ANNALES UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA · LUBLIN
POLSKA · ПОЛЬША · POLAND
VOL. I, 2 SECTIO I 1976

Międzyuczelniany Instytut Filozofii i Socjologii w Lublinie

Leon KOJ

Psychologiczna geneza pojęcia zbioru

Психологический генезис понятия множества

Psychological Genesis of the Notion of Set

DONIOSŁOŚĆ TEORII PIAGETA DLA FILOZOFII MATEMATYKI I FILOZOFII LOGIKI

WSTĘP

W praktyce badawczej, w której posługujemy się logiką i teorią mnogości, nie pojmując ich jako przedmiotu badań, nie traktujemy tych nauk jako układów czysto formalnych. Należałoby sądzić, że uważamy je wówczas za systemy zinterpretowane. Powstają wtedy natychmiast wątpliwości, ponieważ trudno nam wskazać tę interpretację stosowaną w praktyce. Gdy zaś sięgniemy do metodologii nauk dedukcyjnych, to z reguły interpretacja bogatszych systemów logicznych i matematycznych znajduje się w ramach teorii mnogości. Aby więc zrozumieć, o co chodzi w teorii mnogości, musimy tę teorię już znać, z tym, że na innej płaszczyźnie, bo w metasystemie. Jeśli na tym nie poprzestaniemy, pozostanie nam po prostu wskazanie sposobu odczytania podstawowych zwrotów symbolicznych oraz założenia, że wiemy, co znaczą wyrażenia języka naturalnego. Znaczenia wyrażeń symbolicznych używanych w systemach logicznych i matematycznych byłyby wtedy jedynie pewnymi uproszczeniami lub modyfikacjami znaczeń potocznych. Oczywiście tego typu interpretacja niewiele daje. Znany jest fakt wieloznaczności wyrażeń potocznych. Umieszczenie pojęć pierwotnych zinterpretowanych w języku potocznym w aksjomatach wyklucza niektóre znaczenia, ale też nie rozwiązuje całego problemu. Nie da się bowiem wykluczyć wszystkich znaczeń i — co więcej — nie sposób wskazać usprawiedliwienia wyboru takiej lub innej aksjomatyki. Pozostaje tylko stwierdzić, że wybór aksjomatyki jest konwencjonalny, co jest właściwie przyznaniem się do nieznajomości racji, które kierowały jej wyborem (wszakże nic nie dzieje się bez dostatecznej i zniewalającej przyczyny). Niekiedy wskazuje się na przyczyny *ad hoc* pozwalające usunąć jakieś mankamenty, niekiedy na względy wygody lub estetyki. Tych racji nie można jednak przyjąć jako wystarczających przyczyn konstrukcji takiego, a nie innego systemu. Najważniejsze jednak jest to, że przesunięcie ciężaru znalezienia interpretacji na język naturalny nie rozwiązuje zagadnienia, albowiem nie potrafimy także znaleźć przekonujących interpretacji dla wyrażeń języka naturalnego, będących odpowiednikami terminów pierwotnych systemów logiki i teorii mnogości. Mam na myśli przede wszystkim słowa „jest" i „każdy".

W tej trudnej sytuacji teoretycznej (praktyka logiczno-matematyczna nie odczuwa większych kłopotów, gdyż wspomniany brak nie grozi sprzecznością) trzeba nieustannie zastanawiać się nad znaczeniem wspomnianych wyrażeń, nad ich interpretacją i pochodzeniem. Próbowano różnych sposobów, aby rozwiązać naszkicowany problem. Można np. próbować ustalić, w jakich warunkach posługujemy się interesującymi wyrażeniami. Metoda ta jednak jest chyba skazana na niepowodzenie. Zwrot, który będzie nas szczególnie interesował, a mianowicie „jest", bywa używany w przeróżnych okolicznościach empirycznych i psychicznych. Ich opis prawie na pewno będzie zawierał słowo „jest". Tego typu wyjaśnienia znaczenia słowa „jest", o które w tych rozważaniach chodzi, narażone jest na te same zarzuty, co metoda podawania jego znaczenia przez interpretację w metajęzyku, o której już wspomniano.

Przypuszczalnie najbardziej owocne będzie przebadanie kształtowania się interesujących nas pojęć w trakcie osobniczego rozwoju ludzi. W tej teoretycznie trudnej sytuacji decydujemy się na rozważenie genezy pojęć używanych w teorii mnogości. Decyzję ułatwia to, że przeprowadzono obszerne badania dotyczące pochodzenia pojęć logiczno-matematycznych. Mam tu na myśli przede wszystkim dociekania Piageta i jego szkoły. Może właśnie uwzględnienie dorobku psychologii genetycznej pozwoli lepiej zrozumieć znaczenie terminów logiko-teoriomnogościowych.

OGRANICZENIE ROZWAŻAŃ

Nie sposób omówić wszystkich podstawowych terminów logicznych w tej krótkiej pracy. Do rozważań wprowadzę wobec tego funktory zdaniotwórcze od argumentów zdaniowych, jako określone pod każdym względem, także pod względem genezy. Podobne, upraszczające założenie przyjmuję odnośnie do kwalifikatorów. Tym samym problemem znaczenia i interpretacji podstawowych terminów logiczno-matematycznych będzie poruszony jedynie ułamkowo. Nie będzie także rozpatrywana sprawa genezy psychologicznej definicji terminów pochodnych. A zatem interesować się będziemy tylko pojęciem klasy i znaczeniem słowa „jest", nieodłącznie związanym z pojęciem zbioru (klasy).

Rozważania zostaną także ograniczone pod innym względem. Otóż nie będę w szczegółach referował poglądów Piageta, a raczej podstawy jego teorii. Z drugiej strony, wychodząc poza to, co wyraźnie powiedział Piaget, nie będę wprowadzał żadnej dokumentacji historycznej jego poglądów.

SZKIC NIEKTÓRYCH WCZEŚNIEJSZYCH KONCEPCJI PSYCHOLOGISTYCZNYCH WYRAŻENIA *X JEST Y*

Druga połowa XIX wieku była świadkiem bardzo żywej dyskusji dotyczącej znaczenia zdań typu x jest y. Dyskusja ta w przeważającej mierze miała charakter psychologiczny i toczyła się wokół pytania, jak połączone (czy rozdzielone) są myśli, gdy wypowiadamy zdanie typu x jest y. Nie kładziono w niej nacisku na różnicę między tak zbudowanymi zdaniami atomowymi a podobnymi zdaniami subsumcyjnymi. Podstawowym mechanizmem, który służył sformułowaniu teorii sądu psychologicznego, będącego odpowiednikiem zdania typu a jest b, była asocjacja-kojarzenie wrażeń, wyobrażeń lub pojęć (czymkolwiek one są) na zasadzie styczności w czasie i przestrzeni, kontrastu itd. przedmiotów dostarczających owych wrażeń, wyobrażeń i pojęć. U Wundta myśl o przedmiocie oznaczanym przez podmiot zdania była zespołem skojarzonych wrażeń lub wyobrażeń traktowanych jako całość. Z tego zespołu wyłączało się, według niego, jedno wyobrażenie przyporządkowane orzecznikowi. Powiązanie podmiotu i orzecznika było w ten sposób zagwarantowane przynależnością wyobrażenia orzecznikowego do zespołu wyobrażeń podmiotowych. Sigwart pojmował sprawy inaczej, uważał, że podmiot związany był z wrażeniami bezpośrednimi, a orzecznik z obrazem zapamiętanym.

Na podstawie tych dwóch przykładów szerokiej dyskusji, w której brali także udział Trendenlenburg, Windelband, Becker, Paul i Miklosich, rozpatrzmy psychologistyczne poglądy drugiej połowy XIX wieku.

