UNIWERSYTET MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ W LUBLINIE
WYDZIAŁ MATEMATYKI, FIZYKI I INFORMATYKI

Wybrane własności i zastosowania sum prostych przestrzeni Banacha

Selected properties and applications of direct sums of Banach spaces

Joanna Markowicz

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem prof. dra hab. Stanisława Prusa

Lublin, 2021

Spis treści

Wstęp

Jednym z kierunków badań w geometrii przestrzeni Banacha jest studiowanie warunków, które zapewniają, że dana geometryczna własność zostanie zachowana przy pewnych konstrukcjach, np. sum prostych lub przestrzeni interpolacyjnych. Niniejsza praca zawiera wyniki mieszczące się w tym nurcie badań.

Wśród geometrycznych własności przestrzeni Banacha wyróżniamy klasyczne: wypukłość, gładkość i ich jednostajne odpowiedniki oraz mniej znane: niekwadratowość, własności Opiala i własność Garcíi-Falseta. Własności te mają liczne zastosowania w analizie funkcjonalnej, w szczególności w metrycznej teorii punktów stałych. W rozdziale 1 pracy przypominamy definicje i podstawowe wyniki dotyczące powyższych własności.

W podrozdziale 1.1 omawiamy zagadnienia dotyczące wypukłości i gładkości w przestrzeniach Banacha. Tę część pracy rozpoczynamy przypomnieniem definicji ścisłej wypukłości, modułu wypukłości δ_X i jednostajnej wypukłości przestrzeni Banacha X, które uzupełniamy przykładami i najważniejszymi własnościami. Następnie przypominamy definicje gładkości, modułu gładkości ρ_X i jednostajnej gładkości przestrzeni Banacha X wraz z własnościami i przykładami. Prezentujemy znane twierdzenia podające zastosowanie powyższych własności w zagadnieniach związanych ze strukturą normalną i własnością punktów stałych. Ostatnia część tego podrozdziału zawiera klasyczne wyniki dotyczące związków między jednostajną wypukłością a jednostajną gładkością w przestrzeni Banacha X, w przestrzeni sprzężonej X^* oraz w przestrzeni drugiej sprzężonej X^{**}.

Podrozdział 1.2 zawiera omówienie jednostajnej niekwadratowości w przestrzeni Banacha. Przypominamy definicję stałej Jamesa $J(X)$ przestrzeni X, która pozwala scharakteryzować jednostajną niekwadratowość i prezentujemy podstawowe własności tej stałej.

Podrozdział 1.3 poświęcony jest własnościom Opiala. Podstawowy wariant tej własności został wprowadzony przez Opiala w [55], gdzie był użyty w twierdzeniu o słabej zbieżności ciągu iteracyjnego do punktu stałego odwzorowania nieoddalającego. Również jednostajna wersja własności Opiala ma zastosowania w metrycznej teorii punktów stałych (patrz [56]). Zastosowanie tej wersji do problemu słabej zbieżności ciągów otrzymanych przy użyciu algorytmu zachłannego w przestrzeniach Banacha zostało podane w [16].

W pracy tej omawiamy trzy wersje: słabą własność Opiala, własność Opiala i jednostajną własność Opiala, przy czym własności te odnosimy nie tylko do słabej topologii, ale w ogólniejszym podejściu do pewnej topologii τ. Z jednostajną własnością Opiala dla przestrzeni Banacha X i topologii τ związany jest moduł $r_{X,\tau}$. My definiujemy inny moduł $s_{X,\tau}$ i autorskie wyniki w podrozdziale 1.3 dotyczą własności modułu $s_{X,\tau}$ i wzorów wiążących ten moduł z $r_{X,\tau}$. W następnym podrozdziale 1.4 zostały zebrane podstawowe fakty dotyczące współczynnika Garcíi-Falseta $R(X)$ przestrzeni Banacha X.

Rozdział 2 pracy poświęcony jest kratom Banacha. Pierwsza część podrozdziału 2.1 stanowi wstęp do teorii krat Banacha i zawiera omówienie wybranych zagadnień tej teorii. W drugiej części tego podrozdziału zostały zebrane podstawowe definicje i fakty dotyczące baz bezwarunkowych. Przestrzenie z takimi bazami ze stałą bezwarunkową 1 tworzą szczególną klasę krat Banacha, które odgrywa istotną rolę w dalszej części pracy.

Dla krat Banacha rozważa się nie tylko klasyczne, geometryczne własności przestrzeni Banacha, lecz również szczególne geometryczne własności, które odnoszą się do porządku. Należą do nich jednostajna monotoniczność i porządkowa jednostajna gładkość, którym poświęcony jest podrozdział 2.2. W pewnym sensie są to kratowe odpowiedniki jednostajnej wypukłości i gładkości w przestrzeniach Banacha. Dla danej kraty Banacha X rozważa się dwa moduły $\delta_{m,X}$ oraz σ_X odpowiadające jednostajnej monotoniczności oraz funkcję $\rho_{m,X}$ zwaną modułem porządkowej gładkości. Stałą ściśle związaną z tym ostatnim modułem jest kąt Riesza mający zastosowanie w metrycznej teorii punktów stałych dla krat Banacha.

Przykład 2.2.2 zawiera prostą konstrukcję dwuwymiarowej kraty Banacha, której moduł monotoniczności $\delta_{m,X}$ nie jest funkcją wypukłą. Jest to o tyle istotne, że w literaturze pojawiały się stwierdzenia, że moduł ten jest funkcją wypukłą. Co więcej, przykład 2.2.2 pokazuje, że jeden ze wzorów z pracy [38], podający zależność między modułem monotoniczności δ_{m,X^*} i modułem porządkowej gładkości $\rho_{m,X}$ jest fałszywy. Twierdzenie 2.2.2 zawiera z kolei wzory przedstawiające zależności między modułami monotoniczności $\delta_{m,X}$ oraz σ_X. Podobne wzory znajdują się w pracy [38], ale nie są one poprawne. Zamieszczamy także dowód wzoru $\delta_{m,X^{**}} = \delta_{m,X}$ z pracy [38], gdyż przy jego wyprowadzeniu w [38] korzysta się ze wspomnianej wyżej zależności między δ_{m,X^*} i $\rho_{m,X}$, która okazała się nieprawdziwa.

Podrozdział 2.3 poświęcony jest jednostajnej niekwadratowości dla krat Banacha. W [20] znaleziono prosty warunek konieczny i dostateczny na to, aby krata $\mathbb{R}^3$ była niekwadratowa. W przykładzie 2.3.1 pokazujemy, że warunek ten nie gwarantuje jednostajnej niekwadratowości dla krat o wymiarze większym niż 3.

W rozdziale 3 badamy geometryczne własności ogólnych sum prostych $Y = \left(\sum_{i\in I} X_i\right)_E$, gdzie $\{X_i\}_{i\in I}$ jest rodziną przestrzeni Banacha, a norma w sumie prostej pochodzi od kraty Banacha E, którą nazywamy przestrzenią bazową dla sumy prostej. Konstrukcja takiej sumy prostej i pewne własności przestrzeni bazowych zostały przedstawione w podrozdziale 3.1. Geometryczne własności sum prostych przestrzeni Banacha były badane np. w [19], [31], [60].

W podrozdział 3.2 przedstawione zostały autorskie wyniki dotyczące jednostajnej wypukłości sumy prostej przestrzeni Banacha. W twierdzeniu 3.2.1 i wniosku 3.2.1 podajemy oszacowanie modułu wypukłości δ_Y sumy prostej $Y = \left(\sum_{i\in I} X_i\right)_E$ przestrzeni Banacha przy użyciu modułów wypukłości przestrzeni X_i oraz przestrzeni E. Wynik ten umożliwia ponadto podanie oszacowania charakterystyki wypukłości $\varepsilon_0(Y)$ sumy prostej. Sumy proste znajdują zastosowanie w przykładzie 3.2.1, gdzie podana jest konstrukcja przestrzeni Y z zadanymi z góry wartościami $\varepsilon_0(Y)$ oraz $\delta_Y(2)$.

Podrozdział 3.3 zawiera autorskie wyniki dotyczące własności Opiala dla sum prostych przestrzeni Banacha. Twierdzenie 3.3.1 zawiera warunki dostateczne dla tego, aby suma prosta $Y = \left(\sum_{i\in I} X_i\right)_E$ miała słabą własność Opiala i własność Opiala. W twierdzeniu 3.3.3 podane zostało natomiast oszacowanie modułu s_Y związanego z własnością Opiala dla sumy prostej $Y = \left(\sum_{i\in I} X_i\right)_E$. W konsekwencji otrzymujemy warunki gwarantujące, że Y ma jednostajną własność Opiala.

W podrozdziale 3.4 prezentujemy autorskie wyniki dotyczące współczynnika Garcíi-Falseta dla sumy prostej przestrzeni Banacha. W [26] wykazano, że dla danej przestrzeni Banacha X, warunek $R(X) < 2$ implikuje, że przestrzeń X ma słabą własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających. W twierdzeniu 3.4.1 podajemy warunki, które dla danej kraty

Banacha E gwarantują, że spełniona jest nierówność $R(E) < 2$. Twierdzenie 3.4.2 podaje oszacowanie współczynnika Garcíi-Falseta $R(Y)$ sumy prostej $Y = (\sum_{i \in I} X_i)_E$.

Pozostała część pracy traktuje o przestrzeniach interpolacyjnych. Teoria takich przestrzeni jest rozległą gałęzią analizy funkcjonalnej, która znalazła zastosowania w innych obszarach analizy, w szczególności w równaniach różniczkowych cząstkowych, teorii aproksymacji i analizie numerycznej. Wyniki zawarte w rozdziale 4 dotyczą jednostajnej wypukłości i własności Opiala dla przestrzeni interpolacyjnych, których konstrukcja opiera się na ogólnej, dyskretnej metodzie interpolacji z użyciem abstrakcyjnej przestrzeni z bazą bezwarunkową.

W [14] dyskretna metoda interpolacji posłużyła do znalezienia faktoryzacji operatorów słabo zwartych przez przestrzenie refleksywne. Korzystając z tej metody, Davis [13] udowodnił, że każda jednostajnie wypukła przestrzeń z bazą bezwarunkową jest izomorficzna z dopełnialną podprzestrzenią jednostajnie wypukłej przestrzeni z bazą symetryczną.

Podobnie jak w przypadku sum prostych, w teorii przestrzeni interpolacyjnych naturalnym problemem jest zagadnienie, czy dana własność przestrzeni Banacha zachowuje się przy przejściu do przestrzeni interpolacyjnej. W literaturze opisano wiele różnych metod interpolacji. Stąd rozwiązanie tego problemu jest uzależnione od danej metody.

W podrozdziale 4.1 prezentujemy ogólną, dyskretną metodę interpolacji, która dla danej pary interpolacyjnej $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ przestrzeni Banacha i przestrzeni E z bazą bezwarunkową ze stałą bezwarunkową 1 prowadzi do konstrukcji przestrzeni interpolacyjnej $K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$. Przestrzeń ta jest szczególnym rodzajem rozważanych wcześniej sum prostych. Specyficzną własnością normy w tej przestrzeni jest nierówność z twierdzenia 4.1.2, którą wykorzystujemy w dowodach kolejnych twierdzeń z tego rozdziału.

Podstawowy wynik dotyczący jednostajnej wypukłości dla przestrzeni interpolacyjnych otrzymanych metodą Lionsa–Peetrego został wykazany przez Beauzamy'ego w [2]. Dla zespolonej metody interpolacji twierdzenie o jednostajnej wypukłości zostało wykazane przez Cwikela i Reisnera w [12]. Podrozdział 4.2 zawiera autorskie twierdzenie 4.2.1 dotyczące jednostajnej wypukłości przestrzeni interpolacyjnej $K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$. Pokazuje ono, że jeżeli przynajmniej jedna z przestrzeni w parze interpolacyjnej $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ jest jednostajnie wypukła, to przestrzeń interpolacyjna $K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$ jest również jednostajnie wypukła. W dowodzie tego twierdzenia wykorzystana została idea z pracy [40].

W podrozdziale 4.3 przedstawione są autorskie wyniki dotyczące własności Opiala i jednostajnej własności Opiala w przestrzeniach interpolacyjnych. Twierdzenie 4.3.1 podaje warunki dla pary interpolacyjnej $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$, które gwarantują, że suma $\Sigma_p(\boldsymbol{X}) = X_0 + X_1$ ma słabą własność Opiala lub własność Opiala. Z kolei twierdzenie 4.3.2 podaje warunki dostateczne dla tego, aby przestrzeń interpolacyjna $K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$ miała własność Opiala. Następne wyniki dotyczą jednostajnej własności Opiala. Twierdzenie 4.3.3 zawiera oszacowanie modułu $s_{K_{p,\theta}}$ związanego z jednostajną własnością Opiala przy pomocy modułu monotoniczności $\delta_{m,E}$ kraty E oraz modułów s_{X_0} i s_{X_1} przestrzeni X_0 oraz X_1. Oszacowanie to pozwala stwierdzić, przy jakich warunkach przestrzeń interpolacyjna $K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$ ma jednostajną własność Opiala.

Autorskie wyniki zawarte w tej rozprawie zostały zamieszczone w pracach [49], [50], [51], [52].

Rozdział 1

Geometryczne własności przestrzeni Banacha

W tym rozdziale przypominamy wybrane geometryczne własności przestrzeni Banacha.

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią Banacha. Będziemy zawsze milcząco zakładać, że $\dim X \geqslant 2$. Przez $B(X)$ i $S(X)$ oznaczamy odpowiednio domkniętą kulę jednostkową i sferę jednostkową przestrzeni Banacha X. Przez X^* rozumiemy przestrzeń wszystkich ciągłych funkcjonałów liniowych określonych na przestrzeni X, czyli przestrzeń sprzężoną (dualną) do X. Symbolem X^{**} oznaczamy przestrzeń drugą sprzężoną do X, czyli $X^{**} = (X^*)^*$.

1.1 Jednostajna wypukłość i jednostajna gładkość

Jednostajna wypukłość i jednostajna gładkość należą do najbardziej klasycznych geometrycznych własności przestrzeni Banacha. Pierwsza z tych własności jest jednostajną wersją ścisłej wypukłości.

Definicja 1.1.1. Mówimy, że przestrzeń Banacha X jest *ściśle wypukła*, jeśli dla dowolnych $x, y \in S(X)$, $x \neq y$ zachodzi nierówność

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1.$$

Z powyższego warunku wynika, że przestrzeń Banacha X jest ściśle wypukła, jeśli sfera jednostkowa $S(X)$ nie zawiera żadnego odcinka o końcach $x \neq y$. Wiele charakteryzacji ścisłej wypukłości można znaleźć m. in. w [28] i [37].

Silniejszą własnością jest jednostajna wypukłość, która została zdefiniowana przez J. A. Clarksona w [11]. Własność tę można opisać przy pomocy funkcji zwanej modułem wypukłości.

Definicja 1.1.2. Niech X będzie przestrzenią Banacha. *Modułem wypukłości* przestrzeni X nazywamy funkcję $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$ zdefiniowaną jako

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in B(X),\ \|x-y\| \geqslant \varepsilon\right\}. \tag{1.1}$$

Przestrzeń X jest *jednostajnie wypukła*, jeśli $\delta_X(\varepsilon) > 0$ dla każdego $\varepsilon > 0$.

W definicji modułu wypukłości warunek $x, y \in B(X)$ można zastąpić przez $x, y \in S(X)$, zaś warunek $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$ przez $\|x-y\| = \varepsilon$ (patrz [44]).

Przestrzeń Banacha X jest ściśle wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta_X(2) = 1$. Każda przestrzeń jednostajnie wypukła jest ściśle wypukła i te dwa pojęcia są równoważne w przestrzeniach skończenie wymiarowych, co wynika ze zwartości kuli jednostkowej w tych przestrzeniach. W przypadku przestrzeni nieskończenie wymiarowych pojęcie jednostajnej wypukłości jest istotnie silniejsze od pojęcia ścisłej wypukłości (patrz [28]).

Moduł wypukłości δ_X ma szereg interesujących własności, które można znaleźć w m.in. w [28], [37], [44] oraz [59]. Poniżej przedstawiamy wybrane z nich.

- $\delta_X(0) = 0$ i δ_X jest funkcją niemalejącą.
- δ_X jest funkcją ciągłą na przedziale $[0,2)$, ale nie musi być ciągła w punkcie 2.
- Funkcja δ_X nie musi być wypukła, ale iloraz różnicowy $\frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon}$ jest niemalejącą funkcją ε na przedziale $(0,2]$.
- Dla dowolnego $\varepsilon \in [0,2]$ mamy

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\{\delta_E(\varepsilon)\},$$

gdzie infimum jest brane po wszystkich dwuwymiarowych podprzestrzeniach E przestrzeni X.

Przykład 1.1.1.

1. Przestrzenie l^1, l^∞, L^1, L^∞, c_0 nie są ściśle wypukłe. Moduł wypukłości tych przestrzeni jest funkcją zerową.

2. Przestrzeń c_0 z normą $\|\cdot\|_\mu$ zdefiniowaną jako

$$\|x\|_\mu = \|x\|_{c_0} + \mu\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{x_i}{i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

dla $\mu > 0$ oraz $x = (x_i) \in c_0$, gdzie $\|x\|_{c_0} = \sup_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|$ jest ściśle wypukła, ale nie jest jednostajnie wypukła (patrz [28]).

4. Przestrzenie L^p i l^p, dla $p \in (1, \infty)$ są jednostajnie wypukłe. Niech $X = L^p$ lub $X = l^p$. Jeśli $p \geqslant 2$, to moduł wypukłości X wyraża się wzorem

$$\delta_X(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p},$$

jeśli zaś $1 < p \leqslant 2$, to moduł ten jest dany w sposób uwikłany:

$$\left(1 - \delta_X(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}\right)^p + \left|1 - \delta_X(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}\right|^p = 2$$

dla każdego $\varepsilon \in [0, 2]$ (patrz [30]).

Moduł wypukłości przestrzeni Hilberta H wyraża się wzorem

$$\delta_H(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$$

i twierdzenie Daya-Nordlandera orzeka, że jest to największy możliwy moduł wypukłości, czyli jeśli $\dim X \geqslant 2$, to

$$\delta_X(\varepsilon) \leqslant \delta_H(\varepsilon)$$

dla każdego $\varepsilon \in [0, 2]$ (patrz [54]).

Z modułem wypukłości związany jest współczynnik

$$\varepsilon_0(X) = \sup\{\varepsilon \in [0, 2] : \delta_X(\varepsilon) = 0\}$$

zwany *charakterystyką wypukłości* przestrzeni X.

Poniżej przedstawiamy wybrane związki tego współczynnika z własnościami modułu δ_X (patrz [28]).

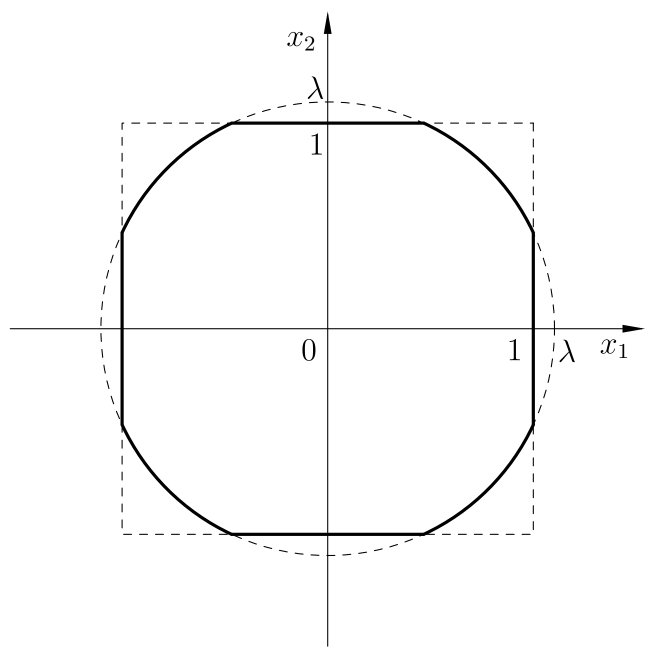
- Moduł wypukłości δ_X jest funkcją ściśle rosnącą na przedziale $[\varepsilon_0(X), 2]$.

- Mamy
$$\lim_{\varepsilon \to 2^-} \delta_X(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon_0(X)}{2}. \tag{1.2}$$
Przestrzeń X jest jednostajnie wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $\varepsilon_0(X) = 0$, co wobec wzoru (1.2) jest równoważne warunkowi $\lim_{\varepsilon \to 2^-} \delta_X(\varepsilon) = 1$. Jeśli X jest skończenie wymiarowa, to δ_X jest ciągła w 2 i równość ta redukuje się do warunku $\delta_X(2) = 1$.

- $\delta_X(2(1 - \delta_X(\varepsilon))) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ dla wszystkich $\varepsilon \in (\varepsilon_0(X), 2)$.

W dalszej części wykorzystamy następujący przykład analogiczny do przykładu 5.6 z [28].

Przykład 1.1.2. Niech $1 < \lambda < \sqrt{2}$ oraz niech Y_λ będzie przestrzenią $\mathbb{R}^2$ z normą zdefiniowaną w następujący sposób:
$$|||x||| = \max\left\{\frac{1}{\lambda}\|x\|_2, \|x\|_\infty\right\}, \tag{1.3}$$
gdzie $\|\cdot\|_2$ jest normą euklidesową, zaś $\|\cdot\|_\infty$ jest normą maksimum. Sfera jednostkowa przestrzeni $(Y_\lambda, |||x|||)$ przedstawiona jest na rys. 1.1.



Rys. 1.1: Sfera jednostkowa przestrzeni Y_λ z normą $|||\cdot|||$.

W [28] podano wzór $\varepsilon_0(Y_\lambda) = 2\sqrt{\lambda^2 - 1}$. My wykażemy, $\delta_{Y_\lambda}(\varepsilon) = \delta^{(\lambda)}(\varepsilon)$, gdzie

$$\delta^{(\lambda)}(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2\sqrt{\lambda^2 - 1}, \\ 1 - \sqrt{\lambda^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}}, & \text{jeśli } 2\sqrt{\lambda^2 - 1} < \varepsilon \leqslant 2. \end{cases} \tag{1.4}$$

Najpierw pokażemy, że $\delta_{Y_\lambda}(\varepsilon) \geqslant \delta^{(\lambda)}(\varepsilon)$. W tym celu rozważmy $x = (x_1, x_2)$ oraz $y = (y_1, y_2)$ takie, że $|||x||| = 1$, $|||y||| = 1$ oraz $|||x - y||| \geqslant \varepsilon > 2\sqrt{\lambda^2 - 1}$. Rozpatrujemy następujące przypadki:

Przypadek I. Załóżmy, że $|||x + y||| = \frac{1}{\lambda}\|x + y\|_2$. Z nierówności $\varepsilon \leqslant |||x - y||| \leqslant \|x - y\|_2$ dostajemy

$$\frac{1}{2}|||x + y||| = \frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\lambda}x + \frac{1}{\lambda}y\right\|_2 \leqslant 1 - \delta_H\left(\frac{1}{\lambda}\varepsilon\right) = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4\lambda^2}},$$

gdzie H jest przestrzenią Hilberta. Jednakże $\frac{1}{\lambda} < 1$ i w konsekwencji $\frac{\varepsilon^2}{4}(1 - \frac{1}{\lambda^2}) \leqslant \lambda^2 - 1$. Stąd

$$\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4\lambda^2}} \leqslant \sqrt{\lambda^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}},$$

więc

$$1 - \frac{1}{2}|||x + y||| \geqslant \delta^{(\lambda)}(\varepsilon).$$

Przypadek II. Załóżmy, że $|||x + y||| = \|x + y\|_\infty$.

Jeżeli $|||x - y||| = \frac{1}{\lambda}\|x - y\|_2$, to biorąc ponownie pod uwagę, że $\frac{1}{\lambda}\|x\|_2 \leqslant 1$ i $\frac{1}{\lambda}\|y\|_2 \leqslant 1$, otrzymujemy

$$\frac{1}{2}|||x + y||| \leqslant \frac{1}{2}\|x + y\|_2 \leqslant \lambda(1 - \delta_H(\varepsilon)) = \lambda\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \leqslant \sqrt{\lambda^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}}.$$

Stąd

$$1 - \frac{1}{2}|||x + y||| \geqslant \delta^{(\lambda)}(\varepsilon).$$

Załóżmy teraz, że $|||x + y||| = \|x + y\|_\infty$. W tej sytuacji możemy założyć, że x leży w pierwszej ćwiartce, zaś y w drugiej. Rozpatrujemy dwa przypadki:

A. Niech $|||x - y||| = |x_1 - y_1|$ oraz $|||x + y||| = |x_1 + y_1|$. Możemy założyć, że $x_1 + y_1 > 0$ i $x_1 > y_1$, a zatem $x_1 > 0$. Wtedy $|||x + y||| = 2x_1 - (x_1 - y_1) \leqslant 2 - \varepsilon$, więc

$$1 - \frac{1}{2}|||x + y||| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ponieważ $\delta^{(\lambda)}(0) = 0$, $\delta^{(\lambda)}(2) = 1$ i $\delta^{(\lambda)}$ jest funkcją wypukłą na przedziale $[0, 2]$, więc $\delta^{(\lambda)}(\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Stąd

$$1 - \frac{1}{2}|||x + y||| \geqslant \delta^{(\lambda)}(\varepsilon).$$

B. Niech $|||x - y||| = |x_1 - y_1|$ oraz $|||x + y||| = |x_2 + y_2|$. Załóżmy najpierw, że żaden z punktów x, y nie leży na odcinku na sferze jednostkowej. Wtedy $\frac{1}{\lambda}\|x\|_2 \leqslant 1$ i $\frac{1}{\lambda}\|y\|_2 \leqslant 1$. Ponieważ $\varepsilon \leqslant |x_1 - y_1| \leqslant \|x - y\|_2$, więc

$$\frac{1}{\lambda}|||x + y||| = \frac{1}{\lambda}|x_2 + y_2| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|x + y\|_2 \leqslant 2\left(1 - \delta_H\left(\frac{1}{\lambda}\varepsilon\right)\right) = 2\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4\lambda^2}}.$$

Stąd

$$1 - \frac{1}{2}|||x + y||| \geqslant 1 - \lambda\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4\lambda^2}} = \delta^{(\lambda)}(\varepsilon).$$

Załóżmy teraz, że jeden z punktów leży na odcinku na sferze jednostkowej. Możemy przyjąć, że jest to y i $y = (y_1, 1)$, gdzie $y_1 \in (-d, 0)$, $d = \sqrt{\lambda^2 - 1}$. Ponieważ $x_1 - y_1 = |x_1 - y_1| \geqslant \varepsilon$, więc $x_1 \geqslant \varepsilon - d$. Ponadto $x_1^2 + x_2^2 = \|x\|_2^2 \leqslant \lambda^2$, zatem

$$x_2 \leqslant \sqrt{\lambda^2 - x_1^2} \leqslant \sqrt{\lambda^2 - (\varepsilon - d)^2}.$$

Stąd

$$|||x + y||| = |x_2 + y_2| = x_2 + 1 \leqslant \sqrt{\lambda^2 - (\varepsilon - d)^2} + 1$$

i wystarczy wykazać, że

$$\sqrt{\lambda^2 - (\varepsilon - d)^2} + 1 \leqslant 2\sqrt{\lambda^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}}. \tag{1.5}$$

Przyjmijmy

$$f(\varepsilon) = 2\sqrt{\lambda^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} - \sqrt{\lambda^2 - (\varepsilon - d)^2}$$

dla $\varepsilon \in [2d, 2]$. Badając pochodną łatwo stwierdzamy, że f jest funkcją niemalejącą, a więc $f(\varepsilon) \geqslant f(2d) = 1$. Daje nam to nierówność (1.5), co kończy dowód oszacowania $\delta_{Y_\lambda}(\varepsilon) \geqslant \delta^{(\lambda)}(\varepsilon)$.

