyli 18,5%, rozwiązali błędnie. W przypadku 38 zadań, co stanowi 4,4% wszystkich zadań niestandardowych, uczniowie nie podjęli próby ich rozwiązania.

Analiza rozwiązań poszczególnych rodzajów zadań niestandardowych pokazała, że najłatwiejszym zadaniem niestandardowym było dla uczniów zadanie z **niedomiarem danych**, które brzmiało: *Ada wyjęła ze skarbonki pieniądze i poszła do sklepu papierniczego. Kupiła kolorowy papier za 15 zł i nożyczki za 12 zł. Ile otrzymała reszty?* W zadaniu powyższym nietrudno zauważyć, że brakuje jednej danej. Na podstawie danych zawartych w treści zadania można obliczyć wartość zakupów Ady, natomiast nie można udzielić odpowiedzi na postawione w zadaniu pytanie. Wielu uczniów przekreśliło wyraz *pieniądze*, wpisując w to miejsce odpowiednią kwotę pieniędzy (większą od wartości zakupów Ady) i poprawnie rozwiązało powyższe zadanie. Niektórzy badani uczniowie zmienili pytanie postawione w zadaniu na pytanie: *Ile Ada zapłaciła za zakupy?*, inni z kolei pisali rozwiązanie zadania w postaci działania: $15\text{ zł} + 12\text{ zł} = 27\text{ zł}$ bez zmiany pytania. Zadanie z niedomiarem danych poprawnie rozwiązało 132 uczniów (61,1%). Zaledwie 7 (3,2%) uczniów opuściło to zadanie. Drugim zadaniem, które sprawiło uczniom najmniej trudności, było **zadanie sprzeczne** (w którym dane były sprzeczne z pytaniem): *W beczce było 50 litrów wody. Tata zużył najpierw 30 litrów wody na podlanie ogórków, a potem jeszcze 40 litrów na podlanie pomidorów. Ile litrów wody zostało w beczce?* Zadanie to można było przekonstruować do postaci zadania standardowego na dwa sposoby. Aby pytanie było zasadne, należało zwiększyć ilość litrów wody w beczce lub zmniejszyć ilość wody użytą przez tatę do podlewania. Większość badanych uczniów wybrała pierwszą opcję, czyli zwiększyła liczbę litrów wody w beczce. Uczniów, którzy wykonali bezbłędnie powyższe czynności, było 124 (57,4%). Natomiast takich, którzy nie podjęli próby przekształcenia i rozwiązania zadania było 5 (2,3%).

Zadanie o **złej treści**, w którym pytanie nie miało związku z danymi: *Zegar dworcowy wskazuje godzinę 11. Pociąg do Krakowa ma odjechać ze stacji za kwadrans. Z którego peronu odjedzie pociąg do Krakowa?* okazało się dla badanych uczniów trudniejsze od omawianych dotychczas zadań niestandardowych. Na podstawie danych zawartych w zadaniu nie można odpowiedzieć na zadane pytanie. Chcąc przeformułować zadanie w zadanie standardowe, należało zmienić pytanie. Uczniów, którzy poprawnie przekształcili i rozwiązali zadanie było 106 (49,0%). Niektórzy uczniowie zauważyli bezsensowność pytania, ale go nie zmienili. Pisali tylko, że „*pytanie jest złe*”. Niektórzy zaś napisali: *Nie jest podany peron*. Inni wpisywali dowolny numer peronu, np.: *Pociąg odjedzie z peronu 2*, bez wykonywania przy tym żadnych działań arytmetycznych. Być może odwoływali się do własnych doświadczeń, kiedy wyjeżdżali gdzieś pociągiem. Niektórzy

uczniowie pisali działanie arytmetyczne będące rozwiązaniem zadania, z wykorzystaniem danych w zadaniu, bez zmiany pytania. Autor działania: $11 + 15 = 26$ wykorzystał liczbę 11 i słowo *kwadrans* zastąpił liczbą 15. Świadczyć to może o tym, że uczniowie nie czytają wnikliwie treści zadań, dostrzegają w nich tylko liczby, które chcą wkomponować w działania arytmetyczne. W przypadku omawianego zadania 19 uczniów (8,8%) nie podjęło próby jego rozwiązania.

