ANNALES UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN-POLONIA
VOL.XLII,12 SECTIO AAA 1987

Instytut Fizyki UMCS

A. BARAN, A. GÓŹDŹ, M. PIŁAT, J. SZYMONA

Teoriogrupowa analiza elementów optycznych w układach światłowodowych* II. Algebra a^3 aberracji trzeciego rzędu

Group Theoretical Analysis of Optical Elements in Waveguide Systems II. a^3 Algebra of Third Order Aberrations

Теоретико-групповый анализ оптических элементов в системах световодов II. Алгебра a^3 аберрации третьего порядка

1. WSTĘP

Prezentowana praca jest oparta na wynikach prac [1, 2] i dotyczy zastosowań teorii grup w opisie propagacji promieni świetlnych w osiowo symetrycznych układach optycznych. Temat pracy [2] dotyczył propagacji swobodnej bez uwzględniania członów wyższego rzędu niż pierwszy w rozwinięciach występujących tam wielkości. Tutaj pokazujemy, w jaki sposób należy włączyć te człony. Człony te odpowiadają za różne możliwe aberracje występujące w układach optycznych.

W pracy pokazano jakie algebry i odpowiadające im grupy Liego należy rozpatrywać, jeśli chcemy, aby uwzględnione były efekty aberracyjne. W rozdziale 2 opisana jest algebra aberracyjna najniższego rzędu a^3. Rozdział 3 podaje jej związek z odpowiadającą grupą Liego przekształceń przestrzeni fazowej układu, opisanej wektorami położenia $\mathbf{q}$ i pędu $\mathbf{p}$. W ostatniej części pracy (rozdział 4), zostały zilustrowane dwie możliwe aberrację: sferyczna i astygmatyzm.

*Praca finansowana z funduszy Problemu RR – I – 02

2. ALGEBRA ABERRACJI a^3.

Ograniczymy się do przypadku układów osiowo symetrycznych. W tym przypadku generatory algebry Liego a^3 muszą być funkcjami tylko wielkości p^2, $\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$ oraz q^2. Ze struktury nawiasu Poissona wynika, że algebra a^3 generowana jest przez jednomiany stopnia czwartego we współrzędnych $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$. Bazę dla a^3 wybierzemy w postaci funkcji:

$$ {}^2\chi^1_1 = p^2\,, \quad {}^2\chi^1_0 = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\,, \quad {}^2\chi^1_{-1} = q^2\,; \tag{1}$$

$$ {}^4\chi^2_{-2} = (p^2)^2\,, \quad {}^4\chi^2_{-1} = p^2\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\,, \quad {}^4\chi^2_0 = \frac{1}{3}[p^2q^2 + 2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2]\,,$$

$$ {}^4\chi^2_{-1} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\,q^2\,, \quad {}^4\chi^2_{-2} = (q^2)^2\,; \tag{2}$$

$$ \chi = \frac{1}{2}[p^2q^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2]\,. \tag{3}$$

Dalej będziemy opuszczać wskaźnik $n = 2, 4$ w zapisie ${}^n\chi$.

Wielkości χ^1_m generują algebrę $sp(2,R)$. Będziemy ją nazywać algebrą Gaussa γ. Jest ona zamknięta względem działania będącego nawiasem Poissona

$$ \hat{g}f = \{g, f\}\,. \tag{4}$$

Komutatory $\{,\}$ dla wielkości χ^1 są następujące:

$$ \{\chi^1_0, \chi^1_1\} = 2\chi^1_1\,, \qquad \{\chi^1_0, \chi^1_{-1}\} = -2\chi^1_{-1}\,, \qquad \{\chi^1_1, \chi^1_{-1}\} = -4\chi^1_0\,. \tag{5}$$

Prócz tego

$$ \hat{\chi}^1_0\chi^j_m = \{\chi^1_0, \chi^j_m\} = 2m\chi^j_m\,, \qquad j = 0, 1, 2\,, \tag{6}$$

$$ \hat{\chi}^1_1\chi^j_m = 2(m-j)\chi^j_{m+1}\,, \qquad \hat{\chi}^1_{-1}\chi^j_m 2(m+1)\chi^j_{m-1}\,. \tag{7}$$

Z równań (6) i (7) widać, że j jest maksymalną wartością własną operatora $\hat{\chi}^1_0$ dla danego multipletu χ^j, który otrzymuje się działając operatorami $\hat{\chi}^1_{+1}$ oraz $\hat{\chi}^1_{-1}$ podnoszącymi i obniżającymi wartość dolnego wskaźnika m w funkcjach χ^j_m.