W celu udowodnienia nierówności przeciwnej rozważmy $x = (x_1, x_2)$ taki, że $x_1, x_2 > 0$, $\frac{1}{\lambda}\|x\|_2 = 1$ oraz $2x_1 = \varepsilon > 2\sqrt{\lambda^2 - 1}$. Przyjmując $y = (-x_1, x_2)$ otrzymujemy $|||x - y||| = 2x_1 = \varepsilon$ oraz

$$|||x + y||| = 2x_2 = 2\sqrt{\lambda^2 - x_1^2} = 2\sqrt{\lambda^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}}.$$

Stąd, $1 - \frac{1}{2}|||x + y||| = \delta^{(\lambda)}(\varepsilon)$.

Przypomnijmy teraz własności dualne do ścisłej i jednostajnej wypukłości.

Definicja 1.1.3. Mówimy, że przestrzeń Banacha X jest *gładka*, jeśli dla każdego $x \in S(X)$ istnieje dokładnie jeden funkcjonał $x^* \in X^*$ taki, że $\|x^*\| = x^*(x) = 1$.

Zależność między gładkością i ścisłą wypukłością jest następująca: jeśli X^* jest gładka (ściśle wypukła), to X jest ściśle wypukła (odpowiednio gładka). W przestrzeniach refleksywnych implikacje przeciwne są również prawdziwe (patrz [37]).

Jednostajną gładkość definiuje się przy pomocą funkcji zwanej modułem gładkości.

Definicja 1.1.4. *Modułem gładkości* przestrzeni Banacha X nazywamy funkcję $\rho_X : [0,\infty) \to [0,\infty)$ zdefiniowaną jako

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{\frac{1}{2}\left(\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\|\right) - 1 : x, y \in S(X)\right\}.$$

Przestrzeń X jest *jednostajnie gładka*, jeśli

$$\rho_0(X) = \lim_{\tau\to 0}\frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = 0.$$

Powyższą granicę $\rho_0(X)$ nazywamy *charakterystyką gładkości* przestrzeni Banacha X.

W definicji modułu $\rho_X(\tau)$, warunek $x, y \in S(X)$ można zastąpić przez $x, y \in B(X)$. Oczywiście $\rho_X(0) = 0$. Ponadto moduł ρ_X jest funkcją wypukłą, a więc iloraz różnicowy $\frac{\rho_X(\tau)}{\tau}$ jest niemalejącą funkcją zmiennej τ w przedziale $(0,\infty)$.

W tym miejscu przypominamy wzory na moduły gładkości dla wybranych przestrzeni Banacha.

Przykład 1.1.3.

1. Niech X będzie przestrzenią Banacha. Wówczas dla każdego $\tau \geqslant 0$ mamy

$$\rho_H(\tau) = \sqrt{1+\tau^2} - 1 \leqslant \rho_X(\tau),$$

gdzie H jest przestrzenią Hilberta.

2. Niech $X = L^p$ albo $X = l^p$ dla $p \in (1,\infty)$. Jeśli $1 < p \leqslant 2$, to

$$\rho_X(\tau) = (1+\tau^p)^{\frac{1}{p}} - 1,$$

zaś jeśli $p > 2$, to

$$\rho_X(\tau) = \left(\frac{(1+\tau)^p + |1-\tau|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} - 1$$

dla każdego $\tau \geqslant 0$.

W przestrzeniach skończenie wymiarowych gładkość jest równoważna jednostajnej gładkości, co wynika z faktu, że przestrzeń refleksywna, w szczególności przestrzeń skończenie wymiarowa, jest gładka wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń do niej sprzężona jest ściśle wypukła (patrz [44]).

Każda przestrzeń jednostajnie wypukła i każda przestrzeń jednostajnie gładka jest refleksywna, a nawet superrefleksywna. Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha X jest superrefleksywna, jeśli żadna przestrzeń nierefleksywna nie jest skończenie reprezentowalna w X (patrz [3]).

Kolejną istotną obserwacją jest fakt dualności jednostajnej gładkości i jednostajnej wypukłości. Wynika to z poniższego twierdzenia, zawierającego tzw. *wzory Lindenstraussa*.

Twierdzenie 1.1.1 ([42])**.** *Niech X będzie przestrzenią Banacha. Dla dowolnego $\tau \geqslant 0$ mamy*

$$\rho_{X^*}(\tau) = \sup\left\{\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_X(\varepsilon) : 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2\right\}$$

oraz

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_{X^*}(\varepsilon) : 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2\right\}.$$

Wniosek 1.1.1.

1) Przestrzeń X jest jednostajnie wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy X^* jest jednostajnie gładka.

2) Przestrzeń X jest jednostajnie gładka wtedy i tylko wtedy, gdy X^* jest jednostajnie wypukła.

Ze wzorów Lindenstraussa wynikają także równości $2\rho_0(X^*) = \varepsilon_0(X)$ oraz $2\rho_0(X) = \varepsilon_0(X^*)$ dla dowolnej przestrzeni Banacha X (patrz [37, str. 107]).

Pojęcia jednostajnej wypukłości i jednostajnej gładkości znalazły wiele zastosowań m. in. w metrycznej teorii punktów stałych.

Niech C będzie niepustym podzbiorem przestrzeni Banacha X. Mówimy, że przekształcenie $T : C \to C$ jest *nieoddalające*, jeśli T spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1, czyli $\|Tx - Ty\| \leqslant \|x - y\|$ dla wszystkich $x, y \in C$.

Przestrzeń Banacha X ma *własność punktu stałego* (dla przekształceń nieoddalających), jeśli każde przekształcenie nieoddalające $T : C \to C$ niepustego, domkniętego, ograniczonego i wypukłego zbioru C w przestrzeni X ma punkt stały, czyli istnieje $x \in C$, dla którego $x = Tx$. Nakładając w tej definicji na zbiór C warunek słabej zwartości otrzymujemy definicję słabej własności punktu stałego.

Ważną rolę w metrycznej teorii punktów stałych odgrywa własność zwana strukturą normalną. Przestrzeń Banacha X ma *strukturę normalną*, jeśli dla każdego niepustego, ograniczonego, domkniętego i wypukłego podzbioru $K \subset X$, który nie jest jednopunktowy istnieje $x \in K$ taki, że

$$\sup\{\|x - y\| : y \in K\} < \operatorname{diam} K,$$

gdzie $\operatorname{diam} K$ jest średnicą zbioru K.

Twierdzenie 1.1.2 ([28, str. 40])**.** *Jeśli przestrzeń Banacha X ma słabą strukturę normalną, to X ma słabą własność punktu stałego.*

W szczególności, refleksywne przestrzenie ze strukturą normalną mają własność punktu stałego. Przestrzenie jednostajnie wypukłe i przestrzenie jednostajnie gładkie są refleksywne i mają strukturę normalną (patrz [28]), więc mają własność punktu stałego.

1.2 Jednostajna niekwadratowość

Jednostajna niekwadratowość jest kolejną geometryczną własnością przestrzeni Banacha, która znalazła zastosowanie w metrycznej teorii punktów stałych. Klasa przestrzeni jednostajnie niekwadratowych została zdefiniowana przez R. C. Jamesa w [35]. J. Gao i K. S. Lau w [24] wprowadzili współczynnik $J(X)$ związany z tą własnością, zwany stałą Jamesa przestrzeni Banacha X.

Definicja 1.2.1. Mówimy, ze przestrzeń Banacha X jest *niekwadratowa*, jeśli

$$\min\{\|x + y\|, \|x - y\|\} < 2$$

dla wszystkich $x, y \in S(X)$.

Definicja 1.2.2. *Stałą Jamesa* $J(X)$ przestrzeni Banacha X definiujemy wzorem

$$J(X) = \sup\{\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} : x, y \in S(X)\}.$$

Przestrzeń X jest *jednostajnie niekwadratowa*, jeśli $J(X) < 2$.

W powyższej definicji sferę $S(X)$ możemy zastąpić przez kulę $B(X)$. Dla przestrzeni skończenie wymiarowych jednostajna niekwadratowość jest równoważna niekwadratowości.

Stała Jamesa $J(X)$ jest ściśle związana z modułem wypukłości δ_X przestrzeni X.

Twierdzenie 1.2.1 ([24])**.** *Niech X będzie przestrzenią Banacha. Wtedy*

$$J(X) = \sup\left\{\varepsilon \in [0,2] : \delta_X(\varepsilon) \leqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Wniosek 1.2.1. *Dla dowolnej przestrzeni Banacha X oraz dla dowolnego $\varepsilon \in (0,2]$, warunek $\delta_X(\varepsilon) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $J(X) < \varepsilon$. W konsekwencji X jest jednostajnie niekwadratowa wtedy i tylko wtedy, gdy $\varepsilon_0(X) < 2$. W szczególności przestrzenie jednostajnie wypukłe są jednostajnie niekwadratowe.*

Zauważmy, że z twierdzenia 1.2.1 wynika, że jeśli przestrzeń X jest jednostajnie niekwadratowa, to

$$\delta_X(J(X)) = 1 - \frac{J(X)}{2}.$$

Przypomnijmy kilka podstawowych wzorów dla stałej Jamesa.

1. Dla dowolnej przestrzeni Banacha X mamy $J(H) = \sqrt{2} \leqslant J(X) \leqslant 2$, gdzie H jest przestrzenią Hilberta (patrz [24]).

1. $J(l^1) = J(l^\infty) = 2$,

2. $J(l^p) = J(L^p) = \max\left\{2^{\frac{1}{p}}, 2^{1-\frac{1}{p}}\right\}$ dla $p \in (1, \infty)$.

Następne twierdzenie podaje związek między stałymi Jamesa przestrzeni X oraz przestrzeni sprzężonej X^*.

Twierdzenie 1.2.2 ([36]). *Dla dowolnej przestrzeni Banacha X mamy*

$$2J(X) - 2 \leqslant J(X^*) \leqslant \frac{J(X)}{2} + 1. \tag{1.6}$$

Z twierdzenia tego wynika, że przestrzeń X jest jednostajnie niekwadratowa wtedy i tylko wtedy, gdy X^* jest jednostajnie niekwadratowa.

Uwaga 1.2.1. Jeśli X nie jest jednostajnie niekwadratowa, np. $X = l^1$, $X = l^\infty$ lub $X = c_0$, to $J(X) = 2 = J(X^*)$ i w miejscu nierówności we wzorze (1.6) zachodzą równości.

Przypomnijmy jeszcze, że każda przestrzeń jednostajnie niekwadratowa X jest superrefleksywna (patrz [35]) i w konsekwencji w X istnieje norma równoważna, która jest jednostajnie wypukła (patrz [22]). Przestrzenie jednostajnie niekwadratowe nie muszą mieć struktury normalnej, ale mają własność punktu stałego (patrz [27]).

1.3 Własności Opiala

Własność Opiala została wprowadzona w [55], a jej jednostajna wersja w [56]. Obie te własności znalazły zastosowanie w wielu zagadnieniach metrycznej teorii punktów stałych (patrz [37]). Inne zastosowanie tych własności zostało podane w [16]. Pierwotnie własności Opiala rozpatrywano względem słabej topologii. Stąd, jeśli topologia nie jest wcześniej określona, własności Opiala będziemy rozpatrywać w odniesieniu do słabej topologii.

Definicje i charakteryzację własności Opiala poprzedzamy krótkim przypomnieniem dotyczących topologii w przestrzeniach Banacha.

Niech τ będzie topologią w przestrzeni Banacha X. Mówimy, że topologia τ jest *dopuszczalna*, jeśli spełnione są następujące warunki: τ jest liniową topologią Hausdorffa, τ jest słabsza niż topologia wyznaczona przez normę oraz norma w przestrzeni X jest *ciągowo dolnie półciągła względem topologii* τ, tj.

$$\|x\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|,$$

jeśli ciąg (x_n) jest zbieżny do x w X względem topologii τ.

Standardowymi przykładami topologii dopuszczalnych są: słaba topologia przestrzeni X ($\tau = w$) oraz słaba* topologia przestrzeni X ($\tau = w^*$), jeśli $X = Y^*$ jest przestrzenią sprzężoną do pewnej przestrzeni Y.

Kolejnym przykładem topologii dopuszczalnej jest topologia τ zbieżności lokalnej według miary w przestrzeniach $L^p(\Omega)$, gdzie Ω jest przestrzenią z σ-skończoną miarą μ oraz $p \in [1, \infty)$. Ustalmy przeliczalne rozbicie $\{\Omega_n\}$ zbioru Ω na podzbiory o dodatnich, skończonych miarach. Mówimy, że ciąg funkcji $f_n \in L^p(\Omega)$ jest *zbieżny lokalnie według miary*, jeśli jest on zbieżny według miary na każdym podzbiorze $\{\Omega_n\}$. Każdy ciąg lokalnie zbieżny według miary zawiera podciąg punktowo zbieżny (do tej samej granicy). Ten fakt wraz z lematem Fatou pokazują, że norma przestrzeni $L^p(\Omega)$ jest ciągowo dolnie półciągła względem topologii lokalnej zbieżności według miary. Ponadto topologia ta jest słabsza niż topologia wyznaczona przez normę w $L^p(\Omega)$.

Topologia zbieżności lokalnej według miary może być też zdefiniowana przy użyciu metryki

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu(\Omega_n)} \int_{\Omega_n} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu,$$

gdzie $f, g \in L^p(\Omega)$.

Jeśli $\mu(\Omega) < \infty$, to zamiast metryki d możemy rozpatrywać metrykę

$$d_0(f, g) = \int_{\Omega} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu.$$

W tym przypadku topologia zbieżności lokalnej według miary redukuje się do topologii zbieżności według miary.

Kolejnym, szczególnym przypadkiem jest sytuacja, w której $\Omega = \mathbb{N}$ z miarą liczącą. W tym przypadku $L^p(\Omega) = l^p$ i zbieżność lokalna według miary dla ciągów sprowadza się do zbieżności po współrzędnych. Dla ciągów ograniczonych jest to równoważne słabej zbieżności, jeśli $p > 1$ oraz słabej* zbieżności, jeśli $p = 1$ i l^1 rozważamy jako przestrzeń sprzężoną do przestrzeni c_0.

Dla danej topologii τ w przestrzeni Banacha X, przez $\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$ oznaczamy granicę ciągu (x_n) względem topologii τ. Symbolem $\mathcal{N}_1(\tau)$ oznaczamy zbiór wszystkich ciągów (x_n), zbieżnych do 0 względem topologii τ, dla których $\|x_n\| \geqslant 1$ dla wszystkich n. Warunek $\mathcal{N}_1(\tau) = \emptyset$ definiuje przestrzenie, dla których zbieżność ciągów względem topologii τ jest równoważna zbieżności względem normy. W przypadku, gdy $\tau = w$ własność taką nazywamy *własnością Schura*. Wszystkie skończenie wymiarowe przestrzenie mają własność Schura. Ponadto przestrzeń l^1 ma tę własność (patrz [37]).

Przejdziemy teraz do zdefiniowania własności Opiala.

Definicja 1.3.1. Mówimy, że przestrzeń Banacha X ma *słabą własność Opiala względem topologii* τ w przestrzeni X, jeśli

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

dla każdego ograniczonego ciągu (x_n), takiego, że $x = \tau\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$ w X.

Słabą własność Opiala względem topologii τ możemy opisać za pomocą *funkcji słabego zerowego typu*, tj. funkcji postaci

$$\psi_{(x_n)}(x) = \limsup_{k\to\infty} \|x - x_k\|,$$

gdzie $\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ w przestrzeni X oraz $x \in X$.

Uwaga 1.3.1 ([49])**.** Dla ustalonego $x \in X$, $\psi_{(x_n)}(tx)$ traktowana jako funkcja zmiennej $t \in [0,\infty)$ jest wypukła i przestrzeń X ma słabą własność Opiala względem topologii τ wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi_{(x_n)}(tx)$ osiąga swoje minimum w punkcie $t = 0$, dla każdego ciągu (x_n), takiego, że $\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ oraz dla każdego $x \in X$.

Rzeczywiście, jeśli przestrzeń X ma słabą własność Opiala, to funkcja $\psi_{(x_n)}(tx)$ jest niemalejąca w przedziale $[0,\infty)$. Na odwrót, jeśli założymy, że dla każdego $x \in X$ funkcja $\psi_{(x_n)}(tx)$ jest niemalejąca w przedziale $[0,\infty)$, to również $\psi_{(x_n)}(-tx) = \psi_{(x_n)}(t(-x))$ jest funkcją niemalejącą. Zatem $\psi_{(x_n)}(tx)$ osiągnie swoje minimum w punkcie $t = 0$. Stąd X ma słabą własność Opiala względem topologii τ.

Definicja 1.3.2. Mówimy, że przestrzeń Banacha X ma *własność Opiala względem topologii* τ w przestrzeni X, jeśli

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

dla każdego ograniczonego ciągu (x_n) w X takiego, że $x = \tau\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$ w X, gdzie $x \neq 0$.

W powyższych definicjach *liminf* możemy zastąpić przez *limsup*.

Jeśli $\tau = w$ lub $\tau = w^*$, to ciągi zbieżne względem topologii τ są ograniczone, więc w powyższych definicjach warunek na ograniczoność ciągu może zostać pominięty.

Definicja 1.3.3. Mówimy, że przestrzeń Banacha X ma *jednostajną własność Opiala względem topologii* τ w przestrzeni X, jeśli dla każdego $c > 0$ istnieje $r > 0$ takie, że nierówność

$$1 + r \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n + x\|$$

jest spełniona dla każdego ograniczonego ciągu $(x_n) \in \mathcal{N}_1(\tau)$ w X i dla każdego $x \in X$, dla którego $\|x\| \geqslant c$.

Dodatkowo przyjmujemy, że przestrzenie, dla których $\mathcal{N}_1(\tau) = \emptyset$ mają jednostajną własność Opiala względem topologii τ. Jednostajna własność Opiala względem topologii τ implikuje własność Opiala względem topologii τ.

Przykład 1.3.1.

1. Przestrzenie l^p mają jednostajną własność Opiala dla każdego $p \in (1, \infty)$.
2. Przestrzenie $L^p([0, 1])$ dla $p \in (1, \infty)$, $p \neq 2$, nie mają słabej własności Opiala względem topologii $\tau = w$.
3. Niech Ω będzie przestrzenią z σ skończoną miarą μ. Wówczas przestrzenie $L^p(\Omega)$ dla $p \in [1, \infty)$, mają jednostajną własność Opiala względem topologii zbieżności lokalnej według miary (patrz [18]).

Jednostajną własność Opiala względem topologii τ można opisać przy użyciu następującego modułu $r_{X,\tau}$ zdefiniowanego w [41].

Definicja 1.3.4. Niech X będzie przestrzenią Banacha, dla której $\mathcal{N}_1(\tau) \neq \emptyset$. Funkcję $r_{X,\tau} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiujemy wzorem

$$r_{X,\tau}(c) = \inf\{\liminf_{n\to\infty} \|x + x_n\| - 1\},$$

gdzie $c \geqslant 0$, a infimum jest brane po wszystkich ciągach $(x_n) \in \mathcal{N}_1(\tau)$ i po wszystkich elementach $x \in X$, dla których $\|x\| \geqslant c$.

Dodatkowo przyjmujemy $r_{X,\tau}(c) = c$ w przypadku, gdy $\mathcal{N}_1(\tau) = \emptyset$. Przestrzeń X ma jednostajną własność Opiala względem topologii τ wtedy i tylko wtedy, gdy $r_{X,\tau}(c) > 0$ dla każdego $c > 0$. W [41] pokazano, że moduł $r_{X,\tau}$ jest funkcją ciągłą w przedziale $(0, \infty)$.

Innym modułem związanym z jednostajną własnością Opiala jest funkcja $s_{X,\tau}$, którą definiujemy poniżej.

Definicja 1.3.5. Niech X będzie przestrzenią Banacha. Moduł $s_{X,\tau}$ definiujemy jako

$$s_{X,\tau}(c) = \inf \left\{ 1 - \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| \right\},$$

gdzie $c \in [0,1]$, a infimum jest brane po wszystkich ograniczonych ciągach (x_n) w X takich, że $\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \leqslant 1$ i $\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$, gdzie $\|x\| \geqslant c$.

Przestrzeń X ma jednostajną własność Opiala względem topologii τ wtedy i tylko wtedy, gdy $s_{X,\tau}(c) > 0$ dla każdego $c \in (0,1]$. Ponadto przestrzeń X ma słabą własność Opiala względem topologii τ wtedy i tylko wtedy, gdy $s_{X,\tau}(c) \geqslant 0$ dla każdego $c \in [0,1]$.

Twierdzenie 1.3.1 ([49])**.** *Niech X będzie przestrzenią Banacha z topologią dopuszczalną τ, dla której $\mathcal{N}_1(\tau) \neq \emptyset$. Wówczas $s_{X,\tau}(c) \leqslant c$ dla każdego $c \in [0,1]$.*

Dowód. Niech $(x_n) \subset S(X)$ będzie ciągiem, dla którego $\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Dla ustalonych $c \in [0,1]$ i $x \in S(X)$ połóżmy $y_n = cx + (1-c)x_n$. Wtedy $(y_n) \subset B(X)$ oraz $y = \tau\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n$, gdzie $y = cx$, przy czym $\|y\| = c$ oraz $\|y_n - y\| = 1 - c$ dla wszystkich n. □

Twierdzenie 1.3.2 ([49])**.** *Jeśli X ma słabą własność Opiala względem topologii τ oraz $c > 0$, to w definicji modułu $s_{X,\tau}(c)$ warunek $\|y\| \geqslant c$ może być zastąpiony przez $\|y\| = c$.*

Dowód. Niech (y_n) będzie ciągiem w przestrzeni X, dla którego $y = \tau\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n$, przy czym $\|y\| \geqslant c > 0$ oraz $\liminf_{n\to\infty} \|y_n\| \leqslant 1$. Wybierzmy podciąg (y_{n_k}) w taki sposób, aby

$$\lim_{k\to\infty} \|y_{n_k}\| = \liminf_{n\to\infty} \|y_n\| \leqslant 1$$

i przyjmijmy $x = y$ oraz $x_k = y - y_{n_k}$. Z założenia słabej własności Opiala wynika, że funkcja słabego zerowego typu $\psi_{(x_k)}(ty)$ jest niemalejąca jako funkcja zmiennej $t \in [0,\infty)$. Stąd

$$\lim_{k\to\infty} \|y_{n_k}\| = \psi_{(x_k)}(y) \geqslant \psi_{(x_k)}\left(\frac{c}{\|y\|} y\right) \geqslant \liminf_{n\to\infty} \|z_n\|,$$

gdzie $z_n = \frac{c}{\|y\|} y - (y - y_n)$. Wobec tego $\liminf_{n\to\infty} \|z_n\| \leqslant 1$ oraz $z = \tau\text{-}\lim_{n\to\infty} z_n$, gdzie $z = \frac{c}{\|y\|} y$, przy czym $\|z\| = c$ i $\|z_n - z\| = \|y_n - y\|$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. □

Twierdzenie 1.3.3 ([49])**.** *Niech X będzie przestrzenią Banacha z topologią dopuszczalną τ, dla której $\mathcal{N}_1(\tau) \neq \emptyset$. Jeśli X ma słabą własność Opiala względem topologii τ, to $\frac{s_{X,\tau}(c)}{c}$ jest niemalejącą funkcją zmiennej c w przedziale $(0,1)$ i nierówności*

$$0 \leqslant s_{X,\tau}(c_2) - s_{X,\tau}(c_1) \leqslant \frac{c_2 - c_1}{1 - c_1}$$

zachodzą dla wszystkich $0 < c_1 < c_2 \leqslant 1$*. W konsekwencji funkcja* $s_{X,\tau}$ *jest ciągła w przedziale* $[0,1)$.

Dowód. Niech $c \in [0,1]$, $x \in S(X)$ i (x_n) będzie ciągiem w $S(X)$, dla którego $\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Rozważmy zbiór $A(x,(x_n),c)$ wszystkich ciągów (s_n) w $[0,1]$ takich, że

$$\limsup_{n\to\infty} \|cx + (1-s_n)x_n\| \leqslant 1.$$

Oznaczamy

$$s(x,(x_n),c) = \inf\left\{\limsup_{n\to\infty} s_n : (s_n) \in A(x,(x_n),c)\right\}.$$

Zdefiniowana w ten sposób funkcja $s(x,(x_n),c)$ zmiennej c jest funkcją wypukłą, przy czym $s(x,(x_n),0) = 0$. Stąd, jeśli $0 < c_1 < c_2 \leqslant 1$, to

$$\frac{s(x,(x_n),c_1)}{c_1} \leqslant \frac{s(x,(x_n),c_2)}{c_2} \tag{1.7}$$

i

$$\frac{s(x,(x_n),c_2) - s(x,(x_n),c_1)}{c_2 - c_1} \leqslant \frac{s(x,(x_n),1) - s(x,(x_n),c_1)}{1-c_1},$$

co implikuje

$$s(x,(x_n),c_2) - s(x,(x_n),c_1) \leqslant \frac{1}{1-c_1}(c_2 - c_1). \tag{1.8}$$

Niech teraz $f(c) = \inf\{s(x,(x_n),c)\}$, gdzie infimum jest brane po wszystkich $x \in S(X)$ i po wszystkich ciągach (x_n) w $S(X)$, dla których $\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Pokażemy, że równość

$$s_{X,\tau}(c) = f(c) \tag{1.9}$$

zachodzi dla każdego $c \in [0,1]$. W tym celu rozważmy dowolne $x \in S(X)$, ciąg (x_n) w $S(X)$, dla którego $\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ oraz $(s_n) \in A(x,(x_n),c)$. Połóżmy $y_n = cx + (1-s_n)x_n$. Wtedy $\limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \leqslant 1$ i $y = \tau\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n$, gdzie $y = cx$ oraz $\|y\| = c$. Mamy

$$s_{X,\tau}(c) \leqslant 1 - \liminf_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 1 - \liminf_{n\to\infty}(1-s_n) = \limsup_{n\to\infty} s_n,$$

co prowadzi do nierówności $s_{X,\tau}(c) \leqslant s(x,(x_n),c)$, która pokazuje, że $s_{X,\tau}(c) \leqslant f(c)$.