W zadaniu z **nadmiarem danych**, którego treść brzmiała: *Krzyś kupił 3 czekolady po 4 zł każda. Dał do kasy 20 zł i otrzymał 8 zł reszty. Ile zapłacił za czekolady?* wielu uczniom nie przeszkadzało, że pewne liczby nie są potrzebne do rozwiązania zadania. Zadania z nadmiarem danych dają się bowiem rozwiązać bez ingerencji w ich treść. Dlatego uczniowie często nie zauważają błędu w konstrukcji takich zadań. Potwierdzeniem tego faktu były rozwiązania typu: $3 - 4 = 12$, bez wykreślenia zbędnych danych. Powyższe zadanie poprawnie rozwiązało zaledwie 45 uczniów (20,8%), 121 uczniów, co stanowi 56%, rozwiązało je częściowo poprawnie, 43 uczniów (19,9%) rozwiązało błędnie, a 7 (3,2%) opuściło je.

Analizując pracę uczniów z zadaniami standardowymi, porównano umiejętności dziewczynek i chłopców w tym zakresie. Dane te ilustruje tabela 25.

Tabela 25. Liczba i procent punktów uzyskanych przez uczniów klasy III za zadania niestandardowe z uwzględnieniem płci badanych dzieci

Obszar edukacji matematycznej	Płeć	N	Maksymalna liczba punktów do uzyskania	Liczba punktów uzyskanych	Procent punktów uzyskanych (%)
Zadania tekstowe niestandardowe	K	116	1392	912	65,5
	M	100	1200	702	58,5
	Razem	216	2592	1614	62,3

Z tabeli wynika, że dziewczynki uzyskały nieco wyższe wyniki od chłopców w zakresie rozwiązywania zadań niestandardowych. Otrzymały 912 punktów z 1392 możliwych do zdobycia, co stanowi 65,5%. Chłopcy uzyskali 702 punkty z 1200 możliwych do zdobycia, czyli 58,5%.

Tabela 26. Liczba i procent punktów uzyskanych przez uczniów klasy III za zadania niestandardowe z uwzględnieniem środowiska życia badanych dzieci

Obszar edukacji matematycznej	Środowisko życia	N	Maksymalna liczba punktów do uzyskania	Liczba punktów uzyskanych	Procent punktów uzyskanych (%)
Zadania tekstowe niestandardowe	Miasto	175	2100	1332	63,4
	Wieś	41	492	282	57,3
	Razem	216	2592	1614	62,3

Kolejna zmienna niezależna uwzględniona w analizie poziomu osiągnięć w zakresie rozwiązywania zadań niestandardowych to środowisko życia badanych uczniów. Tabela 26 zawiera informacje dotyczące wyników pracy z zadaniami niestandardowymi uczniów szkół wiejskich i miejskich. Dane zawarte w tabeli wskazują, że uczniowie szkół miejskich uzyskali wyższe wyniki od uczniów szkół wiejskich w omawianym zakresie. Uczniowie z miasta uzyskali 1332 punkty z 2100 możliwych do zdobycia, co stanowi 63,4% pkt., natomiast ich rówieśnicy ze wsi – 282 punkty z 492, co stanowi 57,3%.

Podsumowanie

Uzyskane wyniki mogą budzić niepokój. Okazało się bowiem, że po trzech latach nauki szkolnej najwięcej badanych uczniów charakteryzuje się średnim poziomem umiejętności matematycznych, jak również duża grupa uczniów prezentuje niski poziom powyższych umiejętności.

Spośród trzech badanych obszarów edukacji matematycznej uczniowie najlepiej poradzili sobie z rozwiązywaniem zadań tekstowych niestandardowych. Świadczy to o kreatywności badanych uczniów, ponieważ praca z zadaniami niestandardowymi wymaga przekształcenia treści, zmiany danych, warunku czy też pytania, czyli wykonania ważnych czynności poznawczych. Rozwiązywanie tego typu zadań ma przede wszystkim na celu zwiększenie krytycyzmu uczniów i uświadomienie im, że nie należy zgadywać, jakie ma być działanie arytmetyczne i wykonywać je mechanicznie. Dla wielu uczniów praca z zadaniami tekstowymi niestandardowymi jest przyjemnością i zabawą. Uczeń często nie zdaje sobie nawet sprawy z tego, że przekształcając zadanie niestandardowe do postaci zadania standardowego wykonuje bardzo ciężką pracę, ponieważ nie ograniczają go żadne schematy postępowania.