Algebra aberracyjna a^3 opisująca aberracje z dokładnością do trzeciego rzędu, generowana jest przez dziewięć operatorów danych równaniami (1), (2), (3). Z faktu, że a^3 jest algebrą ilorazową (patrz [1, 2]) i stąd, że każdy jednomian stopnia większego niż czwarty jest w tej algebrze zerem, wynika, że komutatory $\{{}^4\chi^j, {}^4\chi^{j'}\}$ zerują się dla $j, j' = 0, 2$. Sześć generatorów ${}^4\chi$ tworzy abelową podalgebrę ϑ algebry a^3. Z postaci nawiasów Poissona (6), (7) wynika, że algebra a^3 jest sumą półprostą ϑ i $sp(2,R)$. Podalgebra ϑ jest abelowym ideałem normalnym w a^3. Funkcja ${}^4\chi^0_0$ jest niezmiennikiem względem algebry Gaussa γ (singlet), pozostałych pięć funkcji ${}^4\chi^2$ stanowi kwintuplet względem algebry gaussowej. Te proste własności wykorzystamy dalej przy budowie grupy Liego związanej z algebrą a^3 oraz przy znajdowaniu reprezentacji grupowych.

3. ABERRACYJNA GRUPA LIEGO A^3.

Aberracyjną zwartą grupę Liego A^3 otrzymamy metodami zastosowanymi w [2], gdzie rozpatrywano algebrę Gaussa $\gamma = sp(2, R)$ i metodami użytymi w pracy [1]. Elementy grupowe G sparametryzujemy następująco. Przez $\mathbf{v}$ oznaczać będziemy wektor wierszowy o pięciu składowych v_m, $m = -2, -1, 0, 1, 2$, związanych z pięcioma generatorami ${}^4\chi^2_m$ algebry ϑ, natomiast przez „w" parametr związany z singletem ${}^4\chi^0_m$. Parametry związane z γ oznaczymy wektorem $\mathbf{u}$ o składowych u_m, $m = -1, 0, 1$. Ogólny element grupy A^3 oznaczymy przez $G(\mathbf{v}, w; \mathbf{M}(\mathbf{u}))$, gdzie $\mathbf{M}(\mathbf{u})$ jest macierzą symplektyczną zależną od trzech parametrów u_m [1, 2]. W tym zapisie $G(0, 0; \mathbf{M})$ jest elementem grupy $Sp(2, R)$ [1]. Dla części czysto aberracyjnej położymy

$$G(\mathbf{v}, w; 1) = \exp\left[\sum u_m \hat{\chi}^2_m + w\chi^0_0\right] . \tag{8}$$

Korzystając z wyników rozdziału 2 można zapisać ogólny element A^3 w postaci

$$G(\mathbf{v}, w; \mathbf{M}) = G(\mathbf{v}, w; 1)G(0, 0; \mathbf{M}) . \tag{9}$$

Wynika to stąd, że $a^3 = \vartheta \oplus \gamma$ jest sumą półprostą algebr ϑ i γ. Zbiór elementów typu $G(\mathbf{v}, w; 1)$ tworzy sześcioparametrową grupę translacyjną $T = T_5 \odot T_1 = T_6$ związaną z algebrą ϑ. Pozostałą część grupy A^3 związaną z algebrą γ będziemy oznaczać przez Γ – jest to grupa $Sp(2, R)$. Grupa A^3 jest iloczynem półprostym grup Γ i T, $A^3 = T \oplus \Gamma$.

Dla singletu χ^0_0 i kwintupletu χ^2_m względem ϑ możemy zapisać

$$G(0, 0; \mathbf{M})\chi^j_m = \sum_{m'} D^j_{mm'}(\mathbf{M}^{-1})\chi^j_{m'} . \tag{10}$$

Tutaj $D^j(\mathbf{M})$ jest $(2j + 1)$–wymiarową reprezentacją grupy $Sp(2, R)$.