Koncepcje te sprawiły poważne trudności przy tłumaczeniu sądów abstrakcyjnych, gdzie pojęcia: wrażenia lub wyobrażenia są raczej niestosowne. Ponadto sposób kojarzenia pojęć nie był przekonująco przedstawiony. Kojarzonym pojęciom abstrakcyjnym nie odpowiadają bezpośrednio przedmioty, które byłyby w styczności czasowej lub przestrzennej. Inny poważny brak tych koncepcji polegał na tym, że kojarzenie jest raczej procesem biernym, który odbywa się niejako automatycznie niezależnie od tego, czy dane skojarzenie jest nam potrzebne czy nie. Nie widać tu związku między tworzeniem skojarzeń i sądów, a potrzebami ludzkimi. Dopiero behawioryzm powiązał myśli z potrzebami ludzkimi. Asocjacjonizmowi zarzucono także, że nie daje gwarancji, iż ludzie będą posiadali podobne asocjacje i będą je łączyli z tymi samymi słowami. Tym samym podkreślono, że nie może on zapewnić jednoznaczności wyrażeń. Jak wiadomo, skojarzenia powstają dzięki wielokrotnemu zestawianiu kojarzonych przedmiotów. Ten mechanizm wydawał się nie do pogodzenia z umiejętnością tworzenia (i rozumienia) nowych zdań, których dotąd się nie słyszało i nie widziało. Wreszcie asocjacjonizm opierał swoje tezy na introspekcji. Ponieważ ta metoda uzasadniania twierdzeń psychologicznych nie dawała jednolitych i określonych wyników, uznano ją za bardzo mało wartościową. Tym samym twierdzenia asocjacjonizmu zostały pozbawione uzasadnienia. Do tych pretensji, kierowanych pod adresem samej istoty asocjacjonizmu można dodać dalsze uwagi dotyczące jego strony formalnej. Otóż koncepcje asocjacjonistyczne są bardzo nieokreślone i dla matematyka z tej racji zupełnie nieprzydatne. Wydaje się, że teoria znaczenia podstawowych terminów logiczno-matematycznych powinna być tak dalece dokładna i treściowo bogata, żeby na jej postawie dało się dedukcyjnie wyprowadzać wnioski interesujące matematyka.

Na podobne zarzuty narażony jest także behawioryzm, którego jednak nie dotyczy zarzut opierania się na introspekcji. Behawioryzm mniej zajmował się jednak tym, co nas najbardziej interesuje, a mianowicie znaczeniem terminów logicznych i matematycznych. Wynika to z predylekcji behawioryzmu do badań nad zwierzętami. Te zaś nie posługują się żadnymi terminami, nawet logiczno-matematycznymi.

PIAGET O POWSTAWANIU POJĘCIA KLASY

Według Piageta, umiejętności intelektualne ludzi nie są im dane w gotowej postaci przy urodzeniu, lecz rozwijają się w trakcie wykonywania coraz to nowych czynności i działań. Cechą charakterystyczną teorii Piageta jest łączenie umiejętności poznawczych m. in. z rozwojem motoryki.

Według niego, do pojęcia klasy, które nas tu interesuje, dochodzimy przez szereg etapów. Każdy wcześniejszy jest warunkiem koniecznym przejścia do następnego. Z pierwocinami umiejętności tworzenia pojęcia klasy mamy do czynienia wtedy, gdy dziecko (do lat 2) jest w stanie rejestrować korzystne dla siebie odruchy i powtarzać je. Ten bardzo pierwotny mechanizm jest o tyle ważny, że nie ginie on w późniejszych etapach rozwojowych, lecz jest tylko rozwijany, uzupełniany itd. Świadczy to o tym, że tworzenie pojęcia klasy w późniejszych etapach również dzieje się w imię potrzeb organizmu. Nieco później dziecko tworzy pierwsze prymitywne pojęcie klasy, tj. zalicza przedmioty do jakiejś całości, ale nie rozumie jeszcze stosunku elementu do tej całości. W tym okresie nie potrafi ono jeszcze odróżnić owej całości od elementu, po prostu przedmioty o danych cechach wywołują pewną jednolitą reakcję u dziecka. Na następnym, wyższym etapie dziecko już wyraźnie odróżnia klasę od elementu, dysponuje bowiem jednym sposobem reagowania na wszystkie elementy klasy i całą gamą reakcji odmiennych na poszczególne elementy. Pierwsza reakcja konstytuuje, wyróżnia zbiór; reakcje drugiego rodzaju wyróżniają elementy zbioru. Jednak i te umiejętności nie wystarczają dla utworzenia pełnego pojęcia zbioru. Właściwe pojęcie zbioru powstaje wówczas, gdy dziecko w pełni rozumie, że ułożenie fizyczne elementów nie decyduje o zbiorze, a także wówczas, gdy rozumie, że w ogóle nie trzeba gromadzić przedmiotów w jednym miejscu, aby mieć do czynienia ze zbiorem.

Zdaniem Piageta, ten ostatni etap tworzenia pojęcia zbioru pojawia się, gdy dziecko nabywa umiejętości internalizowania czynności, a w szczególności opanowuje umiejętność internalizowania czynności gromadzenia przedmiotów drogą ich kolejnego dokładania Czynność gromadzenia przez dokładanie jest dla Piageta odwracalna, tj. można od zbioru odejmować przedmioty i znowu je dokładać do tego samego ugrupowania. Możliwość odwracania decyduje o tym, że miejsce w ugrupowaniu fizycznym jest obojętne. Gdy czynność fizycznego gromadzenia zostaje zinternalizowana, staje się ona eksperymentem myślowym. Ujmuje się ją wtedy jako czynność dającą się zawsze wykonać. Nie ma już wtedy bowiem fizycznych przeszkód w gromadzeniu przedmiotów, takich jak ciężar, wielkość, wzajemna odległość itp. Internalizacja m. in. umożliwia gromadzenie zbiorów i tworzenie rodzin zbiorów, fizycznie zaś nie da się gromadzić zbiorów abstrakcyjnych. W trakcie zinternalizowanego tworzenia zbiorów operujemy nie przedmiotami i nie ich wyobrażeniami, lecz ich symbolami. Symbolizacja jest warunkiem swobodnego operowania klasami i równocześnie jest sposobem wyróżniania zbiorów. W przypadku klas abstrakcyjnych jest to jedyna metoda ich wyróżniania.

Pogląd Piageta, który został tu skrótowo naszkicowany, wiąże tworzenie pojęcia zbioru z fizyczną czynnością dokładania przedmiotów do siebie. To ujęcie ma szereg zalet. Stanowi mianowice odejście od pasywistycznego punktu widzenia asocjacjonistów. Nie ogranicza tworzenia klas przeciwnie — dopuszcza tworzenie coraz bardziej abstrakcyjnych zbiorów przy pomocy zinternalizowanego dokładania. Nie wiąże tworzenia pojęcia klasy z samym wyróżnianiem przedmiotów (trzeba je dokładać, aby powstała klasa). Wreszcie Piaget — o czym jeszcze nie mówiono— nie wyklucza możliwości tworzenia klas przy pomocy dodatkowych czynności, w miarę jak z rozwojem nauki takie czynności będą się pojawiały. Krótko, metody tworzenia zbiorów nie są raz na zawsze ustalone i mogą się rozwijać. Rezultaty, do których doszedł Piaget, nie opierają się na danych introspekcyjnych, lecz na obserwacji dzieci, którym zręcznie podsuwano do rozwiązania odpowiednie zadania.

Wszystkie te cechy teorii Piageta powodują, że góruje ona znacznie nad wcześniejszymi koncepcjami, chociaż nie jest do końca dopracowana. Nadal bowiem matematyk nie potrafiłby formalnie utworzyć ani jednej klasy, mając wyżej podane wskazówki budowania zbiorów. Te momenty koncepcji Piageta, które precyzyjnie przedstawił Grize, wystarczają jedynie dla budowy elementarnej teorii klas; przedstawione metody tworzenia pojęcia zbioru nie wystarczają dla skonstruowania tych wszystkich pojęć, które faktycznie wprowadza się w teorii mnogości. Wobec tego, problem bardziej formalnego przedstawienia teorii Piageta jest otwarty. Jest to problem ważny, a jego rozwiązania obiecujące. Wolno i należy więc bliżej zająć się poglądami badacza.

PRÓBA DOKŁADNIEJSZEGO UJĘCIA KONCEPCJI PIAGETA

METODA POSTĘPOWANIA

Piaget uzależnia stworzenie pojęcia klasy od wyróżnienia jej elementów i od zinternalizowanego zgromadzenia ich. Jeśli chcemy zatem dokładniej sformułować teorię Piageta, trzeba bliżej scharakteryzować czynność gromadzenia przedmiotów drogą kolejnego dokładania. Pojęcie to można zdefiniować lub scharakteryzować przez podanie typowych, ogólnych twierdzeń dotyczących dokładania. Ten drugi sposób to nic innego, jak określenie metodą postulatów (aksjomatów). Wydaje się, że tylko ta druga metoda postępowania może znaleźć tutaj zastosowanie. Twierdzenia Piageta poddane odpowiedniej przeróbce interpretacyjnej będą stanowiły ową aksjomatyczną charakterystykę, na której nam zależy. W twierdzeniach charakteryzujących gromadzenie będą występowały, oprócz terminu odnoszącego się do dokładania, jedynie spójniki rachunku zdań, kwantyfikatory ze zmiennymi jednego tylko typu oraz predykatowe litery schematyczne (nie kwantyfikowane).