Nierówność przeciwna zachodzi, jeśli $s_{X,\tau}(c) = 1$. Ponadto, jeśli $c = 0$, to obie strony są równe 0. Możemy więc założyć, że $c > 0$ oraz $s_{X,\tau}(c) < 1$. Niech (y_n) będzie ciągiem w X spełniającym następujące warunki: $\liminf_{n\to\infty} \|y_n\| \leqslant 1$, $y = \tau\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n$, gdzie $\|y\| = c$

oraz $\liminf_{n\to\infty} \|y_n - y\| > 0$. Wybierzmy podciąg (y_{n_k}) w taki sposób, aby $\lim_{k\to\infty} \|y_{n_k}\| = \liminf_{n\to\infty} \|y_n\|$ oraz $\inf\{\|y_{n_k} - y\| : k \in \mathbb{N}\} > 0$ i połóżmy $x_k = \|y_{n_k} - y\|^{-1}(y_{n_k} - y)$, $x = \frac{1}{c}y$ oraz $s_k = 1 - \|y_{n_k} - y\|$. Wtedy (x_k) jest ciągiem w $S(X)$ zbieżnym do 0 względem topologii τ, $x \in S(X)$ oraz

$$\lim_{k\to\infty} \|cx + (1 - s_k)x_k\| = \lim_{k\to\infty} \|y_{n_k}\| \leqslant 1.$$

Stąd

$$s(x, (x_k), c) \leqslant \limsup_{k\to\infty} s_k = 1 - \lim_{k\to\infty} \|y_{n_k} - y\| \leqslant 1 - \liminf_{n\to\infty} \|y_n - y\|.$$

Korzystając z faktu, że X ma słabą własność Opiala i stosując twierdzenie 1.3.2 wnioskujemy, że

$$s(x, (x_k), c) \leqslant s_{X,\tau}(c)$$

co kończy dowód wzoru (1.9). Tezę naszego twierdzenia otrzymujemy z (1.7) i (1.8). □

Kolejne twierdzenie podaje związek między modułami $r_{X,\tau}$ i $s_{X,\tau}$. W dowodzie tego twierdzenia korzystamy z idei dowodu twierdzenia 6 [48].

Twierdzenie 1.3.4 ([49])**.** *Niech X będzie przestrzenią Banacha z topologią dopuszczalną τ, dla której $\mathcal{N}_1(\tau) \neq \emptyset$. Jeśli X ma słabą własność Opiala względem topologii τ, to równości*

$$s_{X,\tau}\left(\frac{c}{1 + r_{X,\tau}(c)}\right) = \frac{r_{X,\tau}(c)}{1 + r_{X,\tau}(c)} \tag{1.10}$$

oraz

$$r_{X,\tau}\left(\frac{c}{1 - s_{X,\tau}(c)}\right) = \frac{s_{X,\tau}(c)}{1 - s_{X,\tau}(c)} \tag{1.11}$$

zachodzą dla każdego $c \in [0, 1)$.

Dowód. Oznaczmy $\tilde{s}_{X,\tau}(c) = s_{X,\tau}(c)$ dla $c \in [0, 1)$ i $\tilde{s}_{X,\tau}(1) = \lim_{c\to 1^-} s_{X,\tau}(c)$. Dla dowolnych $c \geqslant 0$ i $\gamma \in (0, 1)$ znajdujemy taki $x \in X$, dla którego $\|x\| \geqslant c$ oraz ciąg (x_n) w X taki, że $(x_n) \in \mathcal{N}_1(\tau)$ oraz

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| \leqslant 1 + r_{X,\tau}(c) + \gamma.$$

Połóżmy $y_n = (1 + r_X(c) + \gamma)^{-1}(x_n - x)$. Wtedy $\liminf_{n\to\infty} \|y_n\| \leqslant 1$ i $y = \tau\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n$, gdzie $y = -(1 + r_{X,\tau}(c) + \gamma)^{-1}x$, przy czym $\|y\| \geqslant (1 + r_{X,\tau}(c) + \gamma)^{-1}c$. To nam daje oszacowanie

$$s_{X,\tau}\left(\frac{c}{1 + r_{X,\tau}(c) + \gamma}\right) \leqslant 1 - \frac{1}{1 + r_{X,\tau}(c) + \gamma} \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \leqslant 1 - \frac{1}{1 + r_{X,\tau}(c) + \gamma}.$$

Przechodząc do granicy przy $\gamma \to 0$, otrzymujemy nierówność

$$\tilde{s}_{X,\tau}\left(\frac{c}{1+r_{X,\tau}(c)}\right) \leqslant \frac{r_{X,\tau}(c)}{1+r_{X,\tau}(c)} \tag{1.12}$$

dla każdego $c \geqslant 0$.

Jeśli $c \in [0,1)$, to $s_{X,\tau}(c) \leqslant c < 1$, więc dla dowolnego $\gamma \in (0, 1-s_{X,\tau}(c))$ możemy znaleźć ciąg (y_n) w X, dla którego $y = \tau\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n$, gdzie $\|y\| \geqslant c$, $\liminf_{n\to\infty} \|y_n\| \leqslant 1$ oraz

$$\liminf_{n\to\infty} \|y_n - y\| \geqslant 1 - s_{X,\tau}(c) - \gamma.$$

Połóżmy teraz $x_n = (1 - s_{X,\tau}(c) - \gamma)^{-1}(y_n - y)$ oraz $x = -(1 - s_{X,\tau}(c) - \gamma)^{-1} y$. Wtedy $(x_n) \in \mathcal{N}_1(\tau)$ oraz $\|x\| \geqslant (1 - s_{X,\tau}(c) - \gamma)^{-1} c$. Stąd

$$r_{X,\tau}\left(\frac{c}{1-s_{X,\tau}(c)-\gamma}\right) \leqslant \frac{1}{1-s_{X,\tau}(c)-\gamma}\liminf_{n\to\infty}\|y_n\| - 1 \leqslant \frac{1}{1-s_{X,\tau}(c)-\gamma} - 1$$

i przechodząc do granicy przy $\gamma \to 0$ dostajemy

$$r_{X,\tau}\left(\frac{c}{1-s_{X,\tau}(c)}\right) \leqslant \frac{s_{X,\tau}(c)}{1-s_{X,\tau}(c)}. \tag{1.13}$$

W celu wykazania nierówności przeciwnej do (1.13) zdefiniujmy funkcję $\phi(c) = \frac{c}{1-s_{X,\tau}(c)}$ dla $c \in [0,1)$. Z (1.12) otrzymujemy

$$r_{X,\tau}(\phi(c)) \geqslant (1 + r_{X,\tau}(\phi(c)))\tilde{s}_{X,\tau}\left(\frac{\phi(c)}{1+r_{X,\tau}(\phi(c))}\right). \tag{1.14}$$

Ponadto, z (1.13) mamy

$$(1 + r_{X,\tau}(\phi(c)))(1 - s_{X,\tau}(c)) \leqslant 1$$

i w konsekwencji

$$\frac{\phi(c)}{1+r_{X,\tau}(\phi(c))} \geqslant \phi(c)(1 - s_{X,\tau}(c)) = c. \tag{1.15}$$

Ponieważ funkcja $\tilde{s}_{X,\tau}$ jest wypukła oraz $\tilde{s}_{X,\tau}(0) = 0$, z nierówności (1.15) dostajemy

$$\frac{1+r_{X,\tau}(\phi(c))}{\phi(c)}\tilde{s}_{X,\tau}\left(\frac{\phi(c)}{1+r_{X,\tau}(\phi(c))}\right) \geqslant \frac{s_{X,\tau}(c)}{c}. \tag{1.16}$$

Wobec (1.14) i (1.16) mamy

$$r_{X,\tau}(\phi(c)) \geqslant \frac{s_{X,\tau}(c)}{c}\phi(c) = \frac{s_{X,\tau}(c)}{1-s_{X,\tau}(c)}.$$

Powyższa nierówność jest przeciwna do (1.13), co kończy dowód wzoru (1.11).

Zauważmy, że funkcja ϕ jest ciągła na przedziale $[0,1)$. Ponadto $\phi(0)=0$ oraz $\lim_{t\to 1}\phi(t)\geqslant 1$. Dla danego $\varepsilon\in[0,1)$ możemy więc znaleźć $t\in[0,1)$ takie, że $c=\phi(t)$. Wobec (1.11) mamy

$$\frac{r_{X,\tau}(c)}{1+r_{X,\tau}(c)}=\frac{r_{X,\tau}(\phi(t))}{1+r_{X,\tau}(\phi(t))}=s_{X,\tau}(t).$$

Ale $c(1-s_{X,\tau}(t))=t$, więc

$$\frac{r_{X,\tau}(c)}{1+r_{X,\tau}(c)}=s_{X,\tau}(c(1-s_{X,\tau}(t)))=s_{X,\tau}\left(c\left(1-\frac{r_{X,\tau}(c)}{1+r_{X,\tau}(c)}\right)\right)=s_{X,\tau}\left(\frac{c}{1+r_{X,\tau}(c)}\right),$$

co kończy dowód wzoru (1.10). □

Wniosek 1.3.1. *Przestrzeń Banacha X ma jednostajną własność Opiala względem topologii τ wtedy i tylko wtedy, gdy $s_{X,\tau}(c)>0$ dla każdego $c\in(0,1]$.*

1.4 Współczynnik Garcíi-Falseta

Współczynnik Garcíi-Falseta został zdefiniowany w [25] i znalazł zastosowanie w teorii punktów stałych.

Definicja 1.4.1. *Współczynnikiem Garcíi-Falseta* przestrzeni Banacha X nazywamy stałą $R(X)$ zdefiniowaną jako

$$R(X)=\sup\{\liminf_{n\to\infty}\|x+x_n\|\},$$

gdzie supremum jest brane po wszystkich $x\in B(X)$ i po wszystkich ciągach (x_n) słabo zbieżnych do 0 w $B(X)$.

Mamy $1\leqslant R(X)\leqslant 2$.

Przykład 1.4.1.

1. Jeśli X jest przestrzenią skończenie wymiarową, lub ogólnie przestrzenią z własnością Schura, to $R(X)=1$.

2. Mamy $R(c_0)=1$, $R(c)=1$ oraz $R(l^p)=2^{\frac{1}{p}}$ dla $1\leqslant p<\infty$.

Twierdzenie 1.4.1 ([26]). *Jeżeli $R(X)<2$, to przestrzeń X ma słabą własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających.*

Rozdział 2

Kraty Banacha

Kraty Banacha stanowią szczególny rodzaj przestrzeni Banacha, w których na normę nałożone są założenia związane z porządkiem. Niniejszy rozdział poświęcony jest teorii krat Banacha oraz charakteryzacji wybranych, geometrycznych własności tych krat.

2.1 Wiadomości wstępne

Definicja 2.1.1. *Kratą Banacha* X nazywamy częściowo uporządkowaną przestrzeń Banacha X nad ciałem liczb rzeczywistych, spełniającą następujące warunki:

(i) $x \leqslant y$ implikuje $x + z \leqslant y + z$ dla dowolnych $x, y, z \in X$,

(ii) $ax \geqslant 0$ dla każdego $x \geqslant 0$ w X oraz dla każdej rzeczywistej, nieujemnej liczby a,

(iii) dla dowolnych $x, y \in X$ istnieje kres górny (najmniejsze górne ograniczenie) $x \vee y$ i kres dolny (największe dolne ograniczenie) $x \wedge y$ zbioru $\{x, y\}$,

(iv) dla dowolnych $x, y \in X$ jeśli $|x| \leqslant |y|$, to $\|x\| \leqslant \|y\|$, gdzie wartość bezwzględną $|x|$ elementu $x \in X$ definiujemy jako $|x| = x \vee (-x)$.

Przestrzeń liniową spełniającą tylko warunki (i), (ii) oraz (iii) nazywamy *kratą wektorową*. Zauważmy, że w warunku (iii) wystarczy założyć istnienie kresu górnego $x \vee y$, ponieważ kres dolny możemy zdefiniować jako $x \wedge y = -((-x) \vee (-y))$ lub jako $x \wedge y = x + y - x \vee y$.

Z warunku monotoniczności (iv) wynika, że norma $\|\cdot\|$ jest normą absolutną, czyli $\|x\| = \||x|\|$ dla każdego $x \in X$. W najprostszym przypadku kraty $\mathbb{R}^n$ ze standardowym porządkiem nierówności „po współrzędnych" norma $\|\cdot\|$ jest normą absolutną wtedy i tylko wtedy, gdy $\|\cdot\|$ spełnia warunek (iv), ale ogólnie te dwa warunki nie są równoważne (patrz [1] i [10]).

Z (i), (ii) i (iii) wynika ponadto, że dla dowolnych $x, y, z \in X$ zachodzi równość

$$|x - y| = |x \vee z - y \vee z| + |x \wedge z - y \wedge z|$$

i wobec (iv) widzimy, że operacje $\vee$, $\wedge$ w kracie są ciągłe względem normy. W równości tej występuje jedynie skończenie wiele wektorów i działania algebraiczne oraz działania kratowe. Warto tutaj zwrócić uwagę, że dla wykazania tego typu równości (lub nierówności) w dowolnej kracie Banacha wystarczy sprawdzić, że analogiczna równość (lub nierówność) zachodzi dla liczb rzeczywistych (patrz [44, str. 1]).

Zbiór $X_+ = \{x : x \in X, x \geqslant 0\}$ nazywamy *dodatnim stożkiem kraty* X. Ciągłość operacji w kracie implikuje w szczególności, że zbiór X_+ jest domknięty względem normy. Dla każdego elementu $x \in X$ kraty Banacha możemy zdefiniować jego część dodatnią $x_+ = x \vee 0$ i część ujemną $x_- = (-x) \vee 0 = -(x \wedge 0)$. Mamy $x = x_+ - x_-$ oraz $|x| = x_+ + x_-$. Mówimy, że dwa elementy $x, y \in X$ są *rozłączne*, jeśli $|x| \wedge |y| = 0$.

Każda krata Banacha X ma *własność dekompozycji* polegającą na tym, że dla dowolnych elementów $x_1, x_2, y \in X_+$, dla których $y \leqslant x_1 + x_2$ istnieją elementy y_1 i y_2 takie, że $0 \leqslant y_1 \leqslant x_1$, $0 \leqslant y_2 \leqslant x_2$ oraz $y = y_1 + y_2$ (patrz [44, str. 2]).

Definicja 2.1.2. Niech $(X, \leqslant)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Niech $x, y \in X$ będą takie, że $x \leqslant y$. *Porządkowym przedziałem obustronnie domkniętym* nazywamy zbiór $[x, y] = \{z \in X : x \leqslant z \leqslant y\}$.

Standardowymi przykładami krat Banacha są przestrzenie funkcyjne: przestrzeń funkcji ciągłych $C(K)$, gdzie K jest zwartą przestrzenią topologiczną oraz przestrzenie $L^p(\Omega)$ dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$ rozważane z naturalnym porządkiem nierówności funkcyjnych. Dla nas najważniejsze będą jednak kraty ciągowe. Klasycznymi przykładami takich krat są przestrzenie l^p dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ze standardowym porządkiem nierówności „po współrzędnych".

Bardziej ogólnymi przykładami ciągowych krat Banacha są przestrzenie z bazami bezwarunkowymi. Przypomnijmy, że ciąg $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ w przestrzeni Banacha X nazywamy *bazą Schau-*

dera, jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jedno rozwinięcie postaci

$$x = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i e_i, \tag{2.1}$$

gdzie $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem skalarów.

Przestrzeń X z bazą Schaudera $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ możemy rozpatrywać jako przestrzeń ciągów, identyfikując każdy element postaci $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i e_i$ z jednoznacznie wyznaczonym ciągiem współrzędnych $(a_1, a_2, \dots)$. Bazę $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nazywamy *znormalizowaną*, jeśli $\|e_i\| = 1$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Zastępując ewentualnie wektory e_i danej bazy przez wektory $\frac{1}{\|e_i\|} e_i$ możemy ograniczyć się do rozważania baz znormalizowanych.

Dla ustalonej bazy $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ przestrzeni X, wektora $x \in X$ danego wzorem (2.1) i $N \in \mathbb{N}$ oznaczmy $P_N x = \sum_{i \leqslant N} a_i e_i$. Wzór ten definiuje rzut P_N przestrzeni X na podprzestrzeń rozpiętą przez wektory $e_1, \dots, e_N$. Normy tych rzutów są jednostajnie ograniczone i stałą bazową bazy $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nazywamy liczbę $K = \sup_N \|P_N\|$. Mówimy, że baza jest *monotoniczna*, jeśli $\|P_N\| = 1$ dla każdego N. Przyjmując $|||x||| = \sup_N \|P_N x\|$ dla $x \in X$ otrzymujemy normę równoważną w X, dla której baza $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jest bazą monotoniczną (patrz [43, str. 2]).

Baza Schaudera $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ przestrzeni Banacha X jest bazą bezwarunkową, jeśli zbieżność szeregu w rozwinięciu (2.1) dowolnego elementu $x \in X$ jest zbieżnością bezwarunkową, czyli $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)}$ dla każdej permutacji σ zbioru $\mathbb{N}$.

Niech $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ będzie bazą bezwarunkową przestrzeni Banacha X. Dla ciągu znaków $\varepsilon = (\varepsilon_i) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ wzór $P_\varepsilon x = \sum_{i\in\mathbb{N}} \varepsilon_i a_i e_i$, gdzie $x \in X$ ma rozwinięcie (2.1) definiuje operator liniowy i ograniczony na X, przy czym normy tych operatorów są wspólnie ograniczone.

Stałą bezwarunkową bazy bezwarunkowej $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nazywamy liczbę

$$K_b = \sup_{\varepsilon \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \|P_\varepsilon\|.$$

Dla dowolnej bazy bezwarunkowej $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ przestrzeni X wzór $|||x||| = \sup_{\varepsilon\in\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \|P_\varepsilon x\|$ dla $x \in X$ definiuje normę równoważną w X, dla której $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ma stałą bezwarunkową równą 1 (patrz [43, str. 19]).

Niech X będzie przestrzenią Banacha nad ciałem $\mathbb{R}$ z bazą bezwarunkową $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Jeżeli $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ są ciągami skalarów takimi, że szereg $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i e_i$ jest zbieżny oraz $|b_i| \leqslant |a_i|$ dla każdego i, to szereg $\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i e_i$ jest zbieżny i zachodzi nierówność (patrz [43, Proposition

1.c.7])

$$\left\|\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i e_i\right\| \leqslant K_b \left\|\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i e_i\right\|. \tag{2.2}$$

W przestrzeni Banacha X z bazą Schaudera możemy rozważać standardowy częściowy porządek zadany przez nierówność „po współrzędnych". Jeśli baza jest bazą bezwarunkową ze stałą bezwarunkową równą 1, to nierówność (2.2) oznacza, że spełniony jest warunek monotoniczności (iv) z definicji kraty. Również pozostałe warunki z definicji kraty są spełnione, więc taka przestrzeń X jest kratą Banacha. W dalszej części mówiąc o przestrzeni z bazą bezwarunkową ze stałą bezwarunkową 1 będziemy rozważać tę przestrzeń jako kratę Banacha z takim naturalnym porządkiem. Standardowymi przykładami takich krat są przestrzenie c_0 i l^p, dla $1 \leqslant p < \infty$. Kolejnymi przykładami są ciągowe przestrzenie Orlicza i ciągowe przestrzenie Lorentza (patrz [43, str. 115]).

W dalszej części pracy będziemy też rozważać bazy, w których zbiorem indeksów nie jest zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$, ale cały zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Oczywiście jest to różnica czysto techniczna i wszystkie definicje i własności baz indeksowanych przy użyciu zbioru liczb naturalnych przenoszą się na ten przypadek. Zauważmy jednak, że dla bazy $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ suma częściowa szeregu $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i e_i$ ma postać $\sum_{i=-n}^{n} a_i e_i$.

Podkratą kraty Banacha X nazywamy liniową podprzestrzeń Y kraty X taką, że $x \vee y$ (i stąd $x \wedge y = x + y - x \vee y$) należy do Y, jeśli $x, y \in Y$. Szczególnym rodzajem podkraty jest ideał, czyli liniowa podprzestrzeń Y kraty X taka, że jeśli dla $y \in X$ zachodzi warunek $|y| \leqslant |x|$ dla pewnego $x \in Y$, to $y \in Y$.

Przestrzeń sprzężona X^* kraty Banacha X jest również kratą Banacha, jeśli jej dodatni stożek X^*_+ jest zdefiniowany w następujący sposób: $x^* \geqslant 0$ w X^* wtedy i tylko wtedy, gdy $x^*(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \geqslant 0$ w X. Kres górny i kres dolny dwuelementowego zbioru $\{x^*, y^*\}$ w X^* wyrażają się wzorami (patrz [44, str. 3]):

$$(x^* \vee y^*)(x) = \sup\{x^*(x-u) + y^*(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\} \tag{2.3}$$

oraz

$$(x^* \wedge y^*)(x) = \inf\{x^*(x-u) + y^*(u) : 0 \leqslant u \leqslant x\}$$

dla każdego $x \geqslant 0$ w X.

Definicja dodatniego funkcjonału jest szczególnym przypadkiem definicji dodatniego operatora liniowego $T : X \to Y$, gdzie X, Y są kratami Banacha. Operator T jest dodatni, jeśli $Tx \geqslant 0$ dla każdego $x \in X_+$. Każdy dodatni operator liniowy jest ograniczony i

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in B(X_+)\}$$

(patrz [53, str. 27]). Jeżeli $T : X \to Y$ jest dodatnim operatorem liniowym przekształcającym wzajemnie jednoznacznie X na Y i operator odwrotny $T^{-1} : Y \to X$ jest dodatni, to T jest porządkowym izomorfizmem, a w przypadku, gdy $\|T\| = 1 = \|T^{-1}\|$ – porządkową izometrią. Porządkowy izomorfizm zachowuje działania kratowe, tj.

$$T(x \vee y) = T(x) \vee T(y), \quad T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$$

dla wszystkich $x, y \in X$ (patrz [44, str. 2]).

Dla kraty Banacha X przestrzeń X^{**} jest również kratą Banacha i włożenie kanoniczne X w X^{**} jest porządkową izometrią (patrz [44, str. 4]). Zwykle X utożsamia się z podkratą X^{**}.

Niech $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ będzie zbiorem w kracie Banacha X. Jeśli zbiór A jest skończony, to z warunku (iii) w definicji kraty wynika, że w X istnieje kres górny $\bigvee_{\alpha \in A} x_\alpha$ (oraz kres dolny $\bigwedge_{\alpha \in A} x_\alpha$) zbioru $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Jeśli jednak zbiór A nie jest skończony, to element $\bigvee_{\alpha \in A} x_\alpha$ nie musi istnieć w kracie X. Przykładem kraty, w której każdy niepusty zbiór porządkowo ograniczony od góry ma kres górny jest krata sprzężona X^* (patrz [44, str. 3]).

Definicja 2.1.3. Kratę Banacha X nazywamy *porządkowo zupełną* (*σ-porządkowo zupełną*), jeśli każdy niepusty zbiór (odpowiednio ciąg) ograniczony od góry ma kres górny w X.

Niech X będzie σ-porządkowo zupełną kratą Banacha. Dla danego $y \in X$, możemy rozważać projekcję daną wzorem

$$P_y(x) = \bigvee_{n=1}^{\infty} \Big[(n|y|) \wedge x^+\Big] - \bigvee_{n=1}^{\infty} \Big[(n|y|) \wedge x^-\Big]$$

dla każdego $x \in X$. Ponadto przyjmujemy $Q_y = I - P_y$, gdzie I jest operatorem identycznościowym. Odwzorowania P_y i Q_y są dodatnimi liniowymi projekcjami o następujących własnościach ([44, str. 8], [58]):

1) $P_y(y) = y$, $Q_y(y) = 0$,

2) $P_y(z) = 0$ dla każdego $z \in X$ takiego, że $|y| \wedge |z| = 0$,

3) $|P_y(x)| = P_y(|x|) \leqslant |x|$ i $|Q_y(x)| = Q_y(|x|) \leqslant |x|$ dla każdego $x \in X$,

4) $|P_y(x)| \wedge |Q_y(z)| = 0$ dla wszystkich $x, z \in X$,

5) $\|P_y\| = 1 = \|Q_y\|$.

Definicja 2.1.4. Niech $1 < p < \infty$. Mówimy, że krata Banacha X spełnia *dolne p-oszacowanie*, jeśli istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \geqslant M \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.4}$$

dla wszystkich parami rozłącznych elementów $x_1, \ldots, x_n$ w X.

Definicja 2.1.5. Niech $1 < p < \infty$. Mówimy, że krata Banacha X spełnia *górne p-oszacowanie*, jeśli istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leqslant M \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.5}$$

dla wszystkich parami rozłącznych elementów $x_1, \ldots, x_n$ w X.

Twierdzenie 2.1.1 ([44, str. 83])**.** *Niech $1 < p < \infty$. Krata Banacha X spełnia odpowiednio górne lub dolne p-oszacowanie wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń sprzężona do niej X^* spełnia odpowiednio dolne lub górne q-oszacowanie, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Jeżeli krata Banacha X spełnia dolne q-oszacowanie i górne p-oszacowanie dla pewnych $1 < p < 2 < q < \infty$, to przestrzeń X jest superrefleksywna (patrz [44, str. 88]).

2.2 Jednostajna monotoniczność i porządkowa jednostajna gładkość

Pojęcia monotoniczności i porządkowej gładkości w kratach Banacha są klasycznymi, geometrycznymi własnościami krat Banacha i stanowią kratowy odpowiednik własności wypukłości i gładkości w przestrzeniach Banacha.

Definicja 2.2.1. Mówimy, że krata Banacha X (lub jej norma) jest *ściśle monotoniczna*, jeśli dla $x, y \in X$ warunki $0 \leqslant x \leqslant y$ oraz $x \neq y$ implikują $\|x\| < \|y\|$.

Silniejszą wersją ścisłej monotoniczności jest jednostajna monotoniczność.

Definicja 2.2.2. Mówimy, że krata Banacha X jest *jednostajnie monotoniczna*, jeśli dla każdego $\varepsilon \in (0,1)$ istnieje $\delta \in (0,1)$ takie, że jeżeli $x, y \in X$, $0 \leqslant y \leqslant x$, $\|x\| = 1$ i $\|y\| \geqslant \varepsilon$, to $\|x - y\| \leqslant 1 - \delta$.

W przypadku, gdy X jest skończenie wymiarowa, korzystając ze zwartości kuli jednostkowej stwierdzamy, że jednostajna monotoniczność jest równoważna ścisłej monotoniczności.

Jednostajną monotoniczność możemy opisać przy pomocy modułu monotoniczności.

Definicja 2.2.3. *Modułem monotoniczności* kraty Banacha X nazywamy funkcję $\delta_{m,X} : [0,1] \to [0,1]$ zdefiniowaną jako

$$\delta_{m,X}(\varepsilon) = \inf\{1 - \|x - y\| : x, y \in X,\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \geqslant \varepsilon\}. \tag{2.6}$$

Krata X jest jednostajnie monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta_{m,X}(\varepsilon) > 0$ dla każdego $\varepsilon > 0$. Ponadto warunek $\delta_{m,X}(1) = 1$ jest równoważny ścisłej monotoniczności.

Jednostajna monotoniczność i moduł monotoniczności były przedmiotem badań wielu autorów ([8], [23], [33], [34], [38], [50]). Poniżej wymieniamy kilka podstawowych własności tego modułu.