Biorąc pod uwagę (8), (9) i (10) możemy wypisać prawo składania elementów w A^3

$$\begin{aligned} &G(\mathbf{v}_1, w_1; \mathbf{M}_1)G(\mathbf{v}_2, w_2, \mathbf{M}_2) = \\ &= G(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 D(\mathbf{M}_1^{-1}), w_1 + w_2; \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2) . \end{aligned} \tag{11}$$

Jedynką w A^3 jest $G(0, 0; 1)$, a elementem odwrotnym do $G(\mathbf{v}, w; \mathbf{M})$ jest

$$G(\mathbf{v}, w, \mathbf{M})^{-1} = G(-\mathbf{v}D^2(\mathbf{M}), -w; \mathbf{M}^{-1}) . \tag{12}$$

Jeżeli macierz $\mathbf{M}$ będzie postaci $\mathbf{M}_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, to ogólne wyrażenie dla macierzy reprezentacji D^j jest [1]

$$D^j_{mm'}(\mathbf{M}) = \sum_n \binom{j-m}{j+m'-n}\binom{j+m}{n} \alpha^n \beta^{j+m-n} \gamma^{j+m'-n} \delta^{n-m-m'} . \tag{13}$$

W szczególnych przypadkach mamy $D^j(1) = 1$, $D^0(\mathbf{M}) = 1$, $D^{1/2}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}$.

Zbadamy, jak element $G(\mathbf{v}, w; \mathbf{M})$ grupy A^3 działa na dwuwektor $\mathbf{q}$ opisujący położenie promienia świetlnego oraz na dwuwektor $\mathbf{p}$ (nachylenie promienia względem normalnej do płaszczyzny $z = 0$, z jest osią optyczną układu). Zaczniemy od czystych aberracji będących elementami T. W tym przypadku $\mathbf{M}$ jest macierzą jednostkową. Działanie G jest określone następująco

$$G(\mathbf{v}, w; 1)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \exp(\mathbf{v} \cdot \hat{\chi}^2 + w\hat{\chi}_0^0)(\mathbf{p}, \mathbf{q}). \tag{14}$$

Zauważmy, że działając pierwszym nawiasem Poissona powstałym z rozwinięcia powyższej eksponenty, otrzymamy wyrażenie zawierające trzeci rząd $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, drugi nawias da rząd piąty $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ itd. Ogólnie, $\mathbf{q}$ będzie się transformować w liniową kombinację $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})\,\mathbf{q}$ i $g(\mathbf{p}, \mathbf{q})\,\mathbf{p}$, gdzie f i g są funkcjami p^2, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ i q^2 lub χ_m^1 określonymi w (1). Podobnie jest z $\mathbf{p}$. Wygodnie jest posługiwać się następującymi funkcjami „połówkowymi" współrzędnych fazowych $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$

$${}^1\chi^{1/2}_{+1/2} = \mathbf{p}\,, \quad {}^1\chi^{1/2}_{-1/2} = \mathbf{q}\,; \tag{15}$$

$${}^3\chi^{3/2}_{+3/2} = p^2\,\mathbf{p}\,, \quad {}^3\chi^{3/2}_{+1/2} = \frac{1}{3}[2\,\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}\;\mathbf{p} + p^2\,\mathbf{q}]\,,$$

$${}^3\chi^{3/2}_{-1/2} = \frac{1}{3}[q^2\,\mathbf{p} + 2\,\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}\;\mathbf{q}]\,, \quad {}^3\chi^{3/2}_{-3/2} = q^2\,\mathbf{q}\,; \tag{16}$$

$${}^3\chi^{1/2}_{+1/2} = \frac{1}{2}[-\,\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}\;\mathbf{p} + p^2\,\mathbf{q}]\,; \quad {}^3\chi^{1/2}_{-1/2} = \frac{1}{2}[-q^2\,\mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}\;\mathbf{q}]\,. \tag{17}$$

Działanie osiowo symetrycznego elementu G grupy A^3 na wektor fazowy sprowadza się do kombinacji liniowej funkcji wypisanych w równaniach (15), (16) i (17). Funkcje χ spełniają związki (6), co można bezpośrednio sprawdzić. Pozwala to zapisać prawo transformacyjne dla χ^j o połówkowych wartościach j:

$$G(0,0;\,\mathbf{M}) = \chi^j_m = \sum_{m'} D^j_{mm'}(\mathbf{M}^{-1})\chi^j_{m'}\,. \tag{18}$$

Działanie ogólnego elementu $G(\mathbf{v}, w; \mathbf{M})$ na wektor fazowy $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{v}, w; \mathbf{M})(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= G(\mathbf{v}, w; \mathbf{M})\ {}^1\chi^{1/2} = \\ &= \mathbf{M}^{-1}\ {}^1\chi^{1/2} + \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{V}\ {}^3\chi^{3/2} + 2w\,\mathbf{M}^{-1}\ {}^3\chi^{1/2}\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Macierz $\mathbf{V}$ jest postaci

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 & 2v_0 & 3v_{-1} & 4v_{-2} \\ -4v_2 & -3v_1 & -2v_0 & -v_{-1} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Wypisano tutaj tylko tę część transformacji ogólnej, która dotyczy bezpośrednio wektora ($\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$) opisującego promień świetlny. Dla przypadku ogólnego transformacje wszystkich χ^j dla połówkowych j są podane w pracy [1]. Parametry występujące w macierzy $\mathbf{V}$ są oczywiście tymi samymi parametrami, które charakteryzują element G grupy A^3.