W trakcie precyzowania idei Piageta trzeba będzie uzupełnić wiele momentów nie wypowiedzianych *explicite* w jego pracach. Niekiedy chodzi o sprawy stosunkowo proste: na ogół w wypowiedziach sformułowanych w języku etnicznym nie zaznacza się pedantycznie kwantyfikacji, którą tu trzeba będzie uzupełnić zgodnie z ogólną tendencją sformułowań Piageta. Jednak już na tym etapie dopełniania koncepcji Piageta zawsze powstają wątpliwości, jaka jest ta ogólna tendencja i które z możliwych uzupełnień należy wprowadzić. Gdy sprawa będzie dotyczyła zagadnień ważniejszych, a nawet kluczowych, busolą postępowania będzie przede wszystkim dążenie do niesprzeczności z tym, co wyraźnie zostało powiedziane przez niego.

Dodatkowo będziemy kierować się następującą wytyczną. Weźmiemy pod uwagę kilka przykładów fizycznego dokładania i na ich podstawie wprowadzimy uogólnienia — prawa dokładania zinternalizowanego. Przyjmiemy przy tym, o czym już wspomniano, że dokładanie zinternalizowane różni się od zwykłego, fizycznego dokładania brakiem ograniczeń związanych z naszą wydolnością fizyczną; w przypadku dokładania zinternalizowanego ciężar i wielkość dokładanych przedmiotów nie odgrywają roli, podobnie odległości dokładanych przedmiotów i czas, w którym się to dokonuje.

W pewnym przypadku powołamy się na Piagetowską koncepcję asymilacji, polegającą najogólniej na tym, że najpierw staramy się dostosować wszystkie nasze czynności do wypracowanych schematów działań, dopiero później, w przypadku natrafienia na trudności przy stosowaniu schematu, poddajemy go przeróbce. Powołanie się na tę zasadę pozwoli ustalić bardzo istotną prawidłowość dokładania.

Mimo uzupełnień, które zostaną wprowadzone, opis prawidłowości dokładania będzie ogólnikowy. Nie chodzi bowiem o wyczerpujące ujęcie prawidłowości, lecz o uchwycenie tych jego cech, które wystarczają do scharakteryzowania zbioru i należenia do zbioru. Nie należy więc oczekiwać, że podane prawidłowości dokładania jednoznacznie wyróżnią tę czynność spośród innych.

Ze względu na ogólnikowość przedstawionego szkicu poglądów Piageta i dosyć licznych dodatków, za które może Piaget nie chciałby wziąć odpowiedzialności, artykułu nie należy pojmować jako rozprawy o walorach historycznych.

Wydaje się, że Piaget jest konceptualistą, tj. że klasy są dla niego wytworami ludzkiego umysłowego działania. Klasa i pojęcie klasy sprowadza się więc u niego do tego samego (oczywiście świadomość operowania pojęciem klasy jest czym innym niż samo pojęcie klasy). Odpowiednio do tego pojmowania klasy mówiliśmy zamiennie „klasa" ewentualnie „zbiór" i „pojęcie klasy (zbioru)".

TERMINOLOGIA

W następnych partiach niniejszego szkicu będziemy nieustannie mówili o dokładaniu. Aby wypowiedzi były pełniejsze, wprowadzimy dwa zwroty: *osoba* v *dokłada przedmiot* x *do przedmiotu* y, *otrzymując przedmiot* z, lub krótszy: *przedmiot* x *dołożony do przedmiotu* y *daje przedmiot* z. W obu przypadkach słowo „przedmiot" powinno być pojęte jak najbardziej ogólnie (Meinongowsko). Przy tym znaczeniu nie tylko konkretne rzeczy są przedmiotami, ale także ludzie, zbiory, cechy itp. Skrótami tych zwrotów są: $D(v,x,y,z)$ i $D(x,y,z)$. Ponieważ nie zdarzy się w naszych rozważaniach, że dwie różne osoby będą dokładały przedmioty, nigdy też nie będzie wchodziła w grę kwantyfikacja egzystencjalna zmiennej osobowej; jest ona zbyteczna. Można zatem ograniczyć się do zwięźlejszego z wymienionych skrótów. Choć nie zachodzi między nimi żadna różnica logiczna, pod względem psychologicznym są odmienne. Pierwszym zwrotem będzie się posługiwała osoba, która sama nic nie dokładając, obserwuje jak ktoś, czyli v, to robi. Krótszy zwrot służy raczej temu, żeby posługiwała się nim osoba, która sama dokłada przedmioty i zwraca na nie uwagę, a nie na swoje czynności i na siebie. Konsekwencje tej psychologicznej różnicy między tymi zwrotami zostaną omówione we wnioskach artykułu.

Wśród tez Piageta znajduje się twierdzenie głoszące, że warunkiem dokładania przedmiotów jest ich wyróżnienie (uprzednie rozpoznanie). Należałoby więc przyjąć stosowny zwrot, nieco dokładniej ujmujący intuicje, np.: *dla osoby* v *przdmiot* x *jest wyróżnony przez cechę* P. Jednak i w tym przypadku możemy zrezygnować z uwidocznienia zmiennej osobowej i przyjąć uproszczoną formułę: x *wyróżnione jest przez* P. Dla tego zwrotu przyjmiemy skrót $P(\ldots x \ldots)$. Ponieważ naszą uwagę skoncentrujemy na charakteryzowaniu dokładania, zwrot ten pozostanie bez bliższych określeń.

Wśród cech wyróżniających przedmioty najbardziej interesować nas będą te, które są związane z możliwością gromadzenia przedmiotów i budowania przy ich pomocy nowych konstrukcji, choć inne cechy nie są wykluczone. Cechy związane z możliwością zestawiania ich w nowe twory są tu specjalnie cenione, gdyż — jak już zaznaczono — przyjęto tezę, że poznajemy rzeczywistość nie przez bierną obserwację, lecz przy pomocy wysiłków przekształcania rzeczywistości. Zatem wszystkie cechy związane z konstruowaniem przedmiotów, a przede wszystkim dokładalność przedmiotów, jako cecha podstawowa pozwalająca gromadzić cechy, jest tu osobno wyróżniona.

Według Piageta, klasa powstaje przez dokładanie jednych przedmiotów do drugich. Przedmiot x jest więc elementem klasy y, gdy x zostało do czegoś dodane (np. do z). Może zajść także inna ewentualność polegająca na tym, że klasa y powstała przed dodanie czegoś (np. x') do z, x zaś tkwi w owym z, które powstało przez dodanie x do jeszcze czegoś innego. Daje to następującą definicję:

D_1 $x\varepsilon y \equiv V_z D(x,z,y) v V_{x',z,z'} [D(x',z,y) \wedge D(x,z',z)]$.

Definicja ta jest redundantna. W świetle aksjomatu, który przyjmiemy, okaże się, że jej *definiens* sprowadza się po prostu do jej pierwszego członu, czyli do pierwszego członu alternatywy będącej *definiensem:*

D_2 $x\varepsilon y \equiv V_z D(x,z,y)$.

Do tych dwóch definicji dodajmy określenie indywiduum, gdyż z pojęcia indywiduum będziemy zaraz korzystali. W naszej skromnej terminologii indywiduum można określić jako taki przedmiot, który jest pierwotny w tym sensie, że nie powstał przez dokładanie do siebie przedmiotów, ale jednocześnie może być dokładany. Te uwagi pozwalają zaproponować następującą definicję:

D_3 $Ind(x) \equiv \sim V_{y,z}[y \neq x \wedge z \neq x \wedge D(y,z,x)] \wedge V_{y,z} D(x,y,z)$.

CHARAKTERYSTYKA DOKŁADANIA

Aby tę czynność bliżej określić, można np. rozłożyć ją na czynności prostsze i przedstawić jako splot tych prostych czynności. Można także starać się dać odpowiedź na pytania: 1) co można dokładać? 2) czego nie można dokładać? 3) po spełnieniu jakich warunków potrafimy dokładać? 4) jakie podstawowe warunki spełniają rezultaty dokładania? W naszych rozważaniach będziemy odpowiadali ogólnie jedynie na pytania 1—4.

A. Jakie przedmioty dokładamy zatem? Fizycznie dokładamy przedmioty, które są z punktu naszych fizycznych możliwości indywiduami, np. kamienie. W sposób zinternalizowany dokładamy także i przedmioty abstrakcyjne. Na razie jednak przyjmijmy, że potrafimy dokładać przedmioty indywidualne:

T_1 $Ind(x) \rightarrow V_{y,z} D(x,y,z)$.