- W definicji $\delta_{m,X}$ warunki $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \geqslant \varepsilon$ mogą być zastąpione przez $\|x\| = 1$, $\|y\| = \varepsilon$.
- Mamy $\delta_{m,X}(0) = 0 \leqslant \delta_{m,X}(\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ i $\delta_{m,X}$ jest funkcją niemalejącą w przedziale $[0,1]$.
- Jeśli $0 \leqslant y \leqslant x$, $x \neq 0$, to

  $$\delta_{m,X}\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right) \leqslant 1 - \frac{\|x - y\|}{\|x\|},$$

  czyli

  $$\|x - y\| \leqslant \|x\| \left(1 - \delta_{m,X}\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)\right). \tag{2.7}$$

Przyjmując $v = x$, $u = x - y$, gdzie $0 \leqslant u \leqslant v$ oraz $v \neq 0$, otrzymujemy inną postać tej nierówności

$$\|v\|\delta_{m,X}\left(\frac{\|v-u\|}{\|v\|}\right) \leqslant \|v\| - \|u\|. \tag{2.8}$$

Zauważmy, że

$$\delta_X(\varepsilon) \leqslant \delta_{m,X}(\varepsilon) \tag{2.9}$$

dla każdego $\varepsilon \in [0,1]$, gdzie δ_X jest modułem wypukłości przestrzeni X. Rzeczywiście, jeśli $x, y \in X$, $0 \leqslant y \leqslant x$, $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \geqslant \varepsilon$, to również $\|x-y\| \leqslant 1$. Ponadto

$$\left\|\frac{x+(x-y)}{2}\right\| = \left\|x - \frac{y}{2}\right\| \geqslant \|x-y\|,$$

przy czym $\|x-(x-y)\| = \|y\| \geqslant \varepsilon$, więc

$$\delta_X(\varepsilon) \leqslant 1 - \left\|\frac{x+(x-y)}{2}\right\| \leqslant 1 - \|x-y\|$$

i wobec dowolności x, y dostajemy nierówność (2.9). Z (2.9) wynika w szczególności, że jeżeli krata X jest jednostajnie wypukła, to X jest jednostajnie monotoniczna (por. [38]).

Przykład 2.2.1. Niech $1 \leqslant p < \infty$ i X oznacza kratę $L^p([0,1])$ albo l^p. Wtedy

$$\delta_{m,X}(\varepsilon) = 1 - (1-\varepsilon^p)^{\frac{1}{p}}$$

dla każdego $\varepsilon \in [0,1]$ (patrz [23]).

Następujący przykład pokazuje, że moduł monotoniczności nie musi być funkcją wypukłą.

Przykład 2.2.2 ([50])**.** Rozważmy kratę $X = \mathbb{R}^2$ z normą

$$\|x\| = \max\left\{|x_1| + \frac{4}{9}|x_2|, \frac{3}{8}|x_1| + |x_2|\right\} \tag{2.10}$$

gdzie $x = (x_1, x_2)$.

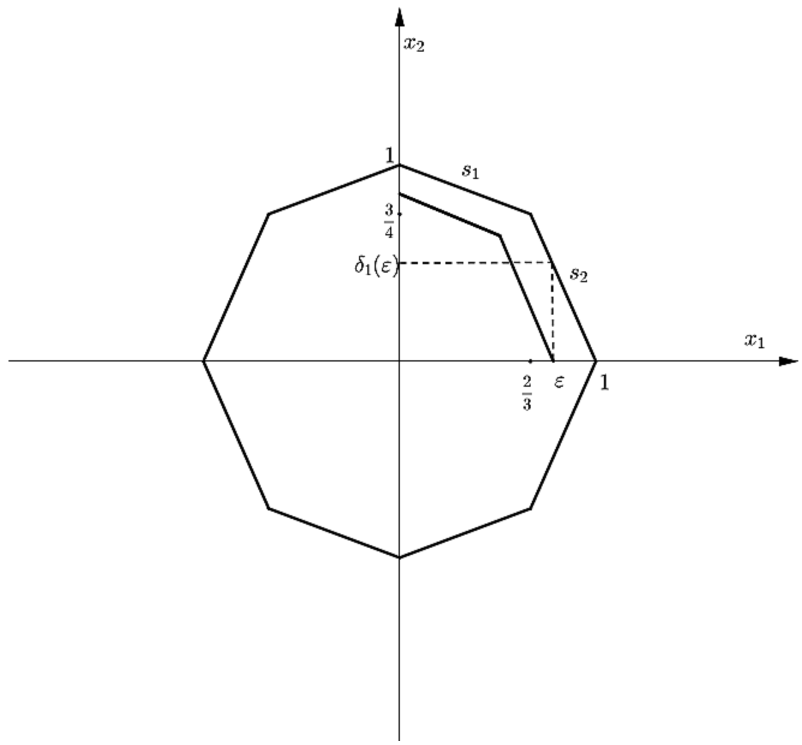
Sfera jednostkowa $S(X)$ przestrzeni X z tą normą jest ośmiokątem o wierzchołkach w punktach $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ i $\left(\pm\frac{2}{3}, \pm\frac{3}{4}\right)$.

Dodatnia część sfery jednostkowej $S(X_+)$ składa się z dwóch odcinków: s_1 o końcach $(0,1)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$ oraz s_2 o końcach $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$, $(1,0)$, które tworzą wykres funkcji

$$\delta_1(x_1) = \min\left\{1 - \frac{3}{8}x_1, \frac{9}{4}(1-x_1)\right\}$$

(rys. 2.1). Funkcja odwrotna wyraża się wzorem

$$\delta_2(x_2) = \min\left\{1 - \frac{4}{9}x_2, \frac{8}{3}(1 - x_2)\right\}.$$

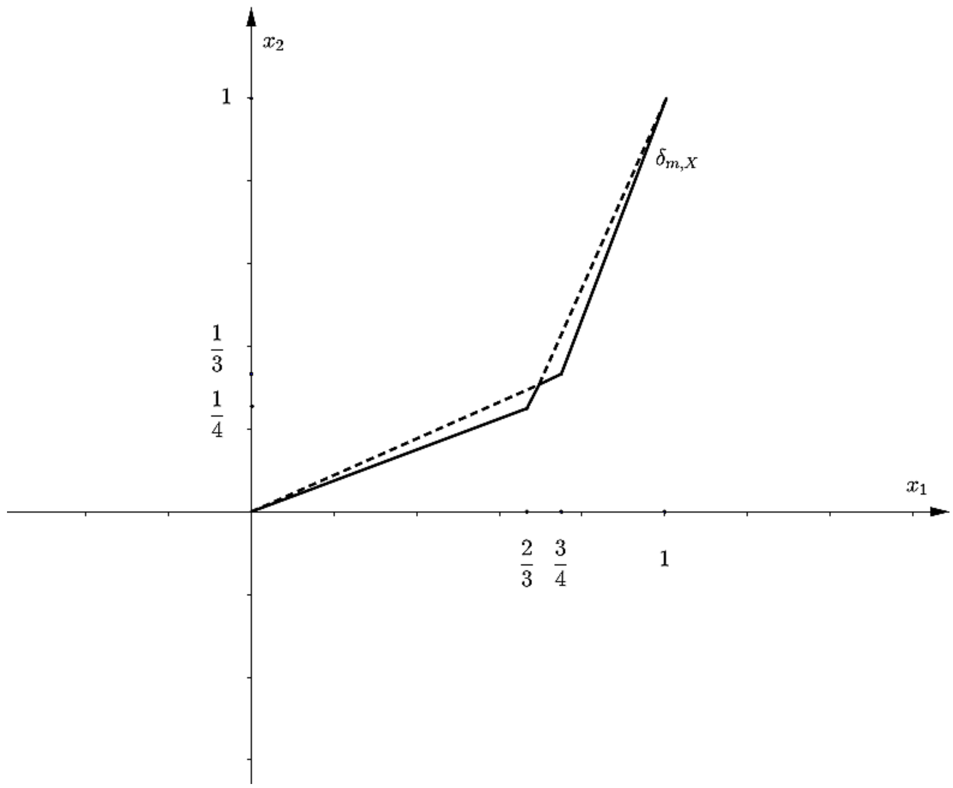


Rys. 2.1: Sfera jednostkowa przestrzeni $X = \mathbb{R}^2$ z normą zdefiniowaną wzorem (2.10).

Mamy $\delta_{m,X}(\varepsilon) = 1 - \max\|x - y\|$, gdzie maksimum bierzemy po wszystkich punktach $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ takich, że $0 \leqslant y \leqslant x$, $\|y\| = \varepsilon$ oraz $\|x\| = 1$. Jeśli punkt y przebiega odcinek εs_2, to norma różnicy $\|x - y\|$ osiąga swoją maksymalną wartość dla $y = (\varepsilon, 0)$ oraz $x = (\varepsilon, \delta_1(\varepsilon))$. Dla tych punktów $\|x-y\| = \delta_1(\varepsilon)$. Analogicznie, jeśli punkt y przebiega odcinek εs_1, to maksymalna wartość $\|x-y\|$ jest równa $\delta_2(\varepsilon)$. Stąd $\delta_{m,X}(\varepsilon) = \min\{1-\delta_1(\varepsilon), 1-\delta_2(\varepsilon)\}$ lub dokładniej

$$\delta_{m,X}(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{3}{8}\varepsilon, & \text{jeśli } \varepsilon \in \left[0, \frac{2}{3}\right) \\ \frac{9}{4}\varepsilon - \frac{5}{4}, & \text{jeśli } \varepsilon \in \left[\frac{2}{3}, \frac{9}{13}\right) \\ \frac{4}{9}\varepsilon, & \text{jeśli } \varepsilon \in \left[\frac{9}{13}, \frac{3}{4}\right) \\ \frac{8}{3}\varepsilon - \frac{5}{3}, & \text{jeśli } \varepsilon \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

co pokazuje, że $\delta_{m,X}$ nie jest funkcją wypukłą (rys. 2.2).



Rys. 2.2: Moduł monotoniczności $\delta_{m,X}$ przestrzeni $X = \mathbb{R}^2$ z normą zdefiniowaną wzorem (2.10).

Ponieważ, w ogólnym przypadku funkcja $\delta_{m,X}$ nie musi być wypukła, w sposób naturalny pojawia się pytanie o ciągłość tej funkcji. Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca: funkcja $\delta_{m,X}$ jest ciągła w przedziale $[0,1)$. Aby to wykazać, wystarczy przedstawić funkcję $\delta_{m,X}$ jako infimum rodziny funkcji wypukłych.

Dla kraty Banacha X i danych $u, v \in S(X_+)$, $u \neq v$ oraz $\varepsilon \in [0,1)$, niech

$$\delta_{u,v}(\varepsilon) = 1 - \max\{s \in (0,1] : \|\varepsilon u + sv\| \leqslant 1\}.$$

Wtedy $\delta_{u,v}$ jest funkcją wypukłą na $[0,1)$ oraz

$$\delta_{m,X}(\varepsilon) = \inf\{\delta_{u,v}(\varepsilon) : u, v \in S(X_+)\} \tag{2.11}$$

dla każdego $\varepsilon \in [0,1)$.

Z (2.11) wnioskujemy, że

$$|\delta_{m,X}(\varepsilon_1) - \delta_{m,X}(\varepsilon_2)| \leqslant \frac{1}{1-a}|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$$

dla wszystkich $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [0,a]$, gdzie $a < 1$, co w szczególności pokazuje, że $\delta_{m,X}$ jest ciągła w przedziale $[0,1)$.

Z jednostajną monotonicznością związany jest następujący współczynnik.

Definicja 2.2.4. *Charakterystyką monotoniczności* kraty X nazywamy stałą

$$\varepsilon_{0,m}(X) = \sup\{\varepsilon \in [0,1] : \delta_{m,X}(\varepsilon) = 0\} = \inf\{\varepsilon \in [0,1] : \delta_{m,X}(\varepsilon) > 0\}.$$

Krata Banacha X jest jednostajnie monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\varepsilon_{0,m}(X) = 0$.

Twierdzenie 2.2.1 ([23])**.** *Dla dowolnej kraty Banacha X zachodzi następująca równość*

$$\varepsilon_{0,m}(X) = 1 - \delta_{m,X}(1^-),$$

gdzie $\delta_{m,X}(1^-) = \lim_{\varepsilon \to 1^-} \delta_{m,X}(\varepsilon)$. *Ponadto*

$$\delta_{m,X}(1 - \delta_{m,X}(\varepsilon)) = 1 - \varepsilon$$

dla dowolnego $\varepsilon \in (\varepsilon_{0,m}(X), 1)$, *jeśli* $\varepsilon_{0,m}(X) < 1$.

Innym modułem związanym z monotonicznością kraty Banacha X jest funkcja σ_X zdefiniowana jako

$$\sigma_X(\varepsilon) = \inf\{\|x+y\| - 1 : x, y \in X_+,\ \|x\| = 1,\ \|y\| = \varepsilon\} \tag{2.12}$$

dla $\varepsilon \in [0,1]$.

Funkcja σ_X jest nieujemna, niemalejąca i ciągła w przedziale $[0,\infty)$. Ponadto warunki $\|x\| = 1$, $\|y\| = \varepsilon$ w definicji $\sigma_X(\varepsilon)$ mogą być zastąpione przez $\|x\| \geqslant 1$ oraz $\|y\| \geqslant \varepsilon$.

W [38] podano wzór opisujący zależność pomiędzy modułami monotoniczności $\delta_{m,X}$ i σ_X. Wzór ten nie jest jednak prawdziwy. W poniższym twierdzeniu podajemy wzory przedstawiające zależności między tymi modułami.

Twierdzenie 2.2.2 ([49])**.** *Niech X będzie kratą Banacha. Wówczas dla każdego* $\varepsilon \in [0,1)$ *zachodzą równości*

$$\delta_{m,X}\left(\frac{\varepsilon}{1+\sigma_X(\varepsilon)}\right) = \frac{\sigma_X(\varepsilon)}{1+\sigma_X(\varepsilon)} \tag{2.13}$$

oraz

$$\sigma_X\left(\frac{\varepsilon}{1-\delta_{m,X}(\varepsilon)}\right)=\frac{\delta_{m,X}(\varepsilon)}{1-\delta_{m,X}(\varepsilon)}. \tag{2.14}$$

Dowód. Niech $\tilde{\delta}_{m,X}(\varepsilon)=\delta_{m,X}(\varepsilon)$ dla $\varepsilon\in[0,1)$ oraz niech $\tilde{\delta}_{m,X}(1)=\lim_{\varepsilon\to 1-}\delta_{m,X}(\varepsilon)$. Dla danych $\varepsilon\geqslant 0$ i $\gamma>0$, niech $x,y\geqslant 0$ będą elementami kraty X, dla których $\|x\|=1$, $\|y\|=\varepsilon$ oraz

$$\|x+y\|-1\leqslant\sigma_X(\varepsilon)+\gamma.$$

Połóżmy $u=\|x+y\|^{-1}(x+y)$ oraz $v=\|x+y\|^{-1}y$. Oczywiście $\|u\|=1$, $u\geqslant v\geqslant 0$ i $\|v\|\geqslant(1+\sigma_X(\varepsilon)+\gamma)^{-1}\varepsilon$. Stąd,

$$1-\|u-v\|\geqslant\delta_{m,X}\left(\frac{\varepsilon}{1+\sigma_X(\varepsilon)+\gamma}\right).$$

Z drugiej strony

$$1-\|u-v\|=\frac{\|x+y\|-1}{\|x+y\|}\leqslant\frac{\sigma_X(\varepsilon)+\gamma}{1+\sigma_X(\varepsilon)}.$$

Stąd dostajemy

$$\delta_{m,X}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_X(\varepsilon)+1+\gamma}\right)\leqslant\frac{\sigma_X(\varepsilon)+\gamma}{1+\sigma_X(\varepsilon)}.$$

Przechodząc do granicy z $\gamma\to 0$ otrzymujemy

$$\delta_{m,X}\left(\frac{\varepsilon}{1+\sigma_X(\varepsilon)}\right)\leqslant\frac{\sigma_X(\varepsilon)}{1+\sigma_X(\varepsilon)} \tag{2.15}$$

dla każdego $\varepsilon\geqslant 0$. Dla $\varepsilon\in[0,1)$ dostaniemy więc nierówność $\leqslant$ w (2.13).

Przejdźmy teraz do wzoru (2.14). Zauważmy, że jeśli $\varepsilon\in[0,1)$, to $\delta_{m,X}(\varepsilon)\leqslant\varepsilon<1$. Dla danego $\gamma>0$ wybierzmy $x,y\in X$ w taki sposób, aby $0\leqslant y\leqslant x$, $\|x\|\leqslant 1$, $\|y\|\geqslant\varepsilon$ oraz

$$1-\|x-y\|\leqslant\delta_{m,X}(\varepsilon)+\gamma.$$

Wtedy $y\neq x$ i zdefiniujmy elementy u i v jako: $u=\|x-y\|^{-1}(x-y)$ oraz $v=\|x-y\|^{-1}y$. Oczywiście $u,v\geqslant 0$, $\|u\|=1$ oraz $\|v\|\geqslant(1-\delta_{m,X}(\varepsilon))^{-1}\varepsilon$. Zatem

$$\|u+v\|-1\geqslant\sigma_X\left(\frac{\varepsilon}{1-\delta_{m,X}(\varepsilon)}\right).$$

Z drugiej strony

$$\|u+v\|-1=\frac{1-\|x-y\|}{\|x-y\|}\leqslant\frac{\delta_{m,X}(\varepsilon)+\gamma}{1-\delta_{m,X}(\varepsilon)},$$

co daje nam nierówność

$$\sigma_X\left(\frac{\varepsilon}{1-\delta_{m,X}(\varepsilon)}\right) \leqslant \frac{\delta_{m,X}(\varepsilon)+\gamma}{1-\delta_{m,X}(\varepsilon)}.$$

Po przejściu do granicy z $\gamma \to 0$ otrzymujemy

$$\sigma_X\left(\frac{\varepsilon}{1-\delta_{m,X}(\varepsilon)}\right) \leqslant \frac{\delta_{m,X}(\varepsilon)}{1-\delta_{m,X}(\varepsilon)} \tag{2.16}$$

dla każdego $\varepsilon \in [0,1)$. Pozostała część dowodu jest analogiczna do dowodu twierdzenia 1.3.4, więc ją pomijamy. □

Powyższe twierdzenie pokazuje, że X jest jednostajnie monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_X(\varepsilon) > 0$ dla wszystkich $\varepsilon > 0$. Ponadto

$$\varepsilon_{0,m}(X) = \sup\{\varepsilon \in [0,1] : \sigma_X(\varepsilon) = 0\}.$$

Własność dualna do jednostajnej monotoniczności to porządkowa jednostajna gładkość. Definiujemy ją przy pomocy modułu porządkowej gładkości, który został wprowadzony w [38].

Definicja 2.2.5. *Modułem porządkowej gładkości* kraty Banacha X nazywamy funkcję $\rho_{m,X}$ zdefiniowaną jako

$$\rho_{m,X}(\tau) = \sup\{\|x \vee \tau y\| - 1 : x, y \in B(X),\ x, y \geqslant 0\}$$

dla $\tau \in [0,1]$. Mówimy, że krata X jest *porządkowo jednostajnie gładka*, jeśli

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\rho_{m,X}(\tau)}{\tau} = 0. \tag{2.17}$$

Zauważmy, że $\rho_{m,X}$ jest funkcją wypukłą (por. [38]) i granica we wzorze (2.17) jest prawostronną pochodną $\rho_{m,X}$ w zerze.

Przykład 2.2.3. Niech $1 \leqslant p < \infty$ i X oznacza kratę $L^p([0,1])$ albo l^p. Wtedy

$$\rho_{m,X}(\tau) = (1+\tau^p)^{\frac{1}{p}} - 1$$

dla każdego $\tau \in [0,1]$.

Korzystając z równości

$$x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

stwierdzamy, że

$$\rho_{m,X}(\tau) \leqslant \rho_X(\tau)$$

dla każdego $\tau \in [0,1]$, gdzie ρ_X jest modułem gładkości kraty X. Stąd, jeśli X jest jednostajnie gładka, to X jest porządkowo jednostajnie gładka (por. [38]).

Następujące twierdzenie pokazuje związki rozważanych współczynników z p-oszacowaniami.

Twierdzenie 2.2.3 ([6])**.** *Niech X będzie kratą Banacha.*

1) Jeśli $\rho_{m,X}(1) < 1$, to X spełnia górne p-oszacowanie dla pewnego $p \in (1, \infty)$.

2) Jeśli $\varepsilon_{0,m}(X) < 1$, to X spełnia dolne q-oszacowanie dla pewnego $q \in (1, \infty)$.

Moduł porządkowej jednostajnej gładkości $\rho_{m,X}$ kraty Banacha X jest ściśle związany z kątem Riesza, który został wprowadzony przez J. M. Borweina i B. Simsa w [9] jako narzędzie w dowodzie twierdzenia o punkcie stałym dla odwzorowań nieoddalających.

Definicja 2.2.6. *Kątem Riesza* kraty X nazywamy współczynnik $\alpha(X)$ zdefiniowany jako

$$\alpha(X) = \rho_{m,X}(1) + 1 = \sup\{\|x \vee y\| : x, y \in B(X),\ x, y \geqslant 0\}.$$

Mamy $1 \leqslant \alpha(X) \leqslant 2$.

W [57] pokazano, że jeśli krata X jest σ-porządkowo zupełna, to

$$\alpha(X) = \sup\{\|x \vee y\| : x, y \in B(X),\ x, y \geqslant 0,\ x \wedge y = 0\}. \tag{2.18}$$

Twierdzenie 2.2.4 ([49])**.** *Niech X będzie σ-porządkowo zupełną kratą Banacha i niech*

$$m = \inf\{\|x + y\| : x, y \in S(X),\ x, y \geqslant 0,\ x \wedge y = 0\}.$$

Wówczas

$$1 + \sigma_X(1) \leqslant m \leqslant \left(\max\left\{\frac{1}{2}, 1 - \sigma_X(1)\right\}\right)^{-1} (1 + \sigma_X(1)),$$

gdzie σ_X jest modułem zdefiniowanym wzorem (2.12)*. W konsekwencji warunek $\sigma_X(1) = 0$ jest równoważny równości $m = 1$.*

Dowód. Zauważmy, że prawdziwe są nierówności: $1+\sigma_X(1) \leqslant m$ oraz $m \leqslant 2 \leqslant 2(1+\sigma_X(1))$. Stąd wystarczy jedynie wykazać, że jeśli $1-\sigma_X(1) > \frac{1}{2}$ (czyli, jeśli $\sigma_X(1) < \frac{1}{2}$), to spełniona jest nierówność

$$m \leqslant \frac{1+\sigma_X(1)}{1-\sigma_X(1)}. \tag{2.19}$$

Niech będzie dana stała $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$. Niech $x, y \geqslant 0$ będą elementami sfery jednostkowej $S(X)$, dla których $\|x+y\| < \sigma_X(1)+1+\gamma$. Niech ponadto $u = x - x \wedge y$. Wtedy $u \wedge (y - x \wedge y) = 0$, więc

$$P_u(y) - P_u(x \wedge y) = P_u(y - x \wedge y) = 0.$$

Stąd $P_u(y) = P_u(x \wedge y) \leqslant x \wedge y \leqslant x$ i w konsekwencji

$$Q_u(x+y) = x + y - P_u(x) - P_u(y) \geqslant y - x.$$

Z powyższej nierówności dostajemy $x + y + Q_u(x+y) \geqslant 2y$, co daje oszacowanie

$$2 = 2\|y\| \leqslant \|Q_u(x+y)\| + \|x+y\|.$$

To pokazuje, że $\|Q_u(x+y)\| \geqslant 2 - \|x+y\|$.

Następnie mamy $0 = Q_u(u) = Q_u(x) - Q_u(x \wedge y)$, więc $Q_u(x) = Q_u(x \wedge y) \leqslant y$. Korzystając z powyższej argumentacji dostajemy $\|P_u(x+y)\| \geqslant 2 - \|x+y\|$. W konsekwencji

$$m \leqslant \left\| \frac{P_u(x+y)}{\|P_u(x+y)\|} + \frac{Q_u(x+y)}{\|Q_u(x+y)\|} \right\| \leqslant \frac{\|x+y\|}{2-\|x+y\|} \leqslant \frac{1+\sigma_X(1)+\gamma}{1-\sigma_X(1)-\gamma}.$$

Przechodząc do granicy z $\gamma \to 0$, otrzymujemy (2.19), co kończy dowód naszego twierdzenia.

$\square$

Następne twierdzenie pokazuje, że porządkowa jednostajna gładkość jest dualna do jednostajnej monotoniczności.

Twierdzenie 2.2.5. *Niech X będzie kratą Banacha. Wówczas*

$$\rho_{m,X^*}(\tau) = \sup\{\varepsilon\tau - \delta_{m,X}(\varepsilon) : 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1\} \tag{2.20}$$

oraz

$$\rho_{m,X}(\tau) = \sup\{\varepsilon\tau - \delta_{m,X^*}(\varepsilon) : 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1\} \tag{2.21}$$

dla każdego $\tau \in [0,1]$.

Dowód. Podamy dowód wzoru (2.20). W dowodzie skorzystamy ze wzoru (2.3) na supremum funkcjonałów. Mamy

$$\begin{aligned}
\rho_{m,X^*}(\tau) &= \sup\left\{\|x^* \vee \tau y^*\| - 1 : x^*, y^* \in S(X^*_+)\right\} \\
&= \sup\left\{(x^* \vee \tau y^*)(x) - 1 : x^*, y^* \in S(X^*_+), x \in S(X_+)\right\} \\
&= \sup\left\{(x^*(x-u) + \tau y^*(u)) - 1 : x^*, y^* \in S(X^*_+), 0 \leqslant u \leqslant x, \|x\| = 1\right\} \\
&= \sup\left\{(\|x-u\| + \tau\|u\|) - 1 : 0 \leqslant u \leqslant x, \|x\| = 1\right\} \\
&= \sup\left\{\tau\varepsilon + (\|x-u\| - 1) : \varepsilon \in [0,1], 0 \leqslant u \leqslant x, \|x\| = 1, \|u\| = \varepsilon\right\} \\
&= \sup\left\{\tau\varepsilon - \delta_{m,X}(\varepsilon) : \varepsilon \in [0,1]\right\}.
\end{aligned}$$

Dowód wzoru (2.21) jest analogiczny. □

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 2.2.1. *Niech X będzie kratą Banacha X. Wtedy*

1) *X jest jednostajnie monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy X^* jest porządkowo jednostajnie gładka.*

2) *X^* jest jednostajnie monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy X jest porządkowo jednostajnie gładka.*

Wzór (2.20) jest częścią twierdzenia 3 z pracy [38]. W twierdzeniu tym znajduje się też równość (d) powstała przez zamianę rolami funkcji ρ i δ we wzorze (2.21). Nie jest ona jednak prawdziwa, gdyż wynikałoby z niej, że $\delta_{m,X}$ jest funkcją wypukłą, a tak być nie musi (patrz przykład 2.2.2).

Twierdzenie 3 [38] zawiera także wzory pokazujące, że moduły kraty podwójnie sprzężonej X^{**} są równe modułom kraty X:

$$\delta_{m,X^{**}}(\varepsilon) = \delta_{m,X}(\varepsilon), \tag{2.22}$$

$$\rho_{m,X^{**}}(\tau) = \rho_{m,X}(\tau). \tag{2.23}$$

dla dowolnych $\varepsilon, \tau \in [0,1]$. Dowód wzoru (2.22) opiera się jednak na błędnej równości (d) z twierdzenia 3 [38].