4. ABERRACJE TRZECIEGO.RZĘDU.

Niezerowe wartości parametrów ($\mathbf{v}$, w) w elementach grupowych G opisują różne możliwe aberracje trzeciego rzędu, które mogą wystąpić w układach optycznych. Transformacje promieni świetlnych w układach optycznych oraz transformacje przestrzeni fazowej pod działaniem operatorów grupy, pozostają w jednoznacznej odpowiedniości. Dla ilustracji rozpatrzymy dwa znane typy aberracji. Na początek zajmiemy się sytuacją opisaną przez $G(v_2, 0, 0, 0, 0, 0, ; 1)$. Na podstawie równania (19) możemy się przekonać, że przetransformowany wektor ($\mathbf{p}'$, $\mathbf{q}'$) dany jest równaniem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}' \\ \mathbf{q}' \end{bmatrix} = G(v_2, 0, 0, 0, 0, 0, ; 1) \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} - 4v_2 p^2\, \mathbf{p} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Aberracja opisana tym wzorem nie zmienia kierunku promienia świetlnego, gdyż $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$, powoduje natomiast złe ogniskowanie promieni w części położeniowej $\mathbf{q}$. Jeżeli rozpatrzymy zachowanie się promieni świetlnych leżących na stożku, którego oś jest równoległa do osi układu optycznego, a tworząca stożka jest nachylona pod kątem θ do tej osi, to stwierdzamy, że padają one na okrąg o środku w $\mathbf{q}$ i promieniu $4v_2 p^3 = 4v_2(n \sin\theta)^3$. Odpowiada to aberracji sferycznej. Drugim przykładem będzie element, w którym $v_0 = a$ i $w = -\frac{2a}{3}$.
Transformacja ($\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$) jest następująca

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}' \\ \mathbf{q}' \end{bmatrix} = G(0, 0, a, 0, 0, -\frac{2a}{3}; 1) \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} + 2a\, \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}\, p \\ \mathbf{q} - 2a\, \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}\, q \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Ponieważ współrzędne $\mathbf{p}'$ i $\mathbf{q}'$ zawierają wspólny czynnik $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$, to promienie transwersalne (takie, że $\mathbf{p} \perp \mathbf{q}$) nie podlegają zniekształceniom. Promienie leżące na stożku odwzorowywane są w odcinki, których środki leżą w punkcie $\mathbf{q}$ i odcinki te są równoległe do $\mathbf{q}$. Długości odcinków są równe $2aq^2 |\, \mathbf{p}\, |$. Opisana aberracja jest to tak zwany astygmatyzm. Pozostałe parametry (v_m, w) lub ich kombinacje opisują inne typy aberracji (patrz cz. III).

Dany układ optyczny wyznacza jednoznacznie parametry $\mathbf{v}$ i w. W ten sposób każdemu elementowi optycznemu odpowiada jeden element grupy aberracyjnej A^3. Składanie elementów optycznych jest składaniem transformacji grupowych $G(\mathbf{v}, w; \mathbf{M})$. W przypadku włókien światłowodowych należy znaleźć zależność elementów grupy G od współrzędnej z, która odpowiada bieżącej odległości od wybranego punktu $z = 0$. Jest to przedmiotem zainteresowań następnej pracy.

BIBLIOGRAFIA

[1] Navarro - Saad M., Wolf K.B., *J. Math. Phys.* 27, 1449, (1986).

[2] Góźdź A., Baran A., Szymona J.J., Piłat M., *Ann. Univ. MCS*, tom niniejszy.

SUMMARY

It is shown that the axially symmetric optical system (optical waveguide) may be represented by an element of the aberration group acting in a phase space spanned by coordinates and momenta (angles) of the light ray. Two examples of aberration are discussed for illustration.

РЕЗЮМЕ

В работе сделан групповый анализ аберрации в оптических осевых системах (световодах). Для каждой оптической системы имеется элемент некоторой группы действующей в фазовом пространстве росположения и угла падения светового луча. Показаны примеры простых аберрации в таких системах.

Złożone 21.X.1988