Teza ta, głosząca, że każde indywiduum bywa dokładane, oczywiście wykracza daleko poza to, czego potrafimy fizycznie wykonać. Wykracza nawet poza to, czego potrafimy faktycznie dokonać w sposób zinternalizowany, choć przy pomocy tej ostatniej czynności potrafimy zestawić nawet całe globy. Teza pierwsza wskazuje, że „bywa dokładane" należy rozumieć jak wyrażenie: „potrafimy potencjalnie dokładać w zinternalizowany sposób". Jest to kolejne uogólnienie zwykłego dokładania fizycznego.

Jeśli pierwszą tezę uzupełnimy tezą egzystencjalną, że istnieją indywidua

T_2 $V_x Ind(x)$,

to łatwo dojdziemy do wniosku, że potrafimy dokładać (że bywa, iż dokładamy). Jak łatwo spostrzec, pierwsze twierdzenie nie rozwiązuje w pełni problemy, co potrafimy dokładać.

B. Dalszą częściową odpowiedź na pytanie, co można dokładać, sugeruje pospolite doświadczenie każdego człowieka, polegające na tym, że gdy pewne przedmioty kiedyś dokładał, to potrafił je później dokładać w układ, który w danej chwili był mu potrzebny. Krócej, przedmioty dokładalne dają się dokładać w określone zestawy. U podstaw tego twierdzenia leżą doświadczenia nabyte bardzo wcześnie w czasie zabaw dziecięcych, wytwarzające przekonanie, że potrafimy do woli zestawiać przedmioty, które już raz udało się ruszyć i zestawić z innymi. Oczywiście fizyczne dokładanie tego typu jest stosunkowo bardzo ograniczone, ale gdy następnie w dokładaniu zinternalizowanym operujemy wyobrażeniami zwykłymi lub symbolicznymi, to możliwość dokładania przedmiotów już raz dołożonych zostaje istotnie wzbogacona. Jeśli więc przedmioty x były dołożone i są wyróżnione przez P, to istnieje zbiór u, do którego należy x i który posiada jako elementy jedynie przedmioty x' wyróżniające się cechą P. Krócej zapisane daje to twierdzenie T_3:

$$T_3 \quad V_{z,y}D(x,y,z) \wedge P(\dots x \dots) \rightarrow V_u \{V_{y'}D(x,y,'u) \wedge \bigwedge_{x'z'}[D(x,'z,'u) \rightarrow P(\dots x' \dots)]\}.$$

C. Nadal nie potrafimy w pełni odpowiedzieć na pytanie: co można dokładać? Dotąd bowiem wiemy, że można to czynić z indywiduami i z ewentualnymi przedmiotami, które dało się już dołożyć. Które jednak przedmioty można dokładać? Na przykład, czy potrafimy wstępnie dokładać zestawy indywiduów? Jeśli zestawy indywiduów są pewnymi fizycznymi całościami, to potrafimy to robić. Mimo że taki zestaw potrafimy w każdej chwili rozłożyć na elementarne składniki, w trakcie dokładania zachowuje się on (lub my w stosunku do niego) jak przedmiot indywidualny i w tym charakterze można go dokładać. Czy jednak każdy zbiór indywiduów (nawet nie posiadający charakteru całości fizycznej) możemy dokładać w sposób zinternalizowany? Jeśli tak, to jaki jest mechanizm psychologiczny, który doprowadza nas do tak istotnego odejścia od bezpośredniego doświadczenia. Aby odpowiedzieć na pytanie, przejdźmy do spraw pozornie nie związanych z obecnym problemem.

Piaget twierdzi, że nim człowiek w rozwoju osobniczym dojdzie do poziomu, który pozwala mu dokładać i zestawiać ze sobą przedmioty, to musi je umieć wyróżniać. Twierdzenie to nie budzi zastrzeżeń. Wolno przypuszczać, że nie tylko dokładane przedmioty potrafimy wyróżnić, ale także to, do czego dokładamy, i sam rezultat dokładania. W szczególności potrafimy to robić wtedy, gdy wyróżniamy rezultat dokładania po prostu werbalnie: „to, co otrzymuję przez dodanie". Wtedy nie musimy mieć żadnego dalszego rozeznania cech rezultatu dokładania. Tego typu wyróżnianie jest pospolite w przypadku dokładania zinternalizowanego, gdzie rezultat nie jest ani widoczny, ani w inny sposób dostrzegalny. Powyższe uwagi dają się ująć w następujący sposób:

$$T_4 \quad D(x,y,z) \rightarrow V_{i,j,k}[P_i(\dots x \dots) \wedge P_j(\dots y \dots) \wedge P_k(\dots z \dots)].$$

Zawsze więc, gdy mamy do czynienia z dokładaniem przedmiotów, koniecznym tego warunkiem jest ich wyróżnienie.

Twierdzenie czwarte nasuwa natychmiast pytanie, czy (odwrotnie do niego) wyróżnienie przedmiotów natychmiast nie uzdolnia nas do ich dokładania. Gdybyśmy i to twierdzenie przyjęli, to dokładanie przedmiotów stałoby się równoważne ich wyróżnianiu. Wtedy doszlibyśmy do koncepcji bardzo podobnej do tej, jaką przedstawił Cantor, który uważał, że zawsze wyróżnianie przedmiotów pozwala utworzyć stosowny zbiór: „Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung *M* von bestimmten wohlunterschieden Objekten *m* zu einem Ganzen". Jak wiadomo, przyjęcie, że każda cecha wyróżniająca (każda funkcja) wyznacza zbiór, stało się przyczyną paradoksów teoriomnogościowych w teorii mnogości Cantora. Gdybyśmy przyjęli zasadę, że wyróżnianie pociąga za sobą dokładanie a więc i należenie do zbioru, również bylibyśmy narażeni na paradoksy. Jednak Piaget należenie do klasy sprowadza do dokładania, które odróżnia od wyróżniania. Zatem nie można więcej przyjąć niż T_4.

D. Z drugiej jednak strony dokładaniu stale towarzyszy wyróżnianie przedmiotów dokładanych i wyróżnianie rezultatu dokonanego gromadzenia. Zgodnie z zasadą asymilacji, wyróżnienie klas indywiduów (jako rezultatu dokładania) powinno więc doprowadzić do możliwości ich dokładania. Podstawowa idea zasady asymilacji sprowadza się do tego, że raz urobione pożyteczne schematy są stosowane bez zmiany tak długo, aż wyraźne niepowodzenia zmuszają do ich modyfikacji. Skoro więc działanie przebiegało pomyślnie, tzn. w ten sposób, że najpierw zostały wyróżnione indywidua, które można było później dokładać, to po wyróżnieniu klas indywiduów powinna powstać możliwość dokładania powstałych w ten sposób zbiorów. Ten sam schemat powinien regulować dalsze nasze postępowanie z rezultatami dokładania, czyli klasami, o ile nie powstaną trudności wymuszające zmianę schematu.

Spróbujmy dokładniej sformułować schemat, który zgodnie z zasadą asymilacji powinien powstać na podstawie pomyślnego dokładania indywiduów i powstawania w ten sposób wyróżnionych zbiorów. Otóż w opisanym przypadku mamy do czynienia z szeregiem indywiduów $(x_1, x_2 \dots x_n)$, o których wiemy, że były już gdzieś dokładane; dodatkowo możemy mieć jeszcze kilka indywiduów w, o których nie potrafimy na podstawie własnego doświadczenia orzec, że były już kiedyś dokładane. Z obu tych rodzajów indywiduów wyróżnionych w jakiś sposób $(P(x_1, \dots, w, \dots, x_n))$ możemy utworzyć zbiór u i ten powinien być dokładalny, skoro na mocy T_4 jest wyróżnialny tak, jak dokładalne indywidua. Gdy przedmioty w są indywiduami, choć sami nie dokładaliśmy ich jeszcze, to z uwagi na T_1 wiadomo, że są one dokładalne. Inaczej rzecz się ma w przypadku dowolnych przedmiotów w. Schemat w tym punkcie może zawieść i trzeba zatem wysunąć zastrzeżenie, iż brak wiedzy co do dokładalności przedmiotów nie może stworzyć komplikacji.