Poprawny dowód wzoru (2.22) (oraz (2.23)) można otrzymać korzystając z następujących twierdzeń, z których pierwsze jest zasadą lokalnej refleksywności dla krat.

Twierdzenie 2.2.6 ([5]). *Niech X będzie kratą Banacha. Dla dowolnej skończenie wymiarowej podkraty Y kraty X^{**} i dowolnego $\gamma > 0$ istnieje kratowy izomorfizm $T : Y \to X$ taki, że* $\max\{\|T\|, \|T^{-1}\|\} < 1 + \gamma$.

Twierdzenie 2.2.7 ([46]). *Niech X będzie porządkowo zupełną kratą Banacha. Dla dowolnej skończenie wymiarowej podprzestrzeni E kraty X i dowolnego $\gamma > 0$ istnieje podkrata Z kraty X zawierająca E, skończenie wymiarowa podkrata $Y \subset Z$ oraz dodatnia projekcja liniowa $P : Z \to Z$ taka, że $P(Z) = Y$ i $\|Px - x\| \leqslant \gamma\|x\|$ dla każdego $x \in E$.*

Oczywiście $\delta_{m,X^{**}}(\varepsilon) \leqslant \delta_{m,X}(\varepsilon)$, więc dla wykazania wzoru (2.22) wystarczy sprawdzić, że $\delta_{m,X}(\varepsilon) \leqslant \delta_{m,X^{**}}(\varepsilon)$. W tym celu bierzemy dowolne elementy $0 \leqslant y^{**} \leqslant x^{**}$ w X^{**}, dla których $\|x^{**}\| = 1$ i $\|y^{**}\| = \varepsilon$. Niech E będzie podprzestrzenią przestrzeni X^{**} rozpiętą na wektorach x^{**}, y^{**}. Ponieważ krata X^{**} jest porządkowo zupełna, więc dla dowolnego $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, korzystając z twierdzenia 2.2.7 otrzymujemy podkratę Z kraty X^{**} zawierającą E, skończenie wymiarową podkratę $Y \subset Z$ oraz dodatnią projekcję liniową $P : Z \to Z$ taką, że $P(Z) = Y$ i $\|Pz^{**} - z^{**}\| \leqslant \gamma\|z^{**}\|$ dla każdego $z^{**} \in E$. Ponadto, zgodnie z twierdzeniem 2.2.6 istnieje kratowy izomorfizm $T : Y \to X$ taki, że $\max\{\|T\|, \|T^{-1}\|\} < 1+\gamma$.

Przyjmujemy $x = T(Px^{**})$, $y = T(Py^{**})$. Wtedy $x, y \in X$ i $0 \leqslant y \leqslant x$. Ponadto

$$\|x\| \leqslant \|T\|\|Px^{**}\| \leqslant (1 + \gamma)^2\|x^{**}\| = (1 + \gamma)^2.$$

Następnie

$$(1 + \gamma)\|y\| \geqslant \|T^{-1}y\| = \|Py^{**}\| \geqslant (1 - \gamma)\|y^{**}\| = \varepsilon(1 - \gamma),$$

czyli $\|y\| \geqslant \frac{1-\gamma}{1+\gamma}\varepsilon$. Podobnie

$$\|x - y\| \geqslant \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}\|x^{**} - y^{**}\|.$$

Stąd i z nierówności (2.7) otrzymujemy

$$\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}\|x^{**} - y^{**}\| \leqslant \|x\| \left(1 - \delta_{m,X}\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)\right) \leqslant (1 + \gamma)^2 \left(1 - \delta_{m,X}\left(\frac{1 - \gamma}{(1 + \gamma)^3}\varepsilon\right)\right),$$

co w granicy przy $\gamma \to 0$ daje $\|x^{**} - y^{**}\| \leqslant 1 - \delta_{m,X}(\varepsilon)$, czyli

$$\delta_{m,X}(\varepsilon) \leqslant 1 - \|x^{**} - y^{**}\|.$$

Wobec dowolności x^{**}, y^{**} dostajemy ostatecznie nierówność $\delta_{m,X}(\varepsilon) \leqslant \delta_{m,X^{**}}(\varepsilon)$.

Wniosek 2.2.2 ([38]). *Niech X będzie kratą Banacha X. Krata X jest jednostajnie monotoniczna (porządkowo jednostajnie gładka) wtedy i tylko wtedy, gdy X^{**} jest jednostajnie monotoniczna (porządkowo jednostajnie gładka).*

2.3 Jednostajna niekwadratowość w kratach Banacha

Jeśli $\|\cdot\|$ jest normą absolutną w $\mathbb{R}^2$, to kula jednostkowa jest symetryczna względem obu osi. Zatem przestrzeń $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ nie jest niekwadratowa jedynie w dwóch przypadkach:

$$\|x_1e_1 + x_2e_2\| = \max\{|x_1|\|e_1\|, |x_2|\|e_2\|\}$$

dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ albo

$$\|x_1e_1 + x_2e_2\| = |x_1|\|e_1\| + |x_2|\|e_2\|$$

dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, gdzie e_1, e_2 jest standardową bazą $\mathbb{R}^2$. W [20] P. Dowling i S. Saejung wykazali, że ten prosty fakt ma swój trójwymiarowy odpowiednik. Ich argumentacja daje następującą charakteryzację niekwadratowości w $\mathbb{R}^3$.

Twierdzenie 2.3.1 ([20]). *Niech X będzie kratą $\mathbb{R}^3$ wyposażoną w normę absolutną $\|\cdot\|$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1) X jest niekwadratowa.

2) $1 < \|x + y\| < 2$ dla wszystkich rozłącznych wektorów $x, y \in S(X)$.

W warunku 2) wystarczy rozważać tylko dodatnie wektory x, y. Stąd, z (2.18) i z twierdzenia 2.2.4 wynika, że warunek 2) jest równoważny temu, że $\epsilon_{0,m}(X) < 1$ i $\alpha(X) < 2$, co daje nam taką samą sytuację, jak w przypadku dwuwymiarowym.

W poniższym przykładzie pokazujemy, że warunek 2) w twierdzeniu 2.3.1 nie implikuje jednostajnej niekwadratowości dla krat o wymiarze większym niż 3.

Przykład 2.3.1 ([49])**.** Dla $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ oznaczamy

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{1}{2}(|x_1| + |x_2|), \\ p_2(x) &= \frac{2}{3}\max\{|x_1|, |x_2|\} + \frac{1}{3}(|x_3| + |x_4|), \\ p_3(x) &= \frac{4}{3}\max\Big\{\frac{2}{3}\max\{|x_1|, |x_2|\}, \frac{1}{3}(|x_3| + |x_4|)\Big\}, \\ p_4(x) &= \frac{1}{2}\max\{|x_3|, |x_4|\}. \end{aligned}$$

Niech X będzie przestrzenią $\mathbb{R}^4$ wyposażoną w normę absolutną zdefiniowaną wzorem

$$\|x\| = \max\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}. \tag{2.24}$$

Zauważmy, że jeśli $x \in B(X)$, to

$$\max\Big\{\frac{2}{3}\max\{|x_1|, |x_2|\}, \frac{1}{3}(|x_3| + |x_4|)\Big\} \leqslant \frac{3}{4}. \tag{2.25}$$

Ponadto, dla wszystkich nieujemnych wektorów $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ oraz $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ mamy

$$\|x + y\| \geqslant \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \tag{2.26}$$

oraz

$$\|x + y\| \geqslant \frac{2}{3}\max\{x_1, x_2, y_1, y_2\} + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + y_3 + y_4). \tag{2.27}$$

Udowodnimy, że jeśli $x, y \in S(X)$ są nieujemne i rozłączne, to

$$1 + \frac{1}{14} \leqslant \|x + y\| \leqslant 2 - \frac{2}{9}. \tag{2.28}$$

W celu udowodnienia lewej nierówności rozważmy wszystkie możliwe przypadki, w których $\|x\|$ i $\|y\|$ są dane za pomocą jednego z czterech wyrażeń we wzorze (2.24). Z faktu, że x oraz y są rozłączne, wynika, że pewne przypadki nie są możliwe. Rzeczywiście, gdyby $\|x\| = p_1(x)$ i $\|y\| = p_1(y)$, wówczas jedna z dwóch początkowych współrzędnych wektorów x, y byłaby równa 2, co jest sprzeczne z (2.25). Podobnie, nie jest możliwe, aby jedna z norm $\|x\|$ i $\|y\|$ była dana za pomocą funkcji p_1, zaś druga za pomocą p_2. W konsekwencji wystarczy rozważać jedynie poniższe przypadki.

Przypadek I. Niech $\|x\| = p_2(x)$ i $\|y\| = p_2(y)$. Wtedy $1 = \|x\| = \frac{2}{3}\max\{x_1, x_2\} + \frac{1}{3}(x_3 + x_4)$ i z (2.25) dostajemy $\frac{1}{3}(x_3 + x_4) \geqslant \frac{1}{4}$. Stąd wzór (2.27) implikuje $\|x + y\| \geqslant \frac{5}{4}$.

Przypadek II. Norma $\|x\|$ lub $\|y\|$ osiągnięte są dla funkcji p_4. Załóżmy, że $1 = \|y\| = \frac{1}{2}\max\{y_3, y_4\}$. Wtedy z (2.27) dostajemy

$$\|x + y\| \geqslant \frac{2}{3}\max\{x_1, x_2\} + \frac{1}{3}(x_3 + x_4) + \frac{2}{3}.$$

Jeśli $1 = \|x\| = \frac{2}{3}\max\{x_1, x_2\} + \frac{1}{3}(x_3 + x_4)$, to $\|x + y\| \geqslant \frac{5}{3}$. Jeśli $\|x\|$ osiągnięta jest dla p_3 lub p_4, to $\max\{x_1, x_2\} \geqslant 1$ lub $x_3 + x_4 \geqslant 2$, więc $\|x + y\| \geqslant \frac{4}{3}$.

Przypadek III. Jedna z norm $\|x\|$ i $\|y\|$ jest dana za pomocą p_3, a druga nie jest dana za pomocą p_4. Załóżmy, że $\|x\| = p_3(x)$. Jeśli $\frac{1}{3}(x_3 + x_4) = \frac{3}{4}$, to podobnie jak w przypadku II, otrzymujemy $\|x + y\| \geqslant \frac{17}{12}$.

Załóżmy teraz, że $\frac{2}{3}\max\{x_1, x_2\} = \frac{3}{4}$. Jeśli $\|y\| = p_1(y)$, to $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = 1$, więc z (2.26) otrzymujemy $\|x + y\| \geqslant \frac{25}{16}$. Nierówność (2.26) daje nam ponadto

$$\|x + y\| \geqslant \frac{9}{16} + \frac{1}{2}m, \tag{2.29}$$

gdzie $m = \max\{y_1, y_2\}$. Załóżmy, że $\|y\| = p_2(y)$. Wtedy $1 = \|y\| = \frac{2}{3}m + \frac{1}{3}(y_3 + y_4)$ lub $1 = \|y\| = \frac{4}{3}\max\{\frac{2}{3}m, \frac{1}{3}(y_3 + y_4)\}$. W pierwszym przypadku z (2.27) otrzymujemy

$$\|x + y\| \geqslant \frac{7}{4} - \frac{2}{3}m,$$

co razem z (2.29) implikuje, że $\|x + y\| \geqslant \frac{15}{14}$.

Jeśli $1 = \|y\| = \frac{4}{3}\max\{\frac{2}{3}m, \frac{1}{3}(y_3 + y_4)\}$, to albo $m = \frac{9}{8}$ i (2.29) implikuje, że $\|x + y\| \geqslant \frac{9}{8}$, albo $y_3 + y_4 = \frac{9}{4}$. W ostatnim przypadku z (2.27) wynika, że $\|x + y\| \geqslant \frac{3}{2}$.

W celu udowodnienia prawej nierówności w (2.28) połóżmy $z = x + y$. Mamy $z_i = x_i$ dla $i \in \operatorname{supp} x$ oraz $z_i = y_i$ dla $i \in \operatorname{supp} y$. Z (2.25) otrzymujemy $z_i \leqslant \frac{9}{8}$ dla $i = 1, 2$. Ponadto, $z_i \leqslant 2$ dla $i = 3, 4$. Rozważymy wszystkie przypadki, w których norma $\|z\|$ jest dana przez jedną z czterech funkcji w definicji (2.24). Jeśli $\|z\| = p_1(z)$, to $\|z\| \leqslant \frac{9}{8}$.

Załóżmy, że $\|z\| = p_2(z)$. Możemy przyjąć, że $\max\{z_1, z_2\} = \max\{x_1, x_2\}$. Jeśli $z_3 = x_3$, to $\|z\| \leqslant \|x\| + \frac{1}{3}z_4 \leqslant \frac{5}{3}$. To samo oszacowanie ma miejsce w przypadku, gdy $z_4 = x_4$. Załóżmy teraz, że $z_i = y_i$ dla $i = 3, 4$. Wtedy

$$\|z\| \leqslant \frac{2}{3}\max\{x_1, x_2\} + \frac{1}{3}(y_3 + y_4) \leqslant \frac{3}{2}.$$

Jeśli $\|z\| = \frac{8}{9}\max\{z_1, z_2\}$, to $\|z\| \leqslant 1$, a jeśli $\|z\| = \frac{4}{9}(y_3 + y_4)$, to $\|z\| \leqslant \frac{16}{9}$. W końcu, jeśli $\|z\| = p_4(z)$, to $\|z\| \leqslant 1$.

Oszacowania (2.28) pokazują, że przestrzeń X spełnia warunek 2) z twierdzenia 2.3.1. Ale przyjmując $x = (1, 1, 1, 0)$ i $y = (1, -1, 0, 1)$, stwierdzamy, że $\|x\| = 1 = \|y\|$ oraz $\|x + y\| = 2 = \|x - y\|$, więc przestrzeń X nie jest niekwadratowa.

Rozdział 3

Geometryczne własności sum prostych przestrzeni Banacha

3.1 Konstrukcja i podstawowe własności sumy prostej

Niech I będzie niepustym zbiorem indeksów, a $\mathrm{Map}(I, \mathbb{R})$ przestrzenią wszystkich funkcji z I do $\mathbb{R}$ ze standardowymi operacjami i porządkiem. Dla zbioru $A \subset I$, symbolem 1_A oznaczamy funkcję charakterystyczną zbioru A. Ponadto, niech $A^c = I \setminus A$.

W ogólnej konstrukcji sumy prostej przestrzeni Banacha korzystamy z przestrzeni E, które nazywać będziemy przestrzeniami bazowymi.

Definicja 3.1.1. *Przestrzenią bazową* nazywamy rzeczywistą przestrzeń Banacha E, która jest liniową podprzestrzenią przestrzeni $\mathrm{Map}(I, \mathbb{R})$ i spełnia następujące *założenie monotoniczności*: jeśli $f \in E$, $g \in \mathrm{Map}(I, \mathbb{R})$ i $|g| \leqslant |f|$, to $g \in E$ oraz $\|g\|_E \leqslant \|f\|_E$.

Powyższy warunek implikuje w szczególności, że jeśli istnieje funkcja $f \in E$ taka, że $f(i_0) \neq 0$ dla danego $i_0 \in I$, to $1_{\{i_0\}} \in E$. W konsekwencji bez zmniejszenia ogólności będziemy zakładać, że wszystkie funkcje $f \in \mathrm{Map}(I, \mathbb{R})$ o skończonych nośnikach $\operatorname{supp} f$ należą do E. Ponadto, zakładamy, że $\|1_{\{i\}}\|_E = 1$ dla każdego $i \in I$.

Przestrzeń bazowa E jest kratą Banacha. Przez E_0 oznaczamy domknięcie liniowej podprzestrzeni rozpiętej przez wszystkie funkcje $1_{\{i\}}$, gdzie $i \in I$. Zauważmy, że jeśli $E = E_0$, to dla każdego $x \in E$ i dla każdego $\gamma > 0$ istnieje skończony zbiór $A \subset \operatorname{supp} x$ taki, że

$\|x - 1_A x\|_E \leqslant \gamma$.

Definicja 3.1.2. Niech E będzie przestrzenią bazową nad zbiorem indeksów I. Niech ponadto $\{X_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną przestrzeni Banacha. *Sumę prostą* $Y = \left(\sum_{i\in I} X_i\right)_E$ definiujemy jako przestrzeń wszystkich funkcji

$$x = \{x(i)\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i,$$

gdzie $x(i) \in X_i$ dla każdego $i \in I$ tak, że $\lfloor x \rceil \in E$, gdzie $\lfloor x \rceil(i) = \|x(i)\|$ dla $i \in I$ (patrz [15, str. 5]). Przestrzeń Y wyposażamy w normę daną wzorem

$$\|x\| = \|\lfloor x \rceil\|_E.$$

Tak skonstruowana przestrzeń $(Y, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha.

W dowodach niektórych wyników z dalszej części pracy będzie użyteczna następująca uwaga.

Uwaga 3.1.1. Niech $Y = \left(\sum_{i\in I} X_i\right)_E$ będzie sumą prostą, a $I_0 \subset I$ będzie zbiorem skończonym. Załóżmy, że dla ciągu (x_n) w Y dla każdego $i \in I_0$ istnieje granica

$$\xi(i) = \lim_{n\to\infty} \|x_n(i)\|.$$

Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \left| \|x_n\| - \|1_{I_0}\xi + 1_{I\setminus I_0}\lfloor x_n \rceil\| \right| = 0.$$

Stąd, jeśli istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|$, to

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|1_{I_0}\xi + 1_{I\setminus I_0}\lfloor x_n \rceil\|.$$

Poniżej przedstawiamy przykłady przestrzeni bazowych E, które występują w konstrukcjach standardowych sum prostych.

Przykład 3.1.1.

1. W konstrukcji skończonej sumy prostej występuje przestrzeń $E = \mathbb{R}^n$ z normą absolutną.

2. Kolejnym przykładem przestrzeni bazowej E jest przestrzeń z bezwarunkową bazą, której bezwarunkowa stała jest równa 1. W standardowym przypadku $I = \mathbb{N}$, a wektor $x \in E$ identyfikujemy z ciągiem jego współrzędnych. W ogólnym przypadku funkcje $1_{\{i\}}$ tworzą uogólnioną (niekoniecznie przeliczalną) bezwarunkową bazę przestrzeni E_0 z bezwarunkową stałą równą 1.

3. Dla nieskończonego zbioru I i $1 \leqslant p < \infty$, $E = l^p(I)$ jest przestrzenią bazową. W tym przypadku $E = E_0$. Dla $I = \mathbb{N}$ ta przestrzeń bazowa daje standardową przeliczalną l^p-sumę prostą.

4. Dla nieskończonego zbioru I przestrzenią bazową jest także przestrzeń $E = l^\infty(I)$ wszystkich ograniczonych funkcji $f : I \to \mathbb{R}$ z normą $\|f\| = \sup_{i\in I} |f(i)|$. Wówczas $E_0 = c_0(I)$.

Twierdzenie 3.1.1 ([49]). *Jeśli przestrzeń bazowa E spełnia dolne p-oszacowanie dla pewnego $p \in (1,\infty)$, to $E = E_0$.*

Dowód. Niech $x \in E$ posiada nieskończony nośnik. Z dolnego p-oszacowania wynika, że dla każdego $\alpha > 0$ zbiór $A_\alpha = \{i \in I : |x(i)| \geqslant \alpha\}$ jest co najwyżej skończony. Rzeczywiście, jeśli założymy, że tak nie jest, wówczas możemy znaleźć $\alpha > 0$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje n-elementowy zbiór $A \subset A_\alpha$. Wówczas

$$\|x\| \geqslant \left\| \sum_{i\in A} x(i) 1_{\{i\}} \right\| \geqslant \alpha M \left(\sum_{i\in A} \|1_{\{i\}}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \alpha M n^{\frac{1}{p}},$$

co jest sprzecznością. Dlatego też zbiór $\operatorname{supp} x$ jest przeliczalny i mamy $\operatorname{supp} x = \{i_n\}$. Następnie zauważmy, że szereg $\sum_{n\in\mathbb{N}} x(i_n) 1_{\{i_n\}}$ jest zbieżny. Rzeczywiście, zakładając, że szereg nie jest zbieżny, otrzymujemy $\varepsilon > 0$ i ciąg (A_n) parami rozłącznych skończonych podzbiorów zbioru $\operatorname{supp} x$ taki, że $\|x 1_{A_n}\| \geqslant \varepsilon$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Korzystając z dolnego p-oszacowania, podobnie jak w pierwszej części dowodu, dochodzimy do sprzeczności. Oczywiście, $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x(i_n) 1_{\{i_n\}}$, co daje nam konkluzję, że $E = E_0$. □

Twierdzenie 3.1.2 ([6]). *Niech X będzie kratą Banacha. Jeśli $\varepsilon_{0,m}(X) < 1$, to X spełnia dolne q-oszacowanie dla pewnego $q \in (1,\infty)$.*

W konsekwencji otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.1.1. *Jeśli przestrzeń bazowa E jest jednostajnie monotoniczna, to $E = E_0$.*

3.2 Jednostajna wypukłość dla sum prostych

W [21] podano relację między charakterystyką wypukłości przestrzeni Banacha X, a charakterystyką wypukłości przestrzeni funkcyjnej Lebesgue'a–Bochnera $L^p(X)$. W tym rozdziale prezentujemy oszacowanie modułu wypukłości dla sumy prostej przestrzeni Banacha. Wynik ten daje nam ponadto oszacowanie charakterystyki wypukłości sumy prostej przestrzeni Banacha. W naszym dowodzie korzystamy z pewnych pomysłów z dowodu twierdzenia 9 w [21].

Twierdzenie 3.2.1 ([52]). *Niech E będzie przestrzenią bazową nad zbiorem I oraz $\{X_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną przestrzeni Banacha. Oznaczmy $Y = \left(\sum_{i\in I} X_i\right)_E$ i $\delta = \inf_{i\in I} \delta_{X_i}$, gdzie δ_{X_i} jest modułem wypukłości przestrzeni X_i. Wtedy*

$$\delta_Y(\varepsilon) \geqslant \sup_{\xi+\gamma<\varepsilon} \min\left\{\delta_E(\xi), \delta_E\left(\delta(\gamma)\frac{\varepsilon-\xi-\gamma}{2}\right) - \frac{\xi}{2}\right\}, \tag{3.1}$$

gdzie δ_Y i δ_E są modułami wypukłości przestrzeni Y i E.

Dowód. Niech $\varepsilon \in (0,2]$ oraz niech $\xi, \gamma > 0$ będą takie, że $\xi + \gamma < \varepsilon$. Wystarczy pokazać, że

$$1 - \frac{1}{2}\|x+y\|_Y \geqslant \min\left\{\delta_E(\xi), \delta_E\left(\delta(\gamma)\frac{\varepsilon-\xi-\gamma}{2}\right) - \frac{\xi}{2}\right\} \tag{3.2}$$

dla dowolnych $x, y \in Y$ spełniających warunki $\|x\|_Y = \|y\|_Y = 1$ oraz $\|x-y\|_Y \geqslant \varepsilon$. Niech $x = \{x(i)\}$ i $y = \{y(i)\}$ będą dwoma elementami sumy prostej Y takimi, że $x(i), y(i) \in X_i$ dla wszystkich $i \in I$.

Oszacowanie (3.2) jest oczywiste w przypadku, gdy $\|x+y\|_Y \leqslant 2(1-\delta_E(\xi))$. Załóżmy, że $\|x+y\|_Y > 2(1-\delta_E(\xi))$. Wtedy

$$2(1-\delta_E(\xi)) < \|x+y\|_Y \leqslant \|\lfloor x\rceil + \lfloor y\rceil\|_E,$$

co prowadzi do nierówności

$$\|\lfloor x\rceil - \lfloor y\rceil\|_E < \xi.$$

Dla dowolnego $i \in I$ połóżmy

$$z(i) = \begin{cases} \frac{\|x(i)\|_{X_i}}{\|y(i)\|_{X_i}} y(i), & \text{jeśli } y(i) \neq 0 \\ x(i), & \text{jeśli } y(i) = 0 \end{cases}$$

oraz $z = \{z(i)\}$. Mamy

$$\|z(i)\|_{X_i} = \|x(i)\|_{X_i} \tag{3.3}$$

oraz

$$\|y(i) - z(i)\|_{X_i} = |\|y(i)\|_{X_i} - \|x(i)\|_{X_i}|$$

dla każdego $i \in I$. Stąd

$$\|y - z\|_Y = \|\lfloor y \rceil - \lfloor x \rceil\|_E < \xi \tag{3.4}$$

i w konsekwencji

$$\|x - z\|_Y \geqslant \|x - y\|_Y - \|z - y\|_Y > \varepsilon - \xi. \tag{3.5}$$

Rozważmy teraz zbiór $A = \{i \in I : \|x(i) - z(i)\|_{X_i} \geqslant \gamma\|x(i)\|_{X_i}\}$ i wektory

$$u := \lfloor x \rceil - \delta(\gamma)\lfloor x \rceil 1_A \text{ oraz } v := \lfloor x \rceil$$

w przestrzeni E. Oczywiście $0 \leqslant u \leqslant v$, $\|u\|_E \leqslant 1$ oraz $\|v\|_E = 1$. Ponadto $\|x(i) + z(i)\|_{X_i} \leqslant 2(1 - \delta(\gamma))\|x(i)\|_{X_i}$ dla wszystkich $i \in A$. Korzystając z powyższego oszacowania oraz z (3.3) dostajemy

$$\|x + z\|_Y \leqslant \|2(\lfloor x \rceil - \delta(\gamma)\lfloor x \rceil 1_A)\|_E = \|2u\|_E \leqslant \|u + v\|_E.$$

W konsekwencji

$$\frac{1}{2}\|x + z\|_Y \leqslant \frac{1}{2}\|u + v\|_E \leqslant 1 - \delta_E(\|u - v\|_E) = 1 - \delta_E(\delta(\gamma)\|\lfloor x \rceil 1_A\|_E). \tag{3.6}$$

Następnie, korzystając z (3.3) i (3.5) dostajemy

$$\begin{aligned} \varepsilon - \xi < \|x - z\|_Y &= \|(x - z)1_A + (x - z)1_{A^c}\|_Y \\ &\leqslant \|(\lfloor x \rceil + \lfloor z \rceil)1_A\|_E + \gamma\|\lfloor x \rceil 1_{A^c}\|_E \\ &\leqslant 2\|\lfloor x \rceil 1_A\|_E + \gamma\|x\|_Y \leqslant 2\|\lfloor x \rceil 1_A\|_E + \gamma \end{aligned}$$

i stąd

$$\|\lfloor x \rceil 1_A\|_E \geqslant \frac{\varepsilon - \xi - \gamma}{2}.$$

Wobec (3.6) dostajemy

$$\frac{1}{2}\|x + z\|_Y \leqslant \frac{1}{2}\|u + v\|_E \leqslant 1 - \delta_E\left(\delta(\gamma)\frac{\varepsilon - \xi - \gamma}{2}\right). \tag{3.7}$$

Ostatecznie, z nierówności (3.4) i (3.7) otrzymujemy

$$\|x+y\|_Y \leqslant \|x+z\|_Y + \|y-z\|_Y \leqslant 2\left(1-\delta_E\left(\delta(\gamma)\frac{\varepsilon-\xi-\gamma}{2}\right)\right)+\xi,$$

co również daje nam oszacowanie (3.2). $\square$

Z powyższego twierdzenia wyprowadzimy wniosek, który podaje bardziej konkretne oszacowanie dla modułu wypukłości sumy prostej.