Technika rachunkowa to drugi pod względem stopnia opanowania przez badanych uczniów obszar edukacji matematycznej. Wyniki w tym zakresie również nie napawają optymizmem. Nikt nie ma bowiem wątpliwości, że umiejętności rachunkowe są uczniom niezbędne w realizacji treści matematycznych i opanowaniu umiejętności matematycznych. Analiza podstawy programowej, programów nauczania i podręczników wykazuje, że technika rachunkowa zajmuje w matematycznej edukacji wczesnoszkolnej ważne miejsce. Należało przypuszczać, że będzie to obszar, który trzecioklasiści opanowali w stopniu zadowalającym. Jak dowodzi praktyka szkolna, uczniowie rozwiązują w podręcznikach i kartach pracy ćwiczenia kształtujące przede wszystkim technikę rachunkową. Powyższe cwi-

czenia przyjmują różnorodne ciekawe formy, odbiegając od tradycyjnych słupków, celem motywowania uczniów do ich rozwiązywania.

Kolejnym sprawdzanym obszarem edukacji matematycznej były zadania tekstowe standardowe. W tym obszarze badani uczniowie uzyskali najniższe wyniki. Tymczasem rozwiązywanie zadań tekstowych jest jedną z podstawowych i najważniejszych umiejętności pojawiających się procesie matematycznego kształcenia w szkole podstawowej. Zadania tekstowe są nie tylko nośnikiem wiedzy matematycznej, ale także sposobem zastosowania tej wiedzy w praktyce. Są niejako narzędziem służącym do rozwiązywania problemów wynikających z życia codziennego. Ponadto są środkiem rozwijającym logiczne i twórcze myślenie uczniów. Dlatego zadania tekstowe zajmują ważne miejsce w matematycznej edukacji uczniów klas I–III. Niskie wyniki uczniów mogą wynikać z faktu, że w rozwiązywaniu zadań standardowych nauczyciele wymagają od nich przede wszystkim odtworzenia zapamiętanego schematu postępowania. W sytuacji, kiedy uczeń go nie pamięta, nie podejmuje prób rozwiązania zadania, ponieważ: „Jak pokazuje praktyka szkolna, za poprawne uznawane są tylko takie metody rozwiązywania zadań, których oczekuje i których uczył nauczyciel. Samodzielne, niekonwencjonalne strategie rozwiązania odkrywane przez uczniów nie są brane pod uwagę i traktowane są często jako niepoprawne” (Ceglińska 2012, s. 127).

W związku z powyższym uczniowie nie mają przyzwolenia na wychodzenie poza standardowe metody rozwiązywania zadań. Zapewnienie uczniom możliwości samodzielnego poszukiwania dróg rozwiązania zadań może stanowić istotny przyczynek do podniesienia poziomu umiejętności ich rozwiązywania.

Analiza wyników badań wykazała, że płeć nie była czynnikiem różnicującym osiągnięcia matematyczne uczniów na tym etapie kształcenia, w przeciwieństwie do środowiska życia dzieci.

Bibliografia

- Ceglińska B. (2012), *O niektórych przyczynach trudności w rozwiązywaniu zadań tekstowych przez uczniów klas I – III*, „Lubelski Rocznik Pedagogiczny”, t. XXXI, Lublin.
- Gleichgewicht B. (1988), *Arytmetyczne zadania tekstowe dla nauczycieli klas 1–4*, WSiP, Warszawa.
- Dąbrowski M. (2008), *Pozwólmy dzieciom myśleć! O umiejętnościach matematycznych polskich trzecioklasistów*. Wydawca: CKE, Warszawa.
- Kompetencje kluczowe. Realizacja koncepcji na poziomie szkolnictwa obowiązkowego* (2005), EURYDICE Fundacja Rozwoju Systemu Edukacji, Warszawa.