Ostatecznie otrzymujemy takie tymczasowe sformułowanie odpowiedzi na pytanie, co można dokładać, a w szczególności jakie rezultaty dokładań można również dokładać:

T'_5 (a) $V_{y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n}[D(x_1, y_1, z_1) \wedge \dots \wedge D(x_n, y_n, z_n)] \wedge$
(x$_1$ ... x_n są dokładalne)

(b) $P(x_1, \dots, w, \dots, x_n) \wedge$
(przedmioty $x_1 \dots x_n$ i bliżej nie znany co do dokładalności przedmiot w są wyróżnione ze względu na P)

(c) *Charakterystyka przedmiotu w: $P(x_1, \dots, w, \dots, x_n)$ nie stwarza komplikacji* (tymczasowe sformułowanie) $\rightarrow$

(d) $V_{v, v,, u}[D(u, v, v') \wedge$
(istnieje dokładalne u, które)

(e) $\bigwedge_m (V_{w''} D(m, w'', u) \equiv V_{u'} \{ V_{u''} D(m, u'', u') \wedge$
$\bigwedge_w [V_{w'} D(w, w', u') \rightarrow P(x_1, \dots, w, \dots, x_n)] \}$
(jest identyczne z u' będące rezultatem dokładania samych przedmiotów wyróżnionych przez P)

To samo krócej i przejrzyściej:

T'_5 $V_{y_1, \dots y_n, z_1 \dots, z_n}[D(x_1, y_1, z_1) \wedge \dots \wedge D(x_n, y_n, z_n)] \wedge$
$\wedge P(x_1, \dots, w, \dots, x_n) \wedge P(x_1, \dots, w. , \dots, x_n)$ *nie prowadzi do trudności* $\rightarrow$
$\rightarrow V_{v, v,, u}[D(u, v, v') \wedge \bigwedge_m (V_{w''} D(m, w'' u) \equiv V_{u'} \{ V_{u''} D(m, u'', u') \wedge$
$\bigwedge_w [V_{w'} D(w, w', u') \rightarrow P(x_1 \dots, w, \dots, x_n)] \}$.

E. Aby do końca ustalić, kiedy można dokładać rezultaty wcześniejszych dokładań, musimy zastanowić się nad tym, kiedy mogą powstać komplikacje w trakcie dokładania.

Tak jak poprzednio, przypatrzmy się przykładowemu dokładaniu fizycznemu, które następnie odpowiednio uogólnimy, przechodząc do dokładania zinternalizowanego. Wyobraźmy sobie, że dziecko zgromadziło (drogą dokładania) krążki żółte na kwadracie. Zielone krążki zostały zgromadzone na innym kwadracie. Czerwone krążki znalazły się na trzecim kwadracie. Odpowiednie trójkąciki żółte, zielone i czerwone znalazły miejsce na odpowiednich trzech pięciokątach. Kwadraty i pięciokąty łącznie ze zgromadzonymi na nich przedmiotami są odpowiednio fizycznymi zbiorami krążków o różnych kolorach i trójkątów o tych samych kolorach. Przypuśćmy, że z kolei dziecko umieściło wszystkie trzy kwadraty (razem ze znajdującymi się na nich krążkami) na jednym owalu, który stanowi tu zbiór fizyczny kwadratów. Jeśli teraz dziecko otrzyma zadanie, aby owal umieścić na krążku, tj. otrzyma instrukcję, aby krążek potraktować jako zbiór owali, to zadania tego nie wykona, chyba że zmieni jeden ze zbiorów krążków, czyli jeden kwadrat, zdejmując z niego krążek. Wtedy wszakże jeden z kwadratów zmieni swój charakter i zmieni także charakter owal, gdyż będzie zawierał jeden inny niż poprzednio element.

Ten przykład fizycznego dokładania i tworzenia zbiorów ilustrowanych fizycznymi ciałami (kwadraty, pięciokąty, owale) przedstawia pewną niemożliwość, bardziej zasadniczą niż ciężar, wielkość itp. Ta niemożliwość polega na tym, że jeden i ten sam krążek nie może być jednocześnie w dwóch różnych miejscach: pod owalem i na kwadracie, który jest na owalu. Przytoczony przykład daje podstawę dla następującego twierdzenia:

$T_6 \quad \sim[D(x_1,y_1,z_1) \wedge D(z_1,y_2,z_2) \wedge D(z_2,y_3,z_3) \wedge \ldots \wedge D(z_{n-1},y_n,x)]$.

Podany przykład sugeruje przyjęcie T_6, ale posiada bardzo istotną wadę: dotyczy zestawów fizycznych znajdujących się na konkretnych fizycznych przedmiotach ułatwiających przenoszenie zestawu i jego dokładanie. W podanym przykładzie niemożliwość dokładania spowodowane jest w głównej mierze fizycznym charakterem nosicieli zestawów. W jakim stopniu wolno nam te trudności przenieść na dokładanie zinternalizowane, w którym nie ma takich „tac” jak kwadraty i pięciokąty? Odpowiedź na to pytanie będzie zależała od dokładnego sprecyzowania internalizowania. To zadanie jednak przerasta daleko ramy niniejszego studium i musi pozostać nie rozwiązane aż do podjęcia tematu w osobnych rozważaniach. Na razie możemy przyjąć jedynie tymczasową propozycję wyjścia z dylematu. Jak już powiedziano, w zinternalizowanym dokładaniu nie odgrywają roli takie fizyczne wielkości jak ciężar, rozmieszczenie dokładanych przedmiotów, czas ich dokładania, siły wiążące przedmioty lub je odpychające. Pozostaje do uwzględnienia tylko to, że myślowo zostały tak zgromadzone, że stają się nową całością. Wyobrażenia, które mogą wiązać się z utworzeniem nowej całości są raczej nieważne. Otóż, jeśli tak ujmiemy internalizowanie dokładania, to T_6 pozostanie ważne dla dokładania zinternalizowanego, tworzenie bowiem nowej całości z całości, jakimi są układy krążków, dokonuje się sukcesywnie; zakłada utworzenie najpierw układów krążków, a później dopiero zestawu tych wcześniejszych układów. Nie sposób zatem pojąć krążka jako zbioru późniejszych zestawów, gdyż krążek musi stać do dyspozycji, gdy późniejszych tworów jeszcze nie ma. Nie można dokładać przedmiotów, których ze względu na niewykonanie dokładania jeszcze nie ma.

Te niepełne uwagi muszą nam obecnie wystarczyć; sugerują one, że przytoczona ilustracja dostatecznie uzasadnia T_6. Twierdzenie T_6 przyjmujemy zatem jako jedną z charakterystyk dokładania.

Weźmy teraz pod uwagę następny przykład z zakresu zadań, które można zlecić dziecku (dobór tego typu przykładów jest pewnym naśladownictwem Piageta). Krążki (5 sztuk) są zgromadzone w jeden zbiór i znajdują się na trójkącie. Kwadraty (5 sztuk) są podobnie zebrane i znajdują się na innym trójkącie. Z kolei trójkąty układamy na owalu. Powstaje pytanie, czy krążki znajdują się na owalu? (jest to pytanie o przechodniość należenia do zbioru). Czysto fizycznie nie jest to możliwe. Żeby tej sztuki dokonać, trzeba krążki zabrać z trójkąta, ale wtedy ów trójkąt zmieni swój charakter i przestanie być nosicielem pięciu krążków. Wtedy także owal zmieni swój charakter, gdyż nie będzie uosabniał zbioru dwóch dotychczasowych trójkątów — zestawów po pięć elementów. Mamy więc odpowiedź na postawione pytanie, ale tylko w odniesieniu do gromadzenia (dokładania) fizycznego przedmiotów. Sprawa jest otwarta odnośnie do dokładania zinternalizowanego. Zauważmy we wstępie do odpowiedzi na tę kwestię, że jeśli zbiór owalowy (tak dla krótkości nazywam zbiór powstały przez dobranie dwóch zbiorów odpowiednio krążków i kwadratów i dołożenie ewentualnych dalszych przedmiotów) będzie mógł także posiadać krążki, to zbiór trójkątowy będzie zawarty w zbiorze owalowym, krążki bowiem będą w jednym i drugim zbiorze. Wtedy należenie do zbioru będzie w tym przypadku równoważne zawieraniu się.

Przejdźmy do udzielania właściwej odpowiedzi na pytanie, czy przedmiot należący np. do zbioru A może należeć do rodziny zbiorów, do której należy A. Jak wiemy, zbiory powstają przez dokładanie: ono konstytuuje zbiór. Rodziny zbiorów tworzymy przez dodanie dwóch zbiorów jako pewnych całości. Tak się rzecz przedstawia również w przypadku dokładania zinternalizowanego. Aby tę rodzinę zbiorów wzbogacić, trzeba dokonać dalszych aktów dokładania. Gdy jednak dokładamy przedmioty, to musimy je skądś brać. W naszym przykładzie musimy ująć przedmioty ze zbioru A, który tym samym przestaje istnieć w dotychczasowym kształcie. Ponieważ w dokładaniu zinternalizowanym czas nie odgrywa roli, zbiór A jest ukonstytuowany i jednocześnie pozbawiony elementów; jest sprzeczny. Podobnie jak poprzednio, musimy się zadowolić tą odpowiedzią, brak bowiem pełnego rozeznania w sprawie internalizacji.