Wniosek 3.2.1 ([52])**.** *Przy oznaczeniach i założeniach twierdzenia 3.2.1 mamy*

$$\delta_Y(\varepsilon) \geqslant \delta_E^2\left(\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{6}\right) \tag{3.8}$$

dla każdego $\varepsilon \in [0,2]$*. W konsekwencji, jeśli* E *jest jednostajnie wypukła i* $\delta(\varepsilon) > 0$ *dla każdego* $\varepsilon > 0$*, to suma prosta* Y *jest jednostajnie wypukła.*

Dowód. Dla danego $\varepsilon \in [0,2]$ przyjmijmy $\gamma = \frac{\varepsilon}{2}$ i $\xi = \delta_E\left(\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{6}\right)$. Wówczas $\xi \leqslant \frac{\varepsilon}{6}$, więc

$$\delta_E\left(\delta(\gamma)\frac{\varepsilon-\xi-\gamma}{2}\right)-\frac{\xi}{2} \geqslant \delta_E\left(\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{6}\right)-\frac{\xi}{2}=\frac{\xi}{2}\geqslant \delta_E(\xi).$$

Wobec (3.1) dostajemy oszacowanie (3.8). $\square$

Wniosek 3.2.2 ([52])**.** *Przy oznaczeniach i założeniach twierdzenia 3.2.1, jeśli* E *jest jednostajnie wypukła, to*

$$\varepsilon_0(Y) \leqslant \varepsilon_0, \tag{3.9}$$

gdzie $\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon \in [0,2] : \delta(\varepsilon) = 0\}$*.*

Dowód. Załóżmy, że $\delta_Y(\varepsilon) = 0$, gdzie $\varepsilon \in (0,2]$. Weźmy $\gamma \in (0,\varepsilon)$ oraz $\xi > 0$ takie, że $\varepsilon - \xi - \gamma > 0$. Z (3.1) otrzymujemy

$$\delta_E\left(\delta(\gamma)\frac{\varepsilon-\xi-\gamma}{2}\right) \leqslant \frac{\xi}{2}.$$

Przechodząc do granicy z $\xi \to 0+$ dostajemy

$$\delta_E\left(\delta(\gamma)\frac{\varepsilon-\gamma}{2}\right) = 0$$

i w konsekwencji $\delta(\gamma) = 0$. Ponieważ $\gamma < \varepsilon$ można wziąć dowolnie bliskie ε, więc otrzymujemy oszacowanie (3.9). $\square$

W [29] Guirao i Hájek pokazali, że dla danej funkcji $f : [0,2] \to [0,1]$, spełniającej pewne szczególne warunki, możliwe jest skonstruowanie przestrzeni, której moduł wypukłości jest równoważny funkcji f. Poniższy przykład pokazuje, że dla danych $\alpha \in (0,2)$ i $\beta \in [1 - \frac{\alpha}{2}, 1]$, można skonstruować przestrzeń Y, dla której $\varepsilon_0(Y) = \alpha$ oraz $\delta_Y(2) = \beta$. Ograniczenie $\beta \geqslant 1 - \frac{\alpha}{2}$ wynika z warunku (1.2). W naszej konstrukcji korzystamy z sum prostych.

Przykład 3.2.1. Niech będą dane $\alpha \in (0,2)$ oraz $\beta \in \left(1 - \frac{\alpha}{2}, 1\right]$. Skonstruujemy przestrzeń Y, dla której $\varepsilon_0(Y) = \alpha$ oraz $\delta_Y(2) = \beta$.

W tym celu wprowadzamy następujące oznaczenia. Dla danego $p \in [1,\infty)$, symbolem $\|\cdot\|_p$ oznaczmy normę l^p w przestrzeni $\mathbb{R}^2$, tj.

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

gdzie $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Następnie, połóżmy

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Ponadto, niech Y_c będzie przestrzenią $\mathbb{R}^2$ z normą

$$\|x\| = \max\left\{\frac{1}{c}\|x\|_2, \|x\|_\infty\right\}.$$

Moduł wypukłości $\delta^{(c)}$ przestrzeni Y_c jest równy

$$\delta^{(c)}(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2\sqrt{c^2-1}, \\ \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{c^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}}\right), & \text{jeśli } 2\sqrt{c^2-1} < \varepsilon \leqslant 2. \end{cases} \tag{3.10}$$

(patrz przykład 1.1.2).

Dla danych $\alpha \in (0,2)$ oraz $\beta \in \left[1 - \frac{\alpha}{2}, 1\right]$, niech $0 < r \leqslant c$ będą takie, że $\alpha = 2\sqrt{c^2-1}$ oraz $\beta = 1 - \sqrt{r^2-1}$. Następnie, dla $p \in [1,\infty]$, niech X_p będzie przestrzenią $\mathbb{R}^2$ z normą

$$|||x|||_p = \max\left\{\frac{1}{c}\|x\|_2, \|x\|_p\right\}.$$

Zauważmy, że przestrzeń X_p jest ściśle wypukła dla wszystkich $p \in (1,\infty)$ oraz X_∞ pokrywa się z Y_c, więc $\delta_{X_\infty} = \delta^{(c)}$.

Połóżmy

$$Z_1 = \left(\sum_{p=3}^{\infty} X_p\right)_{l^2}$$

oraz

$$Z = (Y_r \oplus Z_1)_{l^2}\,.$$

Dla $p \in [3, \infty)$ nierówności

$$|||x|||_\infty \leqslant |||x|||_p \leqslant 2^{\frac{1}{p}} |||x|||_\infty$$

są spełnione dla każdego $x \in \mathbb{R}^2$. W konsekwencji $|||x|||_\infty = \lim_{p\to\infty} |||x|||_p$. Następnie,

$$\delta_{X_p}(\varepsilon) \geqslant 1 - 2^{\frac{1}{p}} \left(1 - \delta_{X_\infty}\left(\frac{\varepsilon}{2^{\frac{1}{p}}}\right)\right) \text{ oraz } \delta_{X_\infty}(\varepsilon) \geqslant 1 - 2^{\frac{1}{p}} \left(1 - \delta_{X_p}\left(\frac{\varepsilon}{2^{\frac{1}{p}}}\right)\right)$$

(patrz [28], dowód twierdzenia 6.2).

Z powyższych nierówności dostajemy

$$\overline{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2^{\frac{1}{k}}}\right) \leqslant \delta^{(c)}(\varepsilon) \leqslant \overline{\delta}(\varepsilon) \tag{3.11}$$

dla każdego $k \geqslant 3$, gdzie $\overline{\delta}(t) = \liminf_{p\to\infty} \delta_{X_p}(t)$ lub $\overline{\delta}(t) = \limsup_{p\to\infty} \delta_{X_p}(t)$.

Ponadto,

$$\delta_{X_p}(\varepsilon_1) - \delta_{X_p}(\varepsilon_2) \leqslant \frac{1}{2-d}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

dla wszystkich $0 \leqslant \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \leqslant d < 2$, co implikuje, że

$$\overline{\delta}(\varepsilon_1) - \overline{\delta}(\varepsilon_2) \leqslant \frac{1}{2-d}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Stąd $\overline{\delta}$ jest funkcją ciągłą i przechodząc do granicy z $k \to \infty$ we wzorze (3.11), otrzymujemy

$$\overline{\delta}(\varepsilon) = \lim_{p\to\infty} \delta_{X_p}(\varepsilon) = \delta_{X_\infty}(\varepsilon) = \delta^{(c)}(\varepsilon).$$

Mamy

$$\varepsilon_0(Z_1) = \sup\{\varepsilon \in [0,2] : \widehat{\delta}(\varepsilon) = 0\},$$

gdzie $\widehat{\delta}(\varepsilon) = \inf_{p\geqslant 3} \delta_{X_p}(\varepsilon)$. Nierówność $\delta_{X_p}(\varepsilon) > 0$ jest spełniona dla każdego $\varepsilon > 0$, co wraz z faktem, że istnieje granica $\overline{\delta}(\varepsilon) = \lim_{p\to\infty} \delta_{X_p}(\varepsilon)$ implikuje, że równość $\widehat{\delta}(\varepsilon) = 0$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, $\delta^{(c)}(\varepsilon) = \overline{\delta}(\varepsilon) = 0$. Stąd

$$\varepsilon_0(Z_1) = \sup\{\varepsilon \in [0,2] : \delta^{(c)}(\varepsilon) = 0\} = 2\sqrt{c^2 - 1} = \alpha.$$

Następnie

$$\varepsilon_0(Z) = \sup\{\varepsilon \in [0,2] : \delta(\varepsilon) = 0\},$$

gdzie

$$\delta(\varepsilon) = \min\left\{\delta^{(r)}(\varepsilon), \widehat{\delta}(\varepsilon)\right\}.$$

Stąd

$$\varepsilon_0(Z) = \max\{\varepsilon_0(Y_r), \varepsilon_0(Z_1)\} = \max\left\{2\sqrt{r^2-1}, \alpha\right\} = \alpha.$$

Aby pokazać, że $\delta_Z(2) = \beta$, weźmy wektory $x = (x_0, x_1)$ oraz $y = (y_0, y_1)$ z przestrzeni Z, gdzie $x_0, y_0 \in Y_r$, $x_1, y_1 \in Z_1$ takie, że $\|x\|_Z = \|y\|_Z = 1$ oraz $\|x-y\|_Z = 2$. Wówczas

$$\begin{aligned}
2 = \|x-y\|_Z &= \left(\|x_0-y_0\|_{Y_r}^2 + \|x_1-y_1\|_{Z_1}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left((\|x_0\|_{Y_r} + \|y_0\|_{Y_r})^2 + (\|x_1\|_{Z_1} + \|y_1\|_{Z_1})^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \|x\|_Z + \|y\|_Z = 2,
\end{aligned}$$

więc w powyższych nierównościach zachodzą równości. Wobec ścisłej wypukłości przestrzeni euklidesowej oraz przestrzeni Z_1 (patrz [8, str. 185]), dostajemy równości $\|x_0\|_{Y_r} = \|y_0\|_{Y_r}$, $\|x_1\|_{Z_1} = \|y_1\|_{Z_1}$ oraz $x_1 = -y_1$. Stąd $\|x_0-y_0\|_{Y_r} = 2\|x_0\|_{Y_r}$, $\|x_1+y_1\|_{Z_1} = 0$ i w konsekwencji

$$\frac{1}{2}\|x+y\|_Z = \frac{1}{2}\|x_0+y_0\|_{Y_r} \leqslant \|x_0\|_{Y_r}(1-\delta_{Y_r}(2)) \leqslant 1-\delta_{Y_r}(2).$$

To pokazuje, że

$$\delta_Z(2) \geqslant \delta_{Y_r}(2) = \delta^{(r)}(2) = \beta.$$

Nierówność przeciwna jest oczywista, więc ostatecznie otrzymujemy $\delta_Z(2) = \beta$.

3.3 Własności Opiala dla sum prostych

Przestrzeń $\mathbb{R}$ w sposób trywialny ma własność Opiala i w poniższych przykładach traktujemy przestrzenie ciągów jako sumy proste kopii przestrzeni $\mathbb{R}$.

Przykład 3.3.1.

1. Rozważmy $Y = E = l^\infty$. Wówczas $E_0 = c_0 \neq E$ i łatwo zauważyć, że $Y = l^\infty$ nie ma słabej własności Opiala.

2. Niech $Y = E = c_0$. Wówczas $E_0 = E$, ale $\delta_{m,E}(\varepsilon) = 0$ dla każdego $\epsilon \in [0,1]$. Przestrzeń $Y = c_0$ nie ma własności Opiala.

Przykłady te pokazują, że aby suma prosta miała słabą własność Opiala lub własność Opiala konieczne są dodatkowe założenia o przestrzeni bazowej E.

Twierdzenie 3.3.1 ([50])**.** *Niech E będzie przestrzenią bazową nad I taką, że $E_0 = E$ i niech $\{X_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną przestrzeni Banacha. Oznaczmy*

$$Y = \left(\sum_{i\in I} X_i\right)_E .$$

1) Jeśli wszystkie przestrzenie X_i mają słaba własność Opiala, to Y ma słabą własność Opiala.

2) Jeśli krata E jest jednostajnie monotoniczna oraz wszystkie przestrzenie X_i mają własność Opiala, to Y ma własność Opiala.

Dowód. Niech (x_n) będzie ciągiem słabo zbieżnym do zera w Y oraz niech $x \in Y$. Z równości $E = E_0$ dostajemy, że dla każdego $\gamma > 0$ istnieje skończony zbiór $I_0 \subset \operatorname{supp} x$ taki, że

$$\|x - 1_{I_0}x\| \leqslant \gamma.$$

Przechodząc do podciągów możemy założyć, że dla każdego $i \in I_0$ istnieją następujące granice:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|, \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|,$$

oraz

$$\xi(i) = \lim_{n\to\infty} \|x_n(i)\|, \quad \zeta(i) = \lim_{n\to\infty} \|x_n(i) - x(i)\|.$$

Z założenia, że wszystkie przestrzenie X_i mają słabą własność Opiala wynika, że nierówność $\xi(i) \leqslant \zeta(i)$ zachodzi dla każdego $i \in I_0$. W konsekwencji nierówność

$$u_n = 1_{I_0}\xi + 1_{I\setminus I_0}\lfloor x_n \rceil \leqslant v_n = 1_{I_0}\zeta + 1_{I\setminus I_0}\lfloor x_n \rceil$$

jest spełniona w E. Korzystając z uwagi 3.1.1 dostajemy

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_E \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|v_n\|_E \\ = \limsup_{n\to\infty} \|x_n - 1_{I_0}x\| \\ \leqslant \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| + \|x - 1_{I_0}x\| \\ \leqslant \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| + \gamma.\end{aligned}$$

Przechodząc do granicy z $\gamma \to 0$, otrzymujemy konkluzję części 1) twierdzenia.

W celu udowodnienia części 2) załóżmy, że krata E jest jednostajnie monotoniczna oraz, że wszystkie przestrzenie X_i mają własność Opiala. Niech (x_n) będzie ciągiem słabo zbieżnym do zera w Y oraz niech $x \in Y \setminus \{0\}$. Połóżmy $M = \|x\| + 2\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ i ustalmy indeks $i_0 \in \operatorname{supp} x$. Wtedy $x(i_0) \neq 0$. Dla każdego $\gamma > 0$ istnieje skończony zbiór $J_0 \subset \operatorname{supp} x$ taki, że $\|x - 1_{J_0}x\| \leqslant \gamma$. Oczywiście, mamy również $\|x - 1_{I_0}x\| \leqslant \gamma$, gdzie $I_0 = J_0 \cup \{i_0\}$.

W dalszej części dowodu skorzystamy z oznaczeń i założeń wprowadzonych w pierwszej części dowodu. Z faktu, że $(x_n(i))$ jest ciągiem słabo zbieżnym do zera w X_i dostajemy, że nierówność $\zeta(i) \geqslant \|x(i)\|$ zachodzi dla każdego $i \in I_0$ i stąd

$$\|v_n\|_E \geqslant \|1_{I_0}\zeta\|_E \geqslant \|1_{I_0}x\| \geqslant \|x(i_0)\| > 0.$$

Z drugiej strony

$$\|v_n\|_E \leqslant \|1_{I_0}\zeta\|_E + \sup_{n\in\mathbb{N}} \|1_{I\setminus I_0}x_n\| \leqslant M.$$

Korzystając z (2.8) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|u_n\|_E &\leqslant \|v_n\|_E - \delta_{m,E}\left(\frac{\|v_n - u_n\|_E}{\|v_n\|_E}\right)\|v_n\|_E \\ &\leqslant \|v_n\|_E - \delta_{m,E}\left(\frac{\|1_{I_0}(\zeta - \xi)\|_E}{M}\right)\|x(i_0)\| \leqslant \|v_n\|_E - c,\end{aligned}$$

gdzie $c = \delta_{m,E}\left(\frac{\zeta(i_0)-\xi(i_0)}{M}\right)\|x(i_0)\|$. Zauważmy, że z założenia $X_{\{i_0\}}$ ma własność Opiala, więc $\zeta(i_0) > \xi(i_0)$, i w konsekwencji $c > 0$. Korzystając z uwagi 3.1.1 otrzymujemy

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|u_n\|_E &\leqslant \limsup_{n\to\infty}\|v_n\|_E - c \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| + \|x - 1_{I_0}x\| - c \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| + \gamma - c.\end{aligned}$$

Ostatecznie, przechodząc do granicy z $\gamma \to 0$, dostajemy

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\| \leqslant \lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| - c < \lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|,$$

co daje nam konkluzję części 2). □

Zajmiemy się teraz problemem, jakie założenia gwarantują jednostajną własność Opiala dla sum prostych.

Przykład 3.3.2. Niech $Y = (\mathbb{R} \oplus l^2)_E$, gdzie E jest przestrzenią $\mathbb{R}^2$ z normą maksimum. Przestrzenie $\mathbb{R}$, l^2 oraz E mają jednostajną własność Opiala, ale rozważając wektory $x = (1,0)$ i $x_n = (0, e_n)$, gdzie (e_n) jest standardową bazą przestrzeni l^2, widzimy, że przestrzeń Y nie ma jednostajnej własności Opiala.

Powyższy przykład pokazuje, że w celu uzyskania jednostajnej własności Opiala dla sumy prostej niezbędne jest nałożenie silniejszego założenia na przestrzeń E. Będziemy zakładać, że E jednostajnie monotoniczna, a kolejne twierdzenie pokazuje, że własność jednostajnej monotoniczności jest silniejsza niż jednostajna własność Opiala. Dowód tego twierdzenia pomijamy, ponieważ jest analogiczny do dowodu twierdzenia 3.4.1.

Twierdzenie 3.3.2 ([49]). *Niech E będzie przestrzenią bazową nad I taką, że $E_0 = E$. Wtedy nierówność $\sigma_E(\varepsilon) \leqslant r_E(\varepsilon)$ zachodzi dla każdego $\varepsilon \geqslant 0$. W konsekwencji jeśli E jest jednostajnie monotoniczna, to ma jednostajną własność Opiala.*

W dowodzie naszego wyniku dotyczącego jednostajnej własności Opiala dla sum prostych skorzystamy z poniższego lematu, który jest niewielką modyfikacją lematu 3 z [39].

Lemat 3.3.1. *Niech E będzie przestrzenią bazową nad I. Niech $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie nieujemną ograniczoną funkcją zerującą się tylko w 0. Jeśli $f \in B(E)$ i $g : I \to [0,1]$ są takie, że $\|gf\| \geqslant \varepsilon$, to $(h \circ g)f \in E$ oraz $\|(h \circ g)f\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} h\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$.*

Następne twierdzenie dotyczy jednostajnej własności Opiala dla sumy prostej, ale podaje także oszacowanie modułu s_Y (patrz definicja 1.3.5) dla sumy prostej Y.

Twierdzenie 3.3.3 ([49]). *Niech E będzie przestrzenią bazową nad I oraz niech $\{X_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną przestrzeni Banacha. Oznaczamy $Y = (\sum_{i\in I} X_i)_E$. Jeśli E jest jednostajnie monotoniczna oraz $s(c) = \inf_{i\in I} s_{X_i}(c) > 0$ dla każdego $c \in (0,1]$, to*

$$s_Y(c) \geqslant \delta_{m,E}\left(\frac{c}{2} s\left(\frac{c}{2}\right)\right) > 0$$

dla każdego $c \in (0,1]$. W konsekwencji przestrzeń Y ma jednostajną własność Opiala.

Dowód. Rozważmy ciąg (y_n) w Y słabo zbieżny do $y \in Y$, dla którego $\liminf_{n\to\infty} \|y_n\| \leqslant 1$ i $\|y\| \geqslant c > 0$. Z wniosku 3.1.1 wynika, że $E_0 = E$, więc dla dowolnego $\varepsilon \in (0,c)$ istnieje skończony zbiór $I_0 \subset \operatorname{supp} y$ taki, że $\|y - y1_{I_0}\| \leqslant \varepsilon$. Możemy założyć, że istnieją następujące granice:

$$f(i) = \lim_{n\to\infty} \|y_n(i)\| \text{ oraz } d(i) = \lim_{n\to\infty} \|y_n(i) - y(i)\|$$

dla każdego $i \in I_0$.

Zauważmy, że $(y_n(i))$ jest słabo zbieżny do $y(i)$ w X_i, więc $f(i) \geqslant \|y(i)\|$. Stąd $g(i) = \frac{\|y(i)\|}{f(i)} \in (0,1]$ dla $i \in I_0$. Ponadto przyjmujemy $f(i) = d(i) = g(i) = 0$ dla $i \in I \setminus I_0$. Mamy

$$d(i) = f(i) \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{y_n(i)}{f(i)} - \frac{y(i)}{f(i)} \right\| \leqslant f(i)(1 - s_{X_i}(g(i))) \leqslant f(i) - s(g(i))f(i)$$

dla każdego $i \in I_0$. Niech $h_n = f1_{I_0} + \lfloor y_n \rceil 1_{I\setminus I_0}$. Korzystając z powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \|y_n - y\| &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \|(y_n - y)1_{I_0} + y_n 1_{I\setminus I_0}\| + \varepsilon \\
&= \liminf_{n\to\infty} \|d1_{I_0} + \lfloor y_n \rceil 1_{I\setminus I_0}\|_E + \varepsilon \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty} \|h_n - (s\circ g)f1_{I_0}\|_E + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Oczywiście

$$\liminf_{n\to\infty} \|h_n\|_E = \liminf_{n\to\infty} \|y_n\| \leqslant 1$$

i $0 \leqslant (s\circ g)f1_{I_0} \leqslant h_n$ w kracie E. Ponadto, $\|gf\|_E = \|y1_{I_0}\| \geqslant c - \varepsilon$, więc korzystając z lematu 3.3.1 dla $h = s$ dostajemy

$$\|(s\circ g)f1_{I_0}\|_E = \|(s\circ g)f\|_E \geqslant \eta_\varepsilon,$$

gdzie $\eta_\varepsilon = \frac{c-\varepsilon}{2} s\left(\frac{c-\varepsilon}{2}\right)$.

Wybierzmy podciąg (h_{n_k}) spełniający warunek $\|h_{n_k}\|_E \leqslant 1 + \varepsilon$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Z definicji modułu monotoniczności $\delta_{m,E}$ mamy

$$\|h_{n_k} - (s\circ g)f1_{I_0}\|_E \leqslant (1+\varepsilon)\left(1 - \delta_{m,E}\left(\frac{\eta_\varepsilon}{(1+\varepsilon)}\right)\right).$$

W konsekwencji

$$\liminf_{n\to\infty} \|y_n - y\| \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|h_{n_k} - (s\circ g)f1_{I_0}\|_E + \varepsilon \leqslant (1+\varepsilon)\left(1 - \delta_{m,E}\left(\frac{\eta_\varepsilon}{(1+\varepsilon)}\right)\right) + \varepsilon.$$

Moduł $\delta_{m,E}$ jest ciągły w przedziale $[0,1)$ i z twierdzenia 1.3.3 wynika, że również funkcja s jest ciągła w przedziale $[0,1)$. Stąd możemy przejść do granicy z $\varepsilon \to 0$ dostając

$$\liminf_{n\to\infty} \|y_n - y\| \leqslant 1 - \delta_{m,E}\left(\frac{c}{2}s\left(\frac{c}{2}\right)\right),$$

co kończy dowód naszego twierdzenia. $\square$

3.4 Współczynnik Garcíi-Falseta dla sum prostych

Przypomnijmy, że współczynnik Garcíi-Falseta jest definiowany wzorem

$$R(X) = \sup\{\liminf_{n\to\infty} \|x + x_n\|\},$$

gdzie supremum jest brane po wszystkich $x \in B(X)$ i po wszystkich ciągach (x_n) słabo zbieżnych do 0 w $B(X)$ (patrz rozdział 1.4). Wartość współczynnika $R(X)$ może wzrosnąć przy przejściu do sumy prostej, co ilustruje poniższy przykład.

Przykład 3.4.1. Niech E będzie przestrzenią $\mathbb{R}^2$ z normą

$$\|x\| = |x_1| + |x_2|,$$

gdzie $x = (x_1, x_2)$ oraz niech

$$Y = (\mathbb{R} \oplus c_0)_E.$$

Dla wszystkich przestrzeni występujących w tej sumie prostej, tj. dla $\mathbb{R}$, c_0 oraz E wartość współczynnika $R(X)$ jest równa 1. Jednakże, rozważając element $x = (1,0)$ oraz ciąg $x_n = (0, e_n)$, gdzie (e_n) jest standardową bazą przestrzeni c_0, dostajemy, że $R(Y) = 2$.

Powyższy przykład pokazuje, że w celu uzyskania warunku $R(Y) < 2$ dla sumy prostej, musimy nałożyć silniejsze założenie na przestrzeń E. Okazuje się, że wystarczy założyć, że $\alpha(E) < 2$, gdzie $\alpha(E)$ kątem Riesza kraty E (patrz definicja 2.2.6).

Twierdzenie 3.4.1 ([49]). *Niech E będzie przestrzenią bazową nad I taką, że $E_0 = E$. Wtedy $R(E) \leqslant \alpha(E)$ i w konsekwencji jeśli $\alpha(E) < 2$, to $R(E) < 2$.*

Dowód. Niech $x \in B(E)$ i (x_n) będzie ciągiem w $B(E)$ słabo zbieżnym do zera. Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony zbiór $I_0 \subset \operatorname{supp} x$ taki, że $\|x - x1_{I_0}\| \leqslant \varepsilon$. Ciąg (x_n) jest słabo zbieżny do 0, więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\|x_n 1_{I_0}\| \leqslant \varepsilon$ dla każdego $n \geqslant n_0$. Stąd $x1_{I_0}$ oraz $x_n 1_{I \setminus I_0}$ są rozłącznymi wektorami w $(1+\varepsilon)B(E)$, więc

$$\|x + x_n\| \leqslant \|x1_{I_0} + x_n 1_{I\setminus I_0}\| + 2\varepsilon \leqslant (1+\varepsilon)\alpha(E) + 2\varepsilon.$$

Biorąc granicę dolną względem n i przechodząc do granicy z $\varepsilon \to 0$, otrzymujemy

$$\liminf_{n\to\infty} \|x + x_n\| \leqslant \alpha(E).$$

Powyższy rezultat daje nam konkluzję twierdzenia. □

W dowodzie naszych wyników dotyczących wartości współczynnika $R(Y)$ dla sum prostych korzystamy z idei przedstawionej w [7]. W szczególności, stosujemy poniższy lemat.

Lemat 3.4.1 ([47])**.** *Dla dowolnych niezerowych elementów x, y przestrzeni Banacha X mamy*

$$\|x + y\| + \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \min\{\|x\|, \|y\|\} \leqslant \|x\| + \|y\|. \tag{3.12}$$

W kolejnym twierdzeniu podajemy oszacowanie współczynnika Garcíi-Falseta dla sum prostych.

Twierdzenie 3.4.2 ([49])**.** *Niech E będzie przestrzenią bazową nad I taką, że $E_0 = E$ i niech $\{X_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną przestrzeni Banacha. Oznaczamy $Y = (\sum_{i\in I} X_i)_E$. Jeśli kąt Riesza $\alpha(E)$ kraty E spełnia warunek $\alpha(E) < 2$ oraz $R = \sup_{i\in I} R(X_i) < 2$, to*

$$R(Y) \leqslant R(2 - \alpha(E)) + 2(\alpha(E) - 1) < 2.$$

Dowód. Niech $x \in B(Y)$ oraz niech (x_n) będzie ciągiem w $B(Y)$ słabo zbieżnym do zera. Dla danego $\varepsilon \in (0, 2 - R)$ istnieje skończony zbiór $I_0 \subset \operatorname{supp} x$ taki, że $\|x - x1_{I_0}\| \leqslant \varepsilon$. Możemy założyć, że dla każdego $i \in I_0$ istnieje granica

$$r_i = \lim_{n\to\infty} \|x_n(i)\|.$$

Oznaczamy $I_1 = \{i \in I_0 : r_i > 0\}$. Możemy założyć, że $\|x_n(i)\| > 0$ oraz, że nierówność

$$\left\|\frac{x(i)}{\|x(i)\|} + \frac{x_n(i)}{\|x_n(i)\|}\right\| \leqslant R + \varepsilon$$

jest spełniona dla każdego $i \in I_1$ oraz dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Dla $i \in I_0 \setminus I_1$ mamy $r_i = 0$, więc możemy założyć, że $\|x_n 1_{I_0 \setminus I_1}\| \leqslant \varepsilon$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. W konsekwencji otrzymujemy

$$\|x + x_n\| \leqslant \|x 1_{I_0} + x_n\| + \varepsilon \leqslant \|y_n\| + 2\varepsilon, \tag{3.13}$$

gdzie $y_n = (x + x_n)1_{I_1} + x 1_{I_0 \setminus I_1} + x_n 1_{I \setminus I_0}$.

Niech teraz $\lambda_\varepsilon = R + \varepsilon - 1$. Wtedy $\lambda_\varepsilon \in (0,1)$ i dla danego $i \in I_1$, z (3.12) otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned}\|y_n(i)\| &= \|x(i) + x_n(i)\| \\ &\leqslant \|x(i)\| + \|x_n(i)\| + (R + \varepsilon - 2)\min\{\|x(i)\|, \|x_n(i)\|\} \\ &= (1 - \lambda_\varepsilon)\max\{\|x(i)\|, \|x_n(i)\|\} + \lambda_\varepsilon(\|x(i)\| + \|x_n(i)\|).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Jeśli $i \in I \setminus I_1$, to $y_n(i) = x(i)$ lub $y_n(i) = x_n(i)$, co daje nam

$$\begin{aligned}\|y_n(i)\| &\leqslant \max\{\|x(i)\|, \|x_n(i)\|\} \\ &\leqslant (1 - \lambda_\varepsilon)\max\{\|x(i)\|, \|x_n(i)\|\} + \lambda_\varepsilon(\|x(i)\| + \|x_n(i)\|).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Z (3.13), (3.14) i (3.15) dostajemy

$$\begin{aligned}\|x + x_n\| &\leqslant \|y_n\| + 2\varepsilon \\ &\leqslant (1 - \lambda_\varepsilon)\|\lfloor x \rceil \vee \lfloor x_n \rceil\|_E + \lambda_\varepsilon \|\lfloor x \rceil + \lfloor x_n \rceil\|_E + 2\varepsilon \\ &\leqslant (1 - \lambda_\varepsilon)\alpha(E) + 2\lambda_\varepsilon + 2\varepsilon\end{aligned}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Biorąc granicę dolną względem n i przechodząc do granicy z $\varepsilon \to 0$, ostatecznie otrzymujemy

$$\liminf_{n \to \infty} \|x + x_n\| \leqslant (2 - R)\alpha(E) + 2(R - 1),$$

co daje konkluzję naszego twierdzenia. □

Założenie, że $E_0 = E$ jest niezbędne w twierdzeniu 3.4.2. Rzeczywiście, dla przestrzeni l^∞ mamy $R(l^\infty) = 2$, a przestrzeń l^∞ można uważać za sumę prostą przeliczalnie wielu kopii przestrzeni $\mathbb{R}$. W tym przypadku $X_i = \mathbb{R}$, więc $R(X_i) = 1$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$, natomiast $E = l^\infty$, więc $\alpha(E) = 1$. Założenie $E_0 = E$ nie jest w tym przypadku spełnione, ponieważ $E_0 = c_0$.

Rozdział 4

Przestrzenie interpolacyjne

Teoria przestrzeni interpolacyjnych jest gałęzią analizy funkcjonalnej, która znalazła zastosowanie w innych obszarach analizy, w szczególności w teorii równań różniczkowych cząstkowych, w teorii aproksymacji oraz w analizie numerycznej.

W tym rozdziale prezentujemy wyniki dotyczące jednostajnej wypukłości i własności Opiala w przestrzeni interpolacyjnej skonstruowanej za pomocą ogólnej, dyskretnej metody interpolacji, bazującej na abstrakcyjnej przestrzeni z bazą bezwarunkową.

4.1 Podstawowe pojęcia i własności

Definicja 4.1.1. Niech X_0 oraz X_1 będą przestrzeniami Banacha. Parę $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ nazywamy *parą interpolacyjną*, jeśli przestrzenie X_0 i X_1 są w sposób liniowy i ciągły zanurzone w przestrzeń liniowo-topologiczną V.

Niech $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ będzie parą interpolacyjną. Sumę X_0+X_1 definiujemy jako przestrzeń $X_0 + X_1 = \{x \in V : x = x^0 + x^1,\ x^0 \in X_0,\ x^1 \in X_1\}$ z normą

$$\|x\|_{X_0+X_1} = \inf\{\|x^0\|_{X_0} + \|x^1\|_{X_1} : x = x^0 + x^1, x^0 \in X_0, x^1 \in X_1\}. \tag{4.1}$$

Część wspólną $X_0 \cap X_1$ rozważamy z normą

$$\|x\|_{X_0\cap X_1} = \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}.$$

Zarówno $X_0 + X_1$, jak i $X_0 \cap X_1$ są przestrzeniami Banacha. Ponadto $X_0 \cap X_1 \subset X_0$, $X_1 \subset X_0 + X_1$, gdzie inkluzje należy rozumieć jako liniowe i ciągłe zanurzenia. Możemy zatem zastąpić wyjściową przestrzeń liniowo-topologiczną V przez sumę $X_0 + X_1$.

Dla danej pary interpolacyjnej $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$, J. Peetre wprowadził k-funkcjonał $k(t, x, \boldsymbol{X})$ zdefiniowany dla wszystkich $x \in X_0 + X_1$ i dla wszystkich $t > 0$ w następujący sposób:

$$k(t, x, \boldsymbol{X}) = \inf\{\|x^0\|_{X_0} + t\|x^1\|_{X_1} : x = x^0 + x^1, x^0 \in X_0, x^1 \in X_1\}.$$

Dla każdego $x \in X_0 + X_1$, funkcja $k(\cdot, x, \boldsymbol{X})$ jest wklęsła i dla każdego ustalonego $t > 0$, k-funkcjonał $k(t, \cdot, \boldsymbol{X})$ jest normą na przestrzeni $X_0 + X_1$, równoważną normie (4.1). Dokładniej

$$\min(1, t)\|x\|_{X_0+X_1} \leqslant k(t, x, \boldsymbol{X}) \leqslant \max(1, t)\|x\|_{X_0+X_1}$$

dla wszystkich $t > 0$ i dla wszystkich $x \in X_0 + X_1$.

W dalszej części pracy będziemy rozważać $X_0 + X_1$ z normą

$$\|x\|_p = k_p(x, a, b) = \inf\left\{\left(a^p\|x^0\|_{X_0}^p + b^p\|x^1\|_{X_1}^p\right)^{\frac{1}{p}} : x = x^0 + x^1, x^0 \in X_0,\ x^1 \in X_1\right\}, \quad (4.2)$$

gdzie $p \in [1, \infty)$ oraz $a, b > 0$. Oczywiście, norma ta jest równoważna standardowej normie (4.1). Przestrzeń $X_0 + X_1$ z normą (4.2) oznaczamy symbolem $\Sigma_p(\boldsymbol{X}, a, b)$. Tego typu uogólnienie definicji funkcjonału $k(t, x, \boldsymbol{X})$ było rozpatrywane np. w [32] i [44, str. 220].

Definicja 4.1.2. Mówimy, że para interpolacyjna $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ jest *p-dokładna*, jeśli infimum w (4.2) jest osiągnięte, tj. dla każdego $x \in X_0 + X_1$ istnieją $x^0 \in X_0$ oraz $x^1 \in X_1$ takie, że

$$\|x\|_p = \left(a^p\|x^0\|_{X_0}^p + b^p\|x^1\|_{X_1}^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.3)$$

Załóżmy, że τ jest topologią dopuszczalną w $\Sigma_p(\boldsymbol{X}, a, b)$. Mówimy, że para interpolacyjna $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ jest *τ-domknięta*, jeśli kule jednostkowe przestrzeni X_0 i X_1 są ciągowo τ-domknięte w $\Sigma_p(\boldsymbol{X}, a, b)$ oraz przynajmniej jedna z nich jest ciągowo τ-zwarta. Następujące twierdzenie podaje warunki dostateczne dla tego, aby para $\boldsymbol{X}$ była p-dokładna. Pierwsza część tego wyniku została wykazana w [17]. Druga część może zostać udowodniona w podobny sposób.

Twierdzenie 4.1.1. *Niech $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ będzie parą interpolacyjną oraz niech $p \in [1, \infty)$. Jeśli $\boldsymbol{X}$ jest τ-domknięta lub obie przestrzenie X_0, X_1 są refleksywne, to para $\boldsymbol{X}$ jest p-dokładna.*

W naszych wynikach korzystamy z metody interpolacyjnej opartej na przestrzeniach z bazami bezwarunkowymi. W dalszej części pracy będziemy rozważać bazy, dla których zbiorem indeksów jest zbiór liczb całkowitych.

Niech $p \in [1, \infty)$ oraz niech $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ będzie parą interpolacyjną. Niech E będzie przestrzenią Banacha ze znormalizowaną, bezwarunkową bazą $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, której bezwarunkowa stała jest równa 1. Załóżmy, że $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ oraz $(b_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ są ciągami liczb dodatnich, dla których $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \min\{a_i, b_i\} < \infty$.

Definicja 4.1.3. *Przestrzeń interpolacyjną* $K_p(\boldsymbol{X}, E, (a_i), (b_i))$ definiujemy jako przestrzeń wszystkich elementów $x \in X_0 + X_1$ takich, że szereg $\sum_{i\in\mathbb{Z}} k_p(x, a_i, b_i)\, e_i$ jest zbieżny w E. Przestrzeń $K_p(\boldsymbol{X}, E, (a_i), (b_i))$ rozważamy z normą

$$\|x\| = \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} k_p(x, a_i, b_i) e_i \right\|_E . \tag{4.4}$$

Dla normy (4.4) mamy także wzór

$$\|x\| = \inf \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(a_i^p \|x^0(i)\|_{X_0}^p + b_i^p \|x^1(i)\|_{X_1}^p \right)^{\frac{1}{p}} e_i \right\|_E , \tag{4.5}$$

gdzie infimum jest brane po wszystkich rozkładach $x = x^0(i) + x^1(i)$, gdzie $x^0(i) \in X_0$, $x^1(i) \in X_1$ dla każdego $i \in \mathbb{Z}$ takich, że szereg

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(a_i^p \|x^0(i)\|_{X_0}^p + b_i^p \|x^1(i)\|_{X_1}^p \right)^{\frac{1}{p}} e_i$$

jest zbieżny w E.

Przestrzeń $K_p(\boldsymbol{X}, E, (a_i), (b_i))$ z normą daną wzorem (4.4) jest przestrzenią Banacha. Rzeczywiście, przestrzenie $\Sigma_p(\boldsymbol{X}, a, b)$ są przestrzeniami Banacha, zaś przestrzeń interpolacyjna $K_p(\boldsymbol{X}, E, (a_i), (b_i))$ jest sumą prostą takich przestrzeni.

Mamy

$$2^{-\frac{1}{q}} \min\{a_1, b_1\} \|x\|_{X_0+X_1} \leqslant \|x\|$$

dla każdego $x \in K_p(\boldsymbol{X}, E, (a_i), (b_i))$, gdzie $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Ponadto

$$\|x\| \leqslant \sum_{i\in\mathbb{Z}} \min\{a_i, b_i\} \|x\|_{X_0\cap X_1}$$

dla dowolnego $x \in X_0 \cap X_1$. Nierówności te pokazują, że następujące zanurzenia

$$X_0 \cap X_1 \subset K_p(\boldsymbol{X}, E, (a_i), (b_i)) \subset X_0 + X_1$$

są ciągłe.

Uzasadnieniem dla nazywania $K_p(\boldsymbol{X}, E, (a_i), (b_i))$ przestrzenią interpolacyjną jest twierdzenie o interpolacji operatorów. Niech $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ oraz $\boldsymbol{Y} = (Y_0, Y_1)$ będą dwiema parami interpolacyjnymi i $T : X_0 + X_1 \to Y_0 + Y_1$ będzie odwzorowaniem liniowym, które działa z X_0 do Y_0 jako operator ograniczony o normie $\|T\|_0$ i z X_1 do Y_1 jako operator ograniczony o normie $\|T\|_1$. Wtedy operator T odwzorowuje przestrzeń $K_p(\boldsymbol{X}, E, (a_i), (b_i))$ w przestrzeń $K_p(\boldsymbol{Y}, E, (a_i), (b_i))$ i jego norma na tych przestrzeniach nie przekracza $\max\{\|T\|_0, \|T\|_1\}$ (patrz [44, str. 219]).

W szczególnym przypadku, gdy $a_i = e^{\theta i}$ oraz $b_i = e^{(\theta-1)i}$ dla wszystkich $i \in \mathbb{Z}$, gdzie $\theta \in (0,1)$, przestrzeń interpolacyjną $K_p(\boldsymbol{X}, E, (e^{\theta i}), (e^{(\theta-1)i}))$ oznaczamy przez $K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$, a jej normę daną wzorem (4.4) przez $\|\cdot\|_{p,\theta}$.

W dalszej części pracy będziemy rozpatrywać bazy $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ przestrzeni E, które spełniają dodatkowe założenie: istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$\left\|\sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i e_{i+k}\right\|_E \leqslant M \left\|\sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i e_i\right\|_E \tag{4.6}$$

dla każdego $k \in \mathbb{Z}$. W szczególności bazy symetryczne spełniają warunek (4.6). Przykładem takiej bazy jest standardowa baza przestrzeni $l^p(\mathbb{Z})$. Kolejnymi przykładami są standardowe bazy ciągowych przestrzeni Orlicza i ciągowych przestrzeni Lorentza (patrz [43], str. 115).

W dowodach dalszych wyników korzystamy z następującego twierdzenia. Jego dowód opiera się na metodzie dowodu lematu 2.g.13 z [44].

Twierdzenie 4.1.2 ([51])**.** *Niech $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ będzie parą interpolacyjną oraz $\theta \in (0,1)$, $p \in [1, \infty)$. Następnie, niech E będzie przestrzenią Banacha ze znormalizowaną bazą bezwarunkową $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ze stałą bezwarunkową 1, która spełnia warunek (4.6). Wówczas nierówność*

$$\|x\|_{p,\theta} \leqslant C \left\|\sum_{i\in\mathbb{Z}} e^{\theta i} \|x^0(i)\|_{X_0} e_i\right\|_E^{1-\theta} \left\|\sum_{i\in\mathbb{Z}} e^{(\theta-1)i} \|x^1(i)\|_{X_1} e_i\right\|_E^{\theta}, \tag{4.7}$$

gdzie $C = \left(1 + e^{1-\theta}\right) M$, zachodzi dla każdego $x \in K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$ i każdego rozkładu $x = x^0(i) + x^1(i)$, gdzie $x^0(i) \in X_0$, $x^1(i) \in X_1$, $i \in \mathbb{Z}$ takiego, że szeregi po prawej stronie nierówności są zbieżne.

Dowód. Niech $x \in K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$ oraz niech $x = x^0(i) + x^1(i)$ będzie rozkładem spełniającym warunki powyższego twierdzenia. Połóżmy

$$A_0 = \left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} e^{\theta i} \|x^0(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E \quad \text{oraz } A_1 = \left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} e^{(\theta-1)i} \|x^1(i)\|_{X_1} e_i \right\|_E .$$

Jeśli $A_0 = 0$, to $x^0(i) = 0$ dla każdego i, więc $x = x^1(i)$ dla wszystkich i, co wobec naszego założenia implikuje, że $x = 0$. Oczywiście w tym przypadku nierówność (4.7) jest spełniona. Możemy więc założyć, że $A_0 > 0$ i podobnie $A_1 > 0$.

Wybieramy $k \in \mathbb{Z}$ takie, że

$$e^k \leqslant \frac{A_1}{A_0} < e^{k+1}.$$

Dla każdego $i \in \mathbb{Z}$ mamy rozkład $x = x^0(i-k) + x^1(i-k)$, więc

$$\begin{aligned}
\|x\|_{p,\theta} &\leqslant \left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(e^{\theta i p} \|x^0(i-k)\|_{X_0}^p + e^{(\theta-1)ip} \|x^1(i-k)\|_{X_1}^p \right)^{\frac{1}{p}} e_i \right\|_E \\
&\leqslant \left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} e^{\theta i} \|x^0(i-k)\|_{X_0} e_i \right\|_E + \left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} e^{(\theta-1)i} \|x^1(i-k)\|_{X_1} e_i \right\|_E \\
&= \left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} e^{\theta(i+k)} \|x^0(i)\|_{X_0} e_{i+k} \right\|_E + \left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} e^{(\theta-1)(i+k)} \|x^1(i)\|_{X_1} e_{i+k} \right\|_E \\
&\leqslant M(e^{\theta k} A_0 + e^{(\theta-1)k} A_1) \leqslant C A_0^{1-\theta} A_1^{\theta}.
\end{aligned}$$

□

4.2 Jednostajna wypukłość w przestrzeniach interpolacyjnych

Podstawowy wynik dotyczący jednostajnej wypukłości w przestrzeniach interpolacyjnych został wykazany przez Beauzamy'ego w [2] (patrz również twierdzenie 2.g.21 w [44]). Twierdzenie Beauzamy'ego dotyczy metody interpolacji rzeczywistej wprowadzonej przez Lionsa i Peetrego w [45]. Dla zespolonej metody interpolacji twierdzenie o jednostajnej wypukłości zostało wykazane przez Cwikela i Reisnera w [12].

W [14] inna, dyskretna metoda interpolacji posłużyła do znalezienia faktoryzacji operatorów słabo zwartych przez przestrzenie refleksywne. Korzystając z tej metody Davis [13] udowodnił, że każda jednostajnie wypukła przestrzeń z bazą bezwarunkową jest izomorficzna z dopełnialną podprzestrzenią jednostajnie wypukłej przestrzeni z bazą symetryczną (patrz również twierdzenie 3.b.2 w [43]).

Przestrzeń $\Sigma_p(\boldsymbol{X}, a, b)$ możemy rozpatrywać jako przestrzeń ilorazową sumy prostej $(Y_0 \oplus Y_1)_E$, gdzie E jest płaszczyzną $\mathbb{R}^2$ z l^p-normą, zaś Y_0, Y_1 są izometryczne odpowiednio z X_0 i X_1. Jeśli obie przestrzenie X_0 i X_1 są jednostajnie wypukłe, to $\Sigma_p(\boldsymbol{X}, a, b)$ jest jednostajnie wypukła i moduł wypukłości tej przestrzeni nie zależy od współczynników a, b. Z faktu, że przestrzeń interpolacyjna $K_p(\boldsymbol{X}, E, (a_i), (b_i))$ jest sumą prostą przestrzeni $\Sigma_p(\boldsymbol{X}, a_i, b_i)$ wynika, że $K_p(\boldsymbol{X}, E, (a_i), (b_i))$ jest jednostajnie wypukła.

Podamy twierdzenie o jednostajnej wypukłości przestrzeni interpolacyjnej $K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$, które pokazuje, że jeżeli jedna z przestrzeni w parze interpolacyjnej $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ jest jednostajnie wypukła, to przestrzeń interpolacyjna $K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$ jest również jednostajnie wypukła. W dowodzie korzystamy z idei z [40].

Twierdzenie 4.2.1 ([52]). *Niech $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ będzie parą interpolacyjną, dla której co najmniej jedna z przestrzeni X_0, X_1 jest jednostajnie wypukła. Załóżmy ponadto, że E jest jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha ze znormalizowaną bazą bezwarunkową $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ze stałą bezwarunkową 1, spełniającą warunek* (4.6)*. Wówczas przestrzeń $K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$ jest jednostajnie wypukła.*

Dowód. Załóżmy, że przestrzeń X_0 jest jednostajnie wypukła. Dla $i \in \mathbb{Z}$, przez $X_0(i)$ oznaczamy przestrzeń X_0 wyposażoną w normę

$$\|u\| = e^{i\theta}\|u\|_{X_0},$$

gdzie $u \in X_0$. Oczywiście, $X_0(i)$ jest izometryczna z X_0 i w szczególności $X_0(i)$ jest jednostajnie wypukła, a jej moduł wypukłości jest równy δ_{X_0}. Rozważmy sumę prostą

$$Z = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} (X_0(i) \oplus \mathbb{R})_{l^p}\right)_E .$$

Z wniosku 3.2.1 wynika, że przestrzeń Z jest jednostajnie wypukła.

Niech teraz $x, y \in K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$ będą elementami, dla których $\|x\|_{p,\theta} < 1$, $\|y\|_{p,\theta} < 1$ oraz $\|x - y\|_{p,\theta} \geqslant \varepsilon$. Z definicji normy w przestrzeni interpolacyjnej wynika, że istnieją rozkłady

$x = x^0(i) + x^1(i)$ oraz $y = y^0(i) + y^1(i)$ dla pewnych $x^0(i), y^0(i) \in X_0$ i pewnych $x^1(i), y^1(i) \in X_1$ takie, że

$$\left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(\left(e^{i\theta} \|x^0(i)\|_{X_0} \right)^p + \left(e^{i(\theta-1)} \|x^1(i)\|_{X_1} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} e_i \right\|_E < 1$$

oraz

$$\left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(\left(e^{i\theta} \|y^0(i)\|_{X_0} \right)^p + \left(e^{i(\theta-1)} \|y^1(i)\|_{X_1} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} e_i \right\|_E < 1.$$

Korzystając z twierdzenia 4.1.2, dostajemy

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leqslant \|x - y\|_{p,\theta} \\
&\leqslant C \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} e^{i\theta} \|x^0 - y^0(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E^{1-\theta} \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} e^{i(\theta-1)} \|x^1 - y^1(i)\|_{X_1} e_i \right\|_E^{\theta} \\
&\leqslant C \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} e^{i\theta} \|x^0 - y^0(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E^{1-\theta} \cdot \|x - y\|_{p,\theta}^{\theta} \\
&\leqslant C \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} e^{i\theta} \|x^0 - y^0(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E^{1-\theta} \cdot 2^{\theta},
\end{aligned}$$

gdzie C jest stałą z twierdzenia 4.1.2. Stąd

$$\left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} e^{i\theta} \|x^0 - y^0(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E \geqslant \left(\frac{\varepsilon}{2^\theta C} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} := \varepsilon_1.$$

Rozważmy teraz następujące elementy sumy prostej Z:

$$\overline{x} = \left\{ \left(e^{i\theta} x^0(i), e^{i(\theta-1)} \|x^1(i)\|_{X_1} \right) \right\}_{i\in\mathbb{Z}} \text{ oraz } \quad \overline{y} = \left\{ \left(e^{i\theta} y^0(i), e^{i(\theta-1)} \|y^1(i)\|_{X_1} \right) \right\}_{i\in\mathbb{Z}}.$$

Wówczas $\|\overline{x}\|_Z < 1$, $\|\overline{y}\|_Z < 1$ oraz

$$\|\overline{x} - \overline{y}\|_Z \geqslant \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} e^{i\theta} \|x^0 - y^0(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E \geqslant \varepsilon_1.$$

W konsekwencji

$$\frac{1}{2}\|x + y\|_{p,\theta} \leqslant \frac{1}{2}\|\overline{x} + \overline{y}\|_Z \leqslant 1 - \delta_Z(\varepsilon_1),$$

co nam daje konkluzję naszego twierdzenia. $\square$

4.3 Własności Opiala w przestrzeniach interpolacyjnych

W tym rozdziale prezentujemy wyniki dotyczące własności Opiala w przestrzeni $\Sigma_p(\boldsymbol{X}, a, b)$ i w przestrzeni interpolacyjnej $K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$. Ponadto, podajemy oszacowanie modułu $s_{K_{p,\theta}}$ związanego z jednostajną własnością Opiala.

Twierdzenie 4.3.1 ([51])**.** *Niech $p \in [1, \infty)$, $a, b > 0$ i niech $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ będzie parą interpolacyjną. Niech ponadto $\Sigma_p(\boldsymbol{X}, a, b)$ będzie przestrzenią z normą daną wzorem* (4.3) *oraz załóżmy, że przestrzenie X_0 oraz X_1 są refleksywne.*

1) *Jeśli obie przestrzenie X_0 i X_1 mają słabą własność Opiala, to $\Sigma_p(\boldsymbol{X}, a, b)$ ma słabą własność Opiala.*

2) *Jeśli obie przestrzenie X_0 i X_1 mają własność Opiala, to $\Sigma_p(\boldsymbol{X}, a, b)$ ma własność Opiala.*

Dowód. Podamy dowód części 1), ponieważ dowód części 2) jest analogiczny. Niech (x_n) będzie ciągiem słabo zbieżnym do x w $\Sigma_p(\boldsymbol{X}, a, b)$. Przechodząc do podciągów możemy założyć, że istnieją granice $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_p$ oraz $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_p$.

Z twierdzenia 4.1.1 wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje rozkład $x_n = x_n^0 + x_n^1$, gdzie $x_n^0 \in X_0$ i $x_n^1 \in X_1$ taki, że

$$\|x_n\|_p^p = a^p \|x_n^0\|_{X_0}^p + b^p \|x_n^1\|_{X_1}^p.$$

Przechodząc do podciągów, możemy założyć, że (x_n^k) jest słabo zbieżny do pewnego $x^k \in X_k$ oraz, że granica $\lim_{n\to\infty} \|x_n^k\|_{X_k}$ istnieje dla $k = 0, 1$.