To, co opisano w przykładzie ujmijmy obecnie ogólnie:

$$\sim[D(x,v_1,y) \wedge D(y,v_2,z) \wedge D(x,v_3,z)]$$

lub jeszcze bardziej ogólnie:

$$T_7 \quad \sim[D(x,v_1,y_1) \wedge D(y_1,v_2,y_2) \wedge \ldots \wedge D(x,v_n,y_n)] .$$

F. Twierdzenie T_6 sprowadza się do tego, że nie jesteśmy w stanie dokładać w sposób zinternalizowany metodą kołową. Twierdzenie T_7 głosi, że nie potrafimy tego robić w sposób skokowy. Gdy zastosuje się definicję D_2 do T_6 i T_7, otrzymamy formuły bardziej uwidoczniające wspomnianą kołowość i przeskokowość:

$$T'_6 \quad \sim(x\varepsilon z_1 \wedge z_1\varepsilon z_2 \ldots \wedge z_n\varepsilon x) \qquad T'_7 \quad \sim(x\varepsilon y_1 \wedge \ldots\, y_1\varepsilon y_2 \wedge \ldots \wedge x\varepsilon y_n) .$$

Gdy teraz spojrzymy na T'_6 i T'_7, to stanie się jawne, że obie formuły są nie stratyfikowane w normalnym, Quinowskim tego słowa znaczeniu.

Twierdzenia T'_6 i T'_7 świadczą o tym, że nie potrafimy gromadzić zbiorów, których opis tworzenia jest nie stratyfikowany. Sam opis jest dla nas w pełni zrozumiały i gramatycznie sensowny, choć ostatniemu znakowi należenia w omawianych twierdzeniach nie jest przyporządkowana żadna czynność dokładania, która jest w tym przypadku niemożliwa. Wolno nam więc posługiwać się wypowiedziami nie stratyfikowanymi, ale nie potrafimy powiązać z nimi żadnego dokładania. Sytuacja jest tu odmienna niż w teorii typów, gdzie wypowiedzi nie stratyfikowane — mocą decyzji twórcy systemu — są pozbawione sensu syntaktycznego.

Jak powiedzieliśmy, zbiór powstaje przez dokładanie. Staraliśmy się znaleźć warunki dokładalności tak rozumianych zbiorów. Wstępnie zostały one podane w T'$_5$. Obecnie możemy uzupełnić tymczasowy warunek poprzednika T'$_5$. Zaznaczyliśmy tam, że będzie można utworzyć pewien interesujący nas zbiór u, o ile wyróżnienie jego elementów nie stworzy trudności. Obecnie można dopowiedzieć, że utworzymy zbiór u, o ile jego elementy nie będą dokładane w sposób kołowy lub przeskokowy — lub inaczej — o ile zdanie wyróżniające $P(x_1 ..., w, ... x_n)$ elementy zbioru u nie będzie nie stratyfikowane. Po prostu można utworzyć zbiór u, o ile powstaje on przez wykonalne dla nas dokładanie zinternalizowane. Twierdzenie T'$_5$ może uzyskać obecnie ostateczną postać:

T''$_5$ $V_{y_1, ... y_n, z_1 ... z_n}[D(x_1, y_1, z_1) \wedge ... \wedge D(x_n, y_n, z_n)] \wedge P(x_1, ..., w, ..., x_n) \wedge$
y"$P(x_1, ..., w, ... x_n)$" *jest stratyfikowane* $\rightarrow$
$V_{v, v', u}[D(u, v, v') \wedge \bigwedge_m (V_{w''} D(m, w'', u) \equiv$
$\equiv V_{u'} \{V_{u''} D(m, u'', u') \wedge \bigwedge_w [V_{w'} D(w, w', u') \rightarrow P(x_1 ..., w, ... x_n)].\})]$.

W T'$_5$ jeszcze jedna sprawa wymaga pewnego komentarza. Nie wyjaśniono, dlaczego zamiast zaznaczenia, że $P(x_1, ..., w, ..., x_n)$ musi być zgodnie z T$_6$ i T$_7$, wprowadzony metajęzykowy odpowiednik takiego sformułowania: „$P(x_1, ..., w, ... x_n)$ jest stratyfikowane". Jak powiedziano, nie potrafimy dokładać w sposób kołowy lub przeskokowy. Żadna wypowiedź nie stratyfikowana nie posiada odpowiednika w postaci dokonanej czynności dokładania. Twierdzenia T$_6$ i T$_7$ są nie stratyfikowane. Nie potrafimy zatem utworzyć zbioru przez dokładanie, który by spełniał T$_6$ i T$_7$. Stąd T$_6$ i T$_7$ nie są pożądane w T''$_5$, gdzie powinien być podany warunek możliwy do zrealizowania.

G. Dotychczas odpowiedzieliśmy przynajmniej częściowo na dwa pytania: co można dokładać i czego nie da się dokładać. Wypada teraz odpowiedzieć na pytanie, jakie są rezultaty dokładania.

Człowiek w młodości nabiera wielu doświadczeń dotyczących dokładania. Na przykład dziecko, które wybrało z pudła klocki, buduje zamek, następnie burzy go, a klocki składa do pudła. Następnego dnia z tych samych klocków konstruuje most, znowu po zabawie układa klocki w pudle, aby trzeciego dnia znowu zbudować zamek. Okazuje się, że kolejność wkładania klocków do pudła nie ma wpływu na możliwość budowania z klocków dowolnych układów. Tym samym zbiór, jako rezultat dokładania, nie zależy od kolejności dokładania przedmiotów (o ile istnienie jednych nie zależy od wcześniejszego dokładania innych przedmiotów. Por. w tej sprawie uwagi wprowadzające T$_6$). Uważamy, że tym bardziej dotyczy to nie tylko dokładania fizycznego, ale w szczególności dokładania zinternalizowanego, które nie jest skrępowane wieloma ograniczeniami fizycznymi. Zgodnie z tym możemy przyjąć, co następuje.

Jeżeli więc klasa y powstała przez zestawienie ze sobą przedmiotów x' i z, przy czym z jest również zbiorem i ma jako element przedmiot x, to zawsze da się y otrzymać przez dodanie x do jakiegoś innego zbioru u. Inaczej mówiąc, jeśli y powstało ze zbioru z zawierającego x, to x jest bezpośrednio elementem y. Zamiast więc dodawać x do czegoś, aby utworzy zbiór z, który z kolei służy do zbudowania y, zawsze znajdzie się taka kolejność dodawania przedmiotów, że x będzie ostatnim dodanym przedmiotem. Jego dołożenie spowoduje uzupełnienie dotychczas zgromadzonego materiału do pełnego zbioru y. Rozważania te dają:

T_8 $D(x',z,y) \wedge D(x,z',z) \rightarrow V_u D(x,u,y)$

T_8 pozwala uprościć D_1 i sprowadzić do D_2.

Piaget w wielu miejscach zwraca uwagę, że dziecko nie dysponuje pełnym pojęciem klasy, jeśli uzależnia tożsamość klasy od kolejności dodawania przedmiotów (nie opanowało jeszcze operacji odwrotnej do dokładania), od kształtu fizycznego uzyskanego ugrupowania (zbiory figuralne utworzone przez fizyczne, nie zinternalizowane dokładanie). Zwracaliśmy uwagę, że miejsce, w którym znajdują się aktualnie przedmioty nie ma wpływu na możliwość ich dokładania w sposób zinternalizowany. Jest to zrozumiałe, gdy weźmiemy pod uwagę, że osoba, która w myślach dokłada przedmioty, nie musi przebyć drogi od miejsca, w którym znajduje się przedmiot do miejsca, gdzie ma być złożony. Po prostu osoba ta zakłada, że droga ta jakoś została przebyta. Podobnie z czasem, w którym istnieje dokładny przedmiot i z czasem, w którym został połączony z innymi. Nie sposób obecnie omówić, jak jest możliwe tego typu pomijanie tych ważnych spraw w zinternalizowanym dokładaniu. O zinternalizowaniu wiemy po prostu za mało. Gdybyśmy jednak zebrali razem wszystkie uwagi dotyczące tego, co nie jest brane pod uwagę w zinternalizowanym dokładaniu, to zebrane razem, tworzą one pewną pozytywną charakterystykę klasy: zależy ona jedynie od swoich elementów. Uwagi Piageta należy teraz wyrazić w przyjętym przez nas języku. Zależność klasy jedynie od jej elementów można chyba następująco przedstawić. Gdy mamy do czynienia z pozornie dwoma różnymi zbiorami utworzonymi z tych samych przedmiotów, to muszą one być identyczne, czyli z każdym można czynić to samo, co z drugim, otrzymując ten sam rezultat. Tę myśl da się już prosto przedstawić. Ponieważ w naszym języku możemy mówić jedynie o dokładaniu przedmiotów (predykaty „P" są w zasadzie skrótami wypowiedzi, w których występują wyłącznie predykaty D i terminologia logiczna) i wyróżnianiu, zbiory o tych samych elementach tam samo dają się dokładać i wyróżniać:

T_9 $\bigwedge_{x,y}[D(x,y,z) \equiv D(x,y,u)] \rightarrow [D(u,w,w') \equiv D(z,w,w')] \wedge [D(w,u,w') \equiv$
$\equiv D(w,z,w') \wedge [P(x_1, ..., u, ..., x_n) \equiv P(x_1, ..., z, ..., x_n)]$.