Ciąg (x_n^k) jest słabo zbieżny do x^k również w $\Sigma_p(\boldsymbol{X}, a, b)$, co pokazuje, że $x = x^0 + x^1$. Przechodząc do podciągów kolejny raz, możemy założyć, że istnieją granice

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n^0 - x^0\|_{X_0} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n^1 - x^1\|_{X_1}.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_p^p &= a^p \lim_{n\to\infty} \|x_n^0\|_{X_0}^p + b^p \lim_{n\to\infty} \|x_n^1\|_{X_1}^p \\
&\geqslant a^p \lim_{n\to\infty} \|x_n^0 - x^0\|_{X_0}^p + \lim_{n\to\infty} b^p \|x_n^1 - x^1\|_{X_1}^p \\
&\geqslant \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_p^p,
\end{aligned}$$

co kończy nasz dowód. $\square$

Baza Schaudera $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ przestrzeni Banacha E jest ograniczenie zupełna, jeśli dla dowolnego ciągu liczbowego $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ z warunku $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{i=-n}^{n} a_i e_i\right\| < \infty$ wynika, że szereg $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i e_i$ jest zbieżny (por. [43, str. 9]). Załóżmy, że $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ jest znormalizowaną bazą bezwarunkową, której bezwarunkowa stała jest równa 1 i krata E spełnia dolne q-oszacowanie dla pewnego $q \in (1,\infty)$. Wtedy baza $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ jest ograniczenie zupełna. Rzeczywiście, gdyby tak nie było, to istniałoby $\varepsilon > 0$ i ciąg (x_n) parami rozłącznych elementów w E taki, że $\|x_k\| \geqslant \varepsilon$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ i $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\sum_{k=1}^{n} x_k\| < \infty$. Prowadzi to do sprzeczności z nierównością (2.4) w definicji dolnego q-oszacowania. Wobec twierdzenia 2.2.3 daje nam to następujący wniosek.

Wniosek 4.3.1. *Niech E będzie rzeczywistą przestrzenią Banacha ze znormalizowaną, bezwarunkową bazą $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, której bezwarunkowa stała jest równa 1. Jeśli E jest jednostajnie monotoniczna, to baza $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ jest ograniczenie zupełna.*

Niech E będzie przestrzenią z bazą $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Wprowadźmy następujące oznaczenia. Dla danych ciągów $s = (s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ oraz $t = (t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ i dla danego $n \in \mathbb{N}$, niech

$$P_n(s,t) = \sum_{i=-n}^{n} \left((e^{\theta i} s_i)^p + (e^{(\theta-1)i} t_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} e_i,$$

tj. $P_n(s,t)$ jest sumą częściową szeregu

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \left((e^{\theta i} s_i)^p + (e^{(\theta-1)i} t_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} e_i. \tag{4.8}$$

Jeśli szereg (4.8) jest zbieżny w E, to jego sumę oznaczamy symbolem $P_\infty(s,t)$. Ponadto przyjmujemy $R_n(s,t) = P_\infty(s,t) - P_n(s,t)$.

Niech teraz $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ będzie parą interpolacyjną. Dla danego ciągu $(x^k(i))_{i\in\mathbb{Z}}$ w X^k, gdzie $k \in \{0,1\}$, wprowadzamy oznaczenie

$$\lfloor x^k \rceil = (\|x^k(i)\|_{X_k})_{i\in\mathbb{Z}}.$$

Poniższe twierdzenie podaje warunki dostateczne dla tego, aby przestrzeń interpolacyjna $K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$ miała własność Opiala.

Twierdzenie 4.3.2 ([51]). *Niech E będzie rzeczywistą przestrzenią Banacha ze znormalizowaną bazą bezwarunkową $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ze stałą bezwarunkową 1, spełniającą warunek (4.6). Załóżmy, że $p \in [1,\infty)$, $\theta \in (0,1)$ oraz $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ jest parą interpolacyjną taką, że X_0 i X_1 są refleksywne. Jeśli E jest jednostajnie monotoniczna, obie przestrzenie X_0 i X_1 mają słabą własność Opiala oraz co najmniej jedna z przestrzeni X_0 i X_1 ma własność Opiala, to przestrzeń interpolacyjna $K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$ ma własność Opiala.*

Dowód. Załóżmy, że przestrzeń X_0 ma własność Opiala. Niech (x_n) będzie ciągiem w przestrzeni $K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$ słabo zbieżnym do pewnego $x \neq 0$. Z twierdzenia 4.1.1 wiemy, że para interpolacyjna $\boldsymbol{X}$ jest p-dokładna, więc dla każdego n możemy znaleźć rozkład $x_n = x_n^0(i) + x_n^1(i)$, gdzie $i \in \mathbb{Z}$, $x_n^0(i) \in X_0$, $x_n^1(i) \in X_1$ oraz $\|x_n\|_{p,\theta} = \|P_\infty(\lfloor x_n^0\rceil, \lfloor x_n^1\rceil)\|_E$. Dla każdego $i \in \mathbb{Z}$ otrzymujemy ograniczone ciągi $(x_n^0(i))_{n\in\mathbb{N}}$ i $(x_n^1(i))_{n\in\mathbb{N}}$ odpowiednio w X_0 i X_1 i przechodząc do podciągów, możemy założyć, że istnieją następujące słabe granice: $x^0(i) = w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n^0(i)$ oraz $x^1(i) = w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n^1(i)$. Z faktu, że X_0 i X_1 są zanurzone w sposób ciągły w $\Sigma_p(\boldsymbol{X}, a, b)$ oraz z równości $x_n = x_n^0(i) + x_n^1(i)$ wynika, że $x = x^0(i) + x^1(i)$.

Mamy $\|P_m(\lfloor x^0\rceil, \lfloor x^1\rceil)\|_E \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_{p,\theta}$ dla każdego m, więc wobec wniosku 4.3.1 możemy rozważać sumę $P_\infty(\lfloor x^0\rceil, \lfloor x^1\rceil) \in E$. Korzystając z nierówności (4.7) otrzymujemy $\|P_\infty(\lfloor x^0\rceil, 0)\|_E > 0$ i w konsekwencji istnieje $i_0 \in \mathbb{Z}$, dla którego $\|x^0(i_0)\|_{X_0} > 0$.

Następnie, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ wybieramy $m \geqslant i_0$ w taki sposób, że

$$\|R_m(\lfloor x^0\rceil, \lfloor x^1\rceil)\|_E \leqslant \varepsilon.$$

Przechodząc do podciągów, możemy założyć, że istnieją następujące granice:

$$f_0(i) = \lim_{n\to\infty} \|x_n^0(i)\|_{X_0},\ f_1(i) = \lim_{n\to\infty} \|x_n^1(i)\|_{X_1},$$
$$F_0(i) = \lim_{n\to\infty} \|x_n^0(i) - x^0(i)\|_{X_0},\ F_1(i) = \lim_{n\to\infty} \|x_n^1(i) - x^1(i)\|_{X_1}$$

dla każdego $i \in \mathbb{Z}$, gdzie $|i| \leqslant m$. Następnie, połóżmy

$$u_n = P_m(F_0, F_1) + R_m(\lfloor x_n^0\rceil, \lfloor x_n^1\rceil),\ v_n = P_m(f_0, f_1) + R_m(\lfloor x_n^0\rceil, \lfloor x_n^1\rceil).$$

Założenie, że przestrzenie X_0 i X_1 mają słabą własność Opiala implikuje, że $F_k(i) \leqslant f_k(i)$

dla $k = 0, 1$, więc $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ w E. Ponadto,

$$\|v_n\|_E \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{p,\theta} = \alpha, \tag{4.9}$$

$$\|v_n\|_E \geqslant e^{\theta i_0} \lim_{n\to\infty} \|x_n^0(i_0)\|_{X_0} \geqslant e^{\theta i_0} \|x^0(i_0)\|_{X_0} = \beta > 0 \tag{4.10}$$

oraz

$$\|v_n - u_n\|_E \geqslant e^{\theta i_0} \left(\lim_{n\to\infty} \|x_n^0(i_0)\|_{X_0} - \lim_{n\to\infty} \|x_n^0(i_0) - x^0(i_0)\|_{X_0} \right) = \gamma > 0. \tag{4.11}$$

Korzystając z nierówności (2.8), (4.9), (4.10) oraz (4.11), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|u_n\|_E &\leqslant \|v_n\|_E - \|v_n\|_E \delta_{m,E} \left(\frac{\|v_n - u_n\|_E}{\|v_n\|_E} \right) \\ &\leqslant \|v_n\|_E - \beta \delta_{m,E} \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Stąd

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_E + d \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|_E, \tag{4.12}$$

gdzie $d = \beta \delta_{m,E} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) > 0$.

Mamy

$$\begin{aligned} \|u_n - \lfloor x_n - x \rceil\|_E &\leqslant \|P_m(F_0, F_1) - P_m(\lfloor x_n^0 - x^0 \rceil, \lfloor x_n^1 - x^1 \rceil) + R_m(\lfloor x^0 \rceil, \lfloor x^1 \rceil)\|_E \\ &\leqslant \|P_m(F_0 - \lfloor x_n^0 - x^0 \rceil, F_1 - \lfloor x_n^1 - x^1 \rceil)\|_E + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned} &\|P_m(F_0 - \lfloor x_n^0 - x^0 \rceil, F_1 - \lfloor x_n^1 - x^1 \rceil)\|_E \\ &\leqslant \sum_{i=-m}^{m} \left(\left(e^{\theta i} \left| F_0(i) - \|x_n^0(i) - x^0(i)\|_{X_0} \right| \right)^p + \left(e^{(\theta-1)i} \left| F_1(i) - \|x_n^1(i) - x^1(i)\|_{X_1} \right| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

co pokazuje, że $\lim_{n\to\infty} \|P_m(F_0 - \lfloor x_n^0 - x^0 \rceil, F_1 - \lfloor x_n^1 - x^1 \rceil)\|_E = 0$, a zatem

$$\limsup_{n\to\infty} \|u_n - \lfloor x_n - x \rceil\|_E \leqslant \varepsilon.$$

Stąd

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_E \geqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{p,\theta} - \varepsilon. \tag{4.13}$$

Podobnie z nierówności

$$
\begin{aligned}
\|v_n - \lfloor x_n \rceil\|_E &= \|P_m(f_0, f_1) - P_m(\lfloor x_n^0 \rceil, \lfloor x_n^1 \rceil)\|_E \\
&\leqslant \sum_{i=-m}^{m} \left(\left(e^{\theta i} \left| f_0(i) - \|x_n^0(i)\|_{X_0} \right| \right)^p + \left(e^{(\theta-1)i} \left| f_1(i) - \|x_n^1(i)\|_{X_1} \right| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

wynika, że $\lim_{n\to\infty} \|v_n - \lfloor x_n \rceil\|_E = 0$ i w konsekwencji

$$
\liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_{p,\theta} = \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|_E. \tag{4.14}
$$

Z nierówności (4.12), (4.13) oraz (4.14) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_{p,\theta} = \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|_E &\geqslant \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_E + d \\
&\geqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{p,\theta} - \varepsilon + d.
\end{aligned}
$$

Przechodząc do granicy z $\varepsilon \to 0$ dostajemy

$$
\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{p,\theta} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_{p,\theta} - d < \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_{p,\theta},
$$

co kończy dowód twierdzenia. □

W kolejnym twierdzeniu podajemy oszacowanie modułu $s_{K_{p,\theta}}$ związanego z własnością Opiala dla przestrzeni interpolacyjnej $K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$. W dowodzie tego twierdzenia korzystamy z poniższego lematu, który stanowi modyfikację lematu 3.3.1.

Lemat 4.3.1. *Załóżmy, że E jest rzeczywistą przestrzenią Banacha ze znormalizowaną bazą bezwarunkową $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ze stałą bezwarunkową równą 1, spełniającą warunek* (4.6)*. Niech $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie niemalejącą, ograniczoną funkcją zerującą się tylko w 0. Jeśli $f \in B(E)$ oraz $g : I \to [0,1]$ spełniają warunek $\|gf\|_E \geqslant \varepsilon$, to $(h \circ g)f \in E$ oraz $\|(h\circ g)f\|_E \geqslant \frac{\varepsilon}{2} h\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$.*

Twierdzenie 4.3.3 ([51])**.** *Niech E będzie rzeczywistą przestrzenią Banacha ze znormalizowaną bazą $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ze stałą bezwarunkową równą 1, spełniającą warunek* (4.6)*. Załóżmy, że $p \in [1,\infty)$, $\theta \in (0,1)$ oraz, że $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ jest parą interpolacyjną refleksywnych przestrzeni Banacha mających słabą własność Opiala. Wtedy*

$$
s_{K_{p,\theta}}(t) \geqslant \delta_{m,E}(\max\{c_0 s_{X_0}(c_0), c_1 s_{X_1}(c_1)\}), \tag{4.15}
$$

gdzie

$$c_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{C}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}, \; c_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{C}\right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{4.16}$$

oraz C jest stałą z nierówności (4.7)*. W konsekwencji, jeśli E jest jednostajnie monotoniczna oraz X_0 lub X_1 ma jednostajną własność Opiala, to $K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$ ma jednostajną własność Opiala.*

Dowód. Niech (x_n) będzie ciągiem w $K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$ takim, że $\liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_{p,\theta} \leqslant 1$ oraz (x_n) jest słabo zbieżny do $x \in K_{p,\theta}(\boldsymbol{X}, E)$, gdzie $\|x\|_{p,\theta} \geqslant t > 0$.

Powtarzając rozumowanie z dowodu twierdzenia 4.3.2 dla każdego $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy rozkład $x_n = x_n^0(i) + x_n^1(i)$, gdzie $x_n^0(i) \in X_0$, $x_n^1(i) \in X_1$ dla wszystkich $i \in \mathbb{Z}$, dla którego spełnione są następujące warunki: $\|x_n\|_{p,\theta} = \|P_\infty(\lfloor x_n^0 \rceil, \lfloor x_n^1 \rceil)\|_E$, istnieją słabe granice $x^0(i) = w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n^0(i)$, $x^1(i) = w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n^1(i)$ odpowiednio w X_0 i X_1, $x = x^0(i) + x^1(i)$ oraz $P_\infty(\lfloor x^0 \rceil, \lfloor x^1 \rceil) \in E$. Mamy $\|P_\infty(\lfloor x^0 \rceil, \lfloor x^1 \rceil)\|_E \leqslant 1$.

Następnie, dla dowolnego $\gamma > 0$, wybierzmy $m \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\|R_m(\lfloor x^0 \rceil, \lfloor x^1 \rceil)\|_E \leqslant \gamma. \tag{4.17}$$

Korzystając z (4.7) dostajemy oszacowanie

$$t \leqslant \|x\|_{p,\theta} \leqslant C\|P_\infty(\lfloor x^0 \rceil, 0)\|_E^{1-\theta}\|P_\infty(0, \lfloor x^1 \rceil)\|_E^{\theta} \leqslant C\left(\|P_m(\lfloor x^0 \rceil, 0)\|_E + \gamma\right)^{1-\theta} \tag{4.18}$$

i podobnie

$$t \leqslant C\left(\|P_m(0, \lfloor x^1 \rceil)\| + \gamma\right)^{\theta}. \tag{4.19}$$

Przechodząc do podciągów, możemy założyć, że dla każdego $i \in I_m = \{i \in \mathbb{Z} : |i| \leqslant m\}$ istnieją następujące granice:

$$F_0(i) = \lim_{n\to\infty} \|x_n^0(i)\|_{X_0}, \quad F_1(i) = \lim_{n\to\infty} \|x_n^1(i)\|_{X_1}$$

oraz

$$f_0(i) = \lim_{n\to\infty} \|x_n^0(i) - x^0(i)\|_{X_0}, \quad f_1(i) = \lim_{n\to\infty} \|x_n^1(i) - x^1(i)\|_{X_1}.$$

Połóżmy $g_k(i) = \frac{\|x^k(i)\|_{X_k}}{F_k(i)}$, jeśli $F_k(i) > 0$ oraz $g_k(i) = 0$, jeśli $F_k(i) = 0$ dla $k = 0, 1$. Jeśli $F_k(i) > 0$, to

$$\begin{aligned} f_k(i) &= F_k(i) \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x_n^k(i) - x^k(i)}{F_k(i)} \right\|_{X_k} \leqslant F_k(i)\left(1 - s_{X_k}\left(\frac{\|x^k(i)\|_{X_k}}{F_k(i)}\right)\right) \\ &= F_k(i) - s_{X_k}(g_k(i))F_k(i). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Jeśli $F_k(i) = 0$, to $x^k(i) = 0$ i w konsekwencji $f_k(i) = F_k(i)$.

Rozważmy teraz następujące elementy przestrzeni E:

$$v = P_m((s_{X_0} \circ g_0)F_0, (s_{X_1} \circ g_1)F_1), \; v_n = P_m(F_0, F_1) + R_m(\lfloor x_n^0 \rceil, \lfloor x_n^1 \rceil).$$

Oszacowanie (4.18) daje nam nierówność

$$\|P_m(g_0 F_0, 0)\|_E = \|P_m(\lfloor x^0 \rceil, 0)\|_E \geqslant 2c_{0,\gamma}, \tag{4.21}$$

gdzie $c_{0,\gamma} = c_0 - \frac{1}{2}\gamma$ i analogicznie,

$$\|P_m(0, g_1 F_1)\|_E = \|P_m(0, \lfloor x^1 \rceil)\|_E \geqslant 2c_{1,\gamma}, \tag{4.22}$$

gdzie $c_{1,\gamma} = c_1 - \frac{1}{2}\gamma$, przy czym stałe c_0, c_1 są dane wzorami (4.16). Zauważmy, że $s_{X_k}(g_k(i)) \in [0,1]$, co wynika z faktu, że X_k ma słabą własność Opiala dla $k = 0, 1$. Korzystając z (4.21), (4.22) oraz z lematu 4.3.1, otrzymujemy

$$\|v\|_E \geqslant \max\{\|P_m((s_{X_0} \circ g_0)F_0, (s_{X_1} \circ g_1)F_1)\|_E\} \geqslant d_\gamma, \tag{4.23}$$

gdzie $d_\gamma = \max\{c_{0,\gamma} s_{X_0}(c_{0,\gamma}), c_{1,\gamma} s_{X_1}(c_{1,\gamma})\}$.

Stosując (4.17) i (4.20), dostajemy

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{p,\theta} &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \|P_m(f_0, f_1) + R_m(\lfloor x_n^0 - x^0 \rceil, \lfloor x_n^1 - x^1 \rceil)\|_E \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \|v_n - v\|_E + \gamma. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Następnie, zauważmy, że $\liminf_{n\to\infty} \|v_n\|_E = \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_{p,\theta} \leqslant 1$ i możemy wybrać podciąg (v_{n_k}) taki, że

$$\lim_{k\to\infty} \|v_{n_k}\|_E = \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|_E \leqslant 1. \tag{4.25}$$

Nierówności (2.8), (4.23), (4.24) oraz (4.25) implikują

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{p,\theta} &\leqslant \liminf_{k\to\infty} \|v_{n_k} - v\|_E + \gamma \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \|v_{n_k}\|_E \left(1 - \delta_{m,E}\left(\frac{\|v\|_E}{\|v_{n_k}\|_E}\right)\right) + \gamma \\ &\leqslant 1 - \delta_{m,E}(d_\gamma) + \gamma. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Ostatecznie, z (4.26) dostajemy

$$s_{K_{p,\theta}}(t) \geqslant \delta_{m,E}(d_\gamma) - \gamma.$$

Przechodząc do granicy z $\gamma \to 0$, dostajemy konkluzję (4.15). $\square$

Uwaga 4.3.1. Modyfikacje dowodów twierdzeń 4.3.1, 4.3.2 oraz 4.3.3 dają analogiczne wyniki dla odpowiednich własności Opiala względem topologii dopuszczalnej τ w $\Sigma_p(\boldsymbol{X}, a, b)$. W tym przypadku założenie o tym, że para interpolacyjna $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ składa się z przestrzeni refleksywnych, musi być zastąpione przez założenie, że para interpolacyjna $\boldsymbol{X}$ jest τ-domknięta.

Spis rysunków

Bibliografia

[1] F. L. Bauer, J. Stoer, C. Witzgall, *Absolute and monotonic norms*, Numer. Math. **3** (1961), 257–264.

[2] B. Beauzamy, *Propriétés geometriques des Espaces d'Interpolation*, Séminaire Maurey Schwartz 1974/75 Exposé 14, École Polytechnique, Paris.

[3] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1982.

[4] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1976.

[5] S. J. Bernau, *A unified approach to the principle of local reflexivity*, in: H. E. Lacey (Ed.), Notes in Banach Spaces, Univ. Texas Press, Austin, 1980, 427–439.

[6] A. Betiuk-Pilarska, S. Prus, *Banach lattices which are order uniformly noncreasy*, J. Math. Anal. Appl. **342** (2008), 1271–1279.

[7] A. Betiuk-Pilarska, S. Prus, *Uniform nonsquareness of direct sums of Banach spaces*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **34** (2009), 181–186.

[8] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Society, New York, NY, USA, 1940.

[9] J. M. Borwein, B. Sims, *Non-expansive mappings on Banach lattices and related topics*, Houston J. Math. **10** (1984), 339–356.

[10] J. M. Borwein, D. T. Yost, *Absolute norms on vector lattices*, Proc. Edinb. Math. Soc. **27** (1983), 215–222.

[11] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 396–414.

[12] M. Cwikel, S. Reisner, *Interpolation of uniformly convex Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **84** (1982), 555–559.

[13] W. J. Davis, *Embedding spaces with unconditional bases*, Israel J. Math. **20** (1975), 189–191.

[14] W. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson, A. Pełczyński, *Factoring weakly compact operators*, J. Funct. Anal. **17** (1974), 311–327.

[15] M. M. Day, *Normed Linear Spaces*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1962.

[16] S. J. Dilworth, D. Kutzarova, K. L. Shuman, V. N. Temlyakov, P. Wojtaszczyk, *Weak convergence of greedy algorithms in Banach spaces*, J. Fourier Anal. Appl. **14**, no. 5–6 (2008), 609–628.

[17] P. G. Dodds. T. K. Dodds, A. A. Sedaev, F. A. Sukochev, *Local uniform convexity and Kadec-Klee type properties in K-interpolation spaces I: General Theory*, J. Funct. Spaces Appl. **2**, no. 2 (2004), 125–173.

[18] T. Domínguez Benavides, J. García Falset, M. A. Japón Pineda, *The τ-fixed point property for nonexpansive mappings*, Abstr. Appl. Anal. **3** (1998), 343–362.

[19] S. Dhompongsa, S. Saejung, *Geometry of direct sums of Banach spaces*, Chamchuri Journal of Mathematics **2**, no. 1 (2010), 1–9.

[20] P. N. Dowling, S. Saejung, *Non-squareness and uniform non-squareness of Z-direct sums*, J. Math. Anal. Appl. **369** (2010), 53–59.

[21] P. N. Downing, B. Turett, *Some properties of the characteristic of convexity relating to fixed point property*, Pacific J. Math. **104**, no. 2 (1983), 343–350.

[22] P. Enflo, *Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm*, Israel J. Math. **13** (1972), 281–288.

[23] P. Foralewski, H. Hudzik, R. Kaczmarek, M. Krbec, *Moduli and characteristics of monotonicity in some Banach lattices*, Fixed Point Theory Appl. **2010**, article ID 852346.

[24] J. Gao, K. S. Lau, *On the geometry of spheres in normed linear spaces*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **48** (1990), 101–112.

[25] J. García-Falset, *Stability and fixed points for nonexpansive mappings*, Houston J. Math. **20** (1994), 495–506.

[26] J. García-Falset, *The fixed point property in Banach spaces with the NUS-property*, J. Math. Anal. Appl. **215** (1997), 532–542.

[27] J. García-Falset, E. Llorens-Fuster, E. M. Mazcunan-Navarro, *Uniformly nonsquare Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings*, J. Funct. Anal. **233** (2006) 494–514.

[28] K. Goebel, W. A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[29] A. J. Guirao, P. Hájek, *On the moduli of convexity*, Proc. Amer. Math. Soc. **135**, no. 10 (2007), 3233–3240.

[30] O. Hanner, *On the uniform convexity of L^p and l^p*, Ark. Mat. **3** (1956), 239–44.

[31] J. D. Hardtke, *WORTH property, García-Falset coefficient and Opial property of infinite sums*, Comment. Math. **55** (2015), 23–44.

[32] T. Holmstedt, J. Peetre, *On certain functionals arising in the theory of interpolation spaces*, J. Funct. Anal. **4** (1968) 88–94.

[33] H. Hudzik, R. Kaczmarek, *Moduli and characteristics of monotonicity in general Banach lattices and in Orlicz spaces in particular*, Nonlinear Anal. **70**, no. 9 (2009), 3407–3423.

[34] H. Hudzik, A. Kamińska, M. Mastyło, *Monotonicity and rotundity properties in Banach lattices*, Rocky Mountain J. Math. **30**, no. 3 (2000), 933–950.

[35] R. C. James, *Uniformly non-square Banach spaces*, Ann. of Math. **80** (1964), 542–550.

[36] M. Kato, L. Maligranda, Y. Takahashi, *On James and Jordan–von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*, Studia Math. **144** (2001), 275–295.

[37] W. A. Kirk, B. Sims (eds.), *Handbook of Metric Fixed Point Theory*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.

[38] W. Kurc, *A dual property to uniform monotonicity in Banach lattices*, Collect. Math. **44** (1993), 155–165.

[39] D. Kutzarova, T. Landes, *Nearly uniform convexity of infinite direct sums*, Indiana Univ. Math. J. **41**, no. 4 (1992), 915–926.

[40] D. Kutzarova, L. I. Nikolova, S. Prus, *Infinite dimensional geometric properties of real interpolation spaces*, Math. Nachr. **191** (1998), 215-228.

[41] P. K. Lin, K. K. Tan, H. K. Xu, *Demiclosedness principle and asymptotic behavior for asymptotically nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. **24** (1995), 929–946.

[42] J. Lindenstrauss, *On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces*, Mich. Math. J. **10** (1963), 241–252.

[43] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[44] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[45] J. Lions, J. Peetre, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Publications Mathémathiques de l'I.H.É.S, Tome 19 (1964), 5–68.

[46] A. Lissitsin, E. Oja, *The convex approximation property of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **379** (2011), 616–626.

[47] L. Maligranda, *Simple norm inequalities*, Amer. Math. Monthly **113** (2006), 256–260.

[48] E. Maluta, S. Prus, M. Szczepanik, *On Milmans moduli for Banach spaces*, Abstr. Appl. Anal. **6** (2001), 115–129.

[49] J. Markowicz, S. Prus, *James constant, García-Falset coefficient and uniform Opial property in direct sums of Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **17**, no. 11 (2016), 2237–2253.

[50] J. Markowicz, S. Prus, *Properties of modulus of monotonicity and Opial property in direct sums*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A **71**, no. 2 (2017), 69–77.

[51] J. Markowicz, S. Prus, *Opial properties in interpolation spaces*, przyjęta do publikacji w Math. Nachr.

[52] J. Markowicz, S. Prus, *Uniform convexity of general direct sums and interpolation spaces*, przyjęta do publikacji w J. Topol. Anal.

[53] P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[54] G. Nordlander, *The modulus of convexity in normed linear spaces*, Ark. Mat. **4** (1960), 15–17.

[55] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.

[56] S. Prus, *Banach spaces with the uniform Opial property*, Nonlinear Anal. **18** (1992), 697–704.

[57] S. Prus, *On uniform nonsquareness and uniform normal structure in Banach lattices*, J. Convex Anal. **21** (2014), 167–177.

[58] B. Sims, *Orthogonality and fixed points of nonexpansive maps*, Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ. **20** (1988), 178–186.

[59] Z. B. Xu, G. F. Roach, *Characteristic inequalities of uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **157** (1991), 189–210.

[60] T. Zachariades, *On ℓ_φ spaces and infinite φ-direct sums of Banach spaces*, Rocky Mountain J. Math. **41**, no. 3, (2011), 971–997.