Łatwo zauważyć, że T_9 z uwagi na literę schematyczną „P" jest schematem twierdzenia. T_9 stwierdza, że rezultaty dokładania są identyczne, gdy zostały utworzone dokładnie z tych samych przedmiotów. T_9 jest więc odpowiedzią na ostatnie pytanie postawione na początku paragrafu.

KONKLUZJE

TREŚĆ MATEMATYCZNA PODANYCH TWIERDZEŃ

Ponieważ nieustannie rezultaty dokładania nazywaliśmy zbiorami, już na tej podstawie można by przypuszczać, że twierdzenia, do których doszliśmy, posiadają pewną treść matematyczną. Ten punkt chcę obecnie nieco rozbudować Chcę ukazać, jak dalece niektóre przyjęte tezy przypominają znane skądinąd aksjomaty teoriomnogościowe. W tym celu będę wstawiał w niektórych przyjętych tu twierdzeniach wyrażenia typu $x \varepsilon y$ zamiast $V_z D(x,z,y)$. Będzie to zgodne z definicją D_2. W T_9 poprzednik zastąpimy równoważną formułą $\bigwedge_x [V_y D(x,y,z) \equiv V_y D(x,y,u)]$ i następnie człony tej równoważności zastąpimy ich odpowiednikami z D_2, otrzymując zmieniony poprzednik T_9: $\bigwedge_x (x \varepsilon z \equiv x \varepsilon u)$. Jest to twierdzenie o równozakresowości z i u. Z kolei, z pierwszego czynnika następnika otrzymujemy: $\bigwedge_{w'}[V_w D(u,w,w') \equiv D(z,w,w')]$, co da się na podstawie D_2 skrócić do $\bigwedge_{w'}(u\varepsilon w' \equiv z\varepsilon w')$.

Ostatecznie więc otrzymujemy:

T_{10} $\bigwedge_x(x\varepsilon z \equiv x\varepsilon u) \rightarrow \bigwedge_{w'}(u\varepsilon w' \equiv z\varepsilon w')$.

Jest to odpowiednik zasady ekstensjonalności.

Weźmy teraz pod uwagę T_3. Po zastąpieniu zwrotów dotyczących dokładania zwrotami dotyczącymi należenia elementu do zbioru, otrzymamy pochodne sformułowanie T_3, a mianowicie:

T_{11} $V_z[x\varepsilon z \wedge P(x_1, ..., x, ..., x_n)] \rightarrow V_u \{x\varepsilon u \wedge \bigwedge_{x'}[x'\varepsilon u \rightarrow P(x_1, ..., x', ..., x_n)]\}$.

Wprowadźmy obecnie definicję abstraktu podaną przez Quine'a:

D_4 $(\beta\varepsilon\hat{\alpha}\,\emptyset)$ zastępuje $V\gamma[(\beta\varepsilon\gamma \wedge \bigwedge\alpha(\alpha\varepsilon\gamma \rightarrow \emptyset)]$.

Zgodnie z tą definicją T_2 przekształca się w:

T_{12} $V_z[x\varepsilon z \wedge P(x_1, ..., x, ..., x_n)] \rightarrow x\varepsilon\hat{x}'[P(x_1, ..., x', ..., x_n)]$.

Ostatnią tezę można jeszcze dalej zmieniać. stosując do niej definicje zbioru pełnego

$$V = \hat{x}(x = x)$$

i twierdzenie, które da się otrzymać z tej definicji i definicji identyczności przy użyciu jedynie praw teorii zdań i kwantyfikacji:

$$V_z(x\varepsilon z) \equiv x\varepsilon V.$$

Wtedy otrzymamy:

T_{13} $x\varepsilon V \wedge P(x_1, ..., x, ..., x_n) \rightarrow x\varepsilon\hat{x}'[P(x_1, ..., x', ..., x_n)]$.

Ponieważ przyjmujemy, że w teorii kwantyfikatorów za zmienne wolno wstawiać abstrakty (niechaj a będzie abstraktem):

$$P(a) \rightarrow V_z[P(z)].$$

Z T_{13} uzyskamy:

T_{14} $x\varepsilon V \wedge P(x_1, ..., x, ..., x_n) \rightarrow V_z(x\varepsilon z)$

lub:

T_{15} $V_z(x\varepsilon V \wedge P(x_1, ..., x, ..., x_n) \rightarrow x\varepsilon z)$

(z nie jest identyczne z żadnym spośród $x_1, ... x_n$).

Można również udowodnić odwrotność tezy T_{15}. Na mocy praw rachunku zdań i kwantyfikacji mamy:

$\bigwedge\{x\varepsilon z \wedge \bigwedge x[x\varepsilon z \rightarrow P(x_1, ..., x, ..., x_n)]\} \rightarrow x\varepsilon z \wedge P(x_1, ..., x, ..., x_n)$.

Po rozłożeniu kwantyfikatora wiążącego zmienną z w implikacji z jednoczesnym jego osłabieniem i zastosowaniu definicji tak, jak przy dowodzie T_{15}, otrzymamy:

T_{16} $x\varepsilon\hat{x}[Px_1, ..., x, ..., x_n)] \rightarrow V_z[x\varepsilon z \wedge P(x_1, ..., x, ..., x_n)]$.

Teza ta po zastosowaniu przytoczonego prawa kwantyfikacji i definicji zbioru pełnego przekształca się w:

T_{17} $V_z(x\varepsilon z) \rightarrow x\varepsilon V \wedge P(x_1, ..., x, ..., x_n)$.

Małe dodatkowe przekształcenie daje pożądany rezultat.

T_{18} $\bigwedge_z[x\varepsilon z \rightarrow x\varepsilon V \wedge P(x_1, ..., x, ..., x_n)]$

Zestawienie T_{15} i T_3 daje:

T_{19} $V_z[(x\varepsilon z \equiv x\varepsilon V \wedge P(x_1, ..., x, ..., x_n)]$.

Przypatrzmy się teraz T_5''. Po zastosowaniu tych definicji co poprzednio i dodatkowej definicji:

D_5 $\hat{x}[P(...)]\varepsilon y \equiv V_z \{z = \hat{x}[P(...)] \wedge z\varepsilon y\}$.

T_5'' przekształca się w:

T_{20} $x_1 \varepsilon z_1 \wedge ... \wedge x_n \varepsilon z_n \wedge "P(x_1, ..., w, ..., x_n)" \varepsilon$ *stratyfikowane*
$\rightarrow V_u(u \varepsilon V \wedge \bigwedge_m \{w \varepsilon u \equiv V_{u'}[w \varepsilon u' \wedge \bigwedge_w (w \varepsilon u' \rightarrow P(x_1, ..., w, ..., x_n)]\})$.

Teza ta z kolei przybiera następującą postać:

T_{21} $x \varepsilon z_1 \wedge ... \wedge x_n \varepsilon z_n \wedge "P(x_1, ..., w, ..., x_n)" \varepsilon$ *stratyfikow.* $\rightarrow$
$\rightarrow V_u \{ u \varepsilon V \wedge u = \hat{w}[P(x_1, ..., w, ..., x_n)] \}$.

Ostatecznie otrzymamy:

T_{22} $x \varepsilon z_1 \wedge ... \wedge x_n \varepsilon z_n \wedge "P(x_1, ..., w, ..., x_n)" \varepsilon$ *stratyfikow.* $\rightarrow$
$\rightarrow \hat{w}[P(x_1, ..., w, ..., x_n)] \varepsilon V$.

Łatwo zauważyć, że T_{10}, T_{19} i T_{22} są odpowiednikami aksjomatów logiki matematycznej Quine'a (Math. Logic. s. 162). T_{10} jest podobne do *201, T_{19} przypomina *202, a T_{22} odpowiada *200. System Quine'a stanowi pewną teorię mnogości; zauważone podobieństwo między aksjomatami a tezami T_{10}, T_{19} i T_{22} pozwala wnosić, że w koncepcji psychologii genetycznej zawarty jest spory ładunek czysto matematycznej treści. Jest to ilość wystarczająca, aby bliżej zainteresować się tą psychologią.

Między wspomnianymi tezami a aksjomatami Quine'a istnieją także pewne różnice. Jedna z nich polega na tym, że w T_{22} nie uwzględnia się zmiennych (zarówno wolnych jak i związanych), gdy w *202 są one uwzględnione. Trudno było uwzględnić ten moment bez dodatkowego dokładnego rozpatrzenia całości spraw związanych z kwantyfikacją.

Inna różnica polega na tym, że aksjomaty Quine'a są sformułowane w metajęzyku. Natomiast wszystkie uwagi o dokładaniu przedmiotów są wyrażone w języku przedmiotowym. Ta pozornie stylistyczna różnica ma konsekwencje czysto rachunkowe (u Quine'a nie jest potrzebna reguła podstawienia).

WNIOSKI FILOZOFICZNE

Zgodnie z tym, co powiedziano, ludzie dochodzą na podstawie swoich doświadczeń życiowych związanych z dokładaniem do pewnego pojęcia należenia do zbioru. Te doświadczenia są powszechne. Można by na tej podstawie dojść do wniosku, że istnieje jedno „właściwe" pojęcie należenia przedmiotu do zbioru, zgodne z tymi doświadczeniami. Konkluzja ta byłaby jednak przedwczesna.

Jak wiele razy już mówiliśmy, według Piageta, zbiór jest rezultatem kolejnego dokładania przedmiotów. Należenie elementu do zbioru sprowadza się do tego, że ów element jest jednym z przedmiotów, z których powstał zbiór. Jak wszystkie czynności ludzkie, tak i dokładanie ulega w miarę rozwoju człowieka doskonaleniu. Pełnię umiejętności zdobywają ludzie w tym względzie około 12 roku życia, gdy osiągają etap myślenia opartego na symbolach. Nim posiądą tę pełnię, oczywiście posługują się wyrazem „jest". Używają go nawet wtedy zanim udało im się zinternalizować dokładanie. Okazuje się zatem, że słowo „jest" w każdym okresie rozwoju posiada nieco inne znaczenie; każde kolejne jest bogatsze od poprzedniego. Wynika z tego istotny wniosek, że słowo „jest" ma po prostu wiele znaczeń. Najprawdopodobniej każde z tych znaczeń utrwaliło się w języku i obecnie wszystkie aktualnie przysługują słowu „jest", powodując, że wyraz jest bardzo wieloznaczny i wiąże się z bardzo licznymi intuicjami teoriomnogościowymi. Istnienie licznych sposobów podejścia do problemu charakterystyki należenia i zbioru nie tylko da się pogodzić z koncepcją Piageta, ale jest na jej gruncie wręcz konieczne.

Forma naszych wypowiedzi o dokładaniu nie zawiera żadnych wyraźnych momentów pragmatycznych. Zwrot $D(x,y,z)$ kieruje uwagę na pewne przedmioty x,y,z i na pewną relację między nimi. W swej zewnętrznej formie przedstawiona teoria dokładania jest teorią przedmiotów, a nie teorią czynności ludzkich. W tym względzie jest ona w pełni dopasowana do zewnętrznego kształtu systemów teorii mnogości. Tego rodzaju ujęcie dokładania jest uzasadnione nie tylko tym, o czym wspomnieliśmy w trakcie wprowadzania predykatu $D(x,y,z)$. Ponadto, należy zwrócić uwagę na sprawę następującą. Gdy dokładamy fizycznie przedmioty, terminy, którymi wówczas się posługujemy, oznaczają owe fizyczne przedmioty. Odpowiedniki psychiczne tych terminów (mowa subwokalna) oznaczają także owe przedmioty. W tym więc przypadku słuszne jest formułowanie wypowiedzi w języku przedmiotowym, gdy chcemy opisać tego typu dokładanie. Dokładanie zinternalizowane jest ogólniejsze, ale nie zmienia naszego odniesienia do dokładanych przedmiotów. Stąd przy opisie dokładania zinternalizowanego należy posługiwać się językiem przedmiotowym. Użyte terminy nazwowe posiadają w przypadku obu dokładań tę samą intencję znaczeniową. Użycie języka przedmiotowego jest więc uzasadnione. Jednak tezy, do których odnoszą się terminy (i pojęcia) opisujące dokładanie zinternalizowane, niekiedy nie są przedmiotami fizycznymi. Powstały tylko na skutek dokładania zinternalizowanego. Są więc tworami powstałymi dzięki naszej umysłowej działalności. Są one o tyle fizyczne, o ile fizyczne są czynności umysłowe. Tego typu przedmioty można chyba nazwać pojęciami. Ponieważ jednak terminy, którymi się posługujemy, mają tę samą intencję znaczeniową co terminy (i odpowiadające im pojęcia) oznaczające przedmioty fizyczne, pojęcia klas są w pewien sposób umieszczane w świecie przedmiotów niezależnych od nas, w świecie przedmiotów obiektywnych. Zarazem więc słuszne jest posługiwanie się językiem przedmiotowym i słuszne jest traktowanie klas jako pojęć. W przypadku metajęzyka intencja znaczeniowa użytych terminów byłaby skierowana na wytwory naszej umysłowej działalności jako na nie należące do świata obiektywnego. Wtedy też byłby bardziej wskazany zwrot $D(v,x,y,z)$. Możliwość traktowania logiki na oba sposoby podkreśla dwoisty charakter klasy.

Możliwość traktowania teorii mnogości jako nauki o dokładaniu i jego umysłowych wytworach, a także jako nauki o pewnej specjalnej relacji między przedmiotami pozwala rozwiązać trudność, o którą potykały się wszystkie teorie starające się przedstawić teorię mnogości nie jako naukę o obiektywnych bytach, lecz o naszych umysłowych konstruktach. Przedstawione tu ujęcie teorii mnogości stanowi pewien argument na rzecz tych koncepcji, dla których matematyka jest teorią ludzkiej działalności konstrukcyjnej.

Inne nieco wnioski płyną z rysującego się związku psychologii i teorii mnogości, gdy weźmie się pod uwagę przykłady wprowadzające podstawowe i ogólne twierdzenia, mianowicie naszkicowane związki mogą stać się płodne dydaktycznie. Już nie tylko iloczyn klas, suma itp. znajdują swoje ilustracje, ale także znacznie trudniejsza kwestia paradoksów teoriomnogościowych.

Proponowana geneza pojęcia należenia i podwójny charakter twierdzeń teorii mnogości pozwala ponownie podjąć problem analityczności. Ponieważ jednak jest to zagadnienie bardzo obszerne, sprawy tej nie będziemy rozwijali. Niemniej widać, że dalsze rozważania nad stosunkiem genezy pojęć do logiki i teorii mnogości wydają się ważne i należałoby je kontynuować. Jednak skoro okazano już perspektywy badań w dziedzinie psychologii genetycznej, to w przyszłości należy to czynić bardziej systematycznie niż w niniejszym artykule. Należy w odpowiedniej kolejności najpierw zająć się pojęciem zinternalizowania, następnie ustalenia genezy pojęć występujących w teorii zdań, dalej pojęciami teorii kwantyfikacji, aby w końcu ponownie wrócić do teorii mnogości i bliżej zbadać jej podwójny charakter, co pozwoli dokładniej w nowym świetle przyjrzeć się zagadnieniu analityczności.

РЕЗЮМЕ

Понятие множества неоднократно подвергалось аксиоматическому охарактеризованию. Однако способ образования этого понятия изучен до сих пор мало. Проблеме генезиса понятия множества посвятил много внимания Ж. Пиаже и его сотрудники. Автор настоящей статьи, так же как и Пиаже считает, что понятие множества является обобщением понятия результата физического прибавления предметов друг к другу. Развивая концепцию Пиаже, автор пытается перечислить наиболее общие признаки прибавления особенно его обобщенной и интернализированной версии. Суждения, описующие процесс прибавления в выше указанном смысле, а также дефиниция принадлежности элемента к множеству (принадлежность была определена как соотношение между предметов прибавления и результатом прибавления) приводят к производным суденивм, очень напоминающим аксиоматику теории множеств Куайна (ML).

SUMMARY

The notion of set has often been defined axiomatically. However, the way in which this notion originated has rarely been investigated. This problem was primarily discussed by Jean Piaget and his school. The author adopts Piaget's position, according to which the notion of set is the result of a generalization of the notion of physical addition of entities to one another. Developing Piaget's conception an attempt has been made to enumerate the most general features of physical addition (not mathematical), particularly of its generalized and internalized version. The theorems describing addition in the above sense, and the definition of elementhood (elementhood has been defined as a relation between the object which is added and the result of the addition) lead to derived theorems, vividly resembling Quine's (ML) axioms of set theory.