ANNALES UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA

LUBLIN-POLONIA

VOL. XLII, 2 SECTIO A 1988

Institute of Mathematics
Bulgarian Academy of Sciences, Sofia

Department of Mathematics
University of Petrozavodsk

G. M. DIMKOV, V. V. STARKOV

Le problème de coefficients dans une classe de fonctions localement univalents

Problem współczynników w klasie funkcji lokalnie jednolistnych

Abstract. The authors define by means of formula (1) the class U_α^*, $\alpha \geq 1$, of functions holomorphic in the unit disk and find a sharp estimate of the third coefficient for this class.

Introduction. Soit Γ_α^*, $\alpha \geq 1$, l'ensemble de fonctions $\mu(t)$ à valeurs complexes et à variation bornée, satisfaisant aux conditions

$$\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} |d\mu(t)| \leq \alpha - 1 .$$

Désignons par $\Gamma_\alpha^*(n)$, $n \geq 2$, le sous-ensemble de Γ_α^*, contenant les fonctions constantes par morceaux dont le nombre de points de discontinuité dans l'intervalle $[0, 2\pi)$ ne dépasse pas n.

Soit la fonction $s(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$ une fonction convexe et $\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ une fonction analytique et bornée dans le disque unité, $|\omega(z)| < 1$.

Nous désignerons par U_α^* l'ensemble de fonctions

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n ,$$

qui sont analytiques et localement univalentes dans le disque unité et dont les dérivées sont données à l'aide de la formule

$$(1) \qquad f'(z) = s'(z) \exp\left\{-2 \int_0^{2\pi} \log \frac{1 - \omega(z)e^{it}}{1 - \omega(0)e^{it}}\, d\mu(t)\right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n , \quad \mu \in \Gamma_\alpha^* .$$

On voit facilement que la classe U_2^* contient la classe de fonctions presque convexes [5].

Dans ce qui suit le symbole $\{g\}_2$ désignera le coefficient précédant z^2 dans le developpement en série de la fonction analytique $g(z)$.

Résultats préliminaires. Nous utiliserons certains résultats, obtenus par le deuxiéme auteur [3].

Soit $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des fonctions $f(z)$, analytiques dans le disque unité. A l'aide de la norme $\|f\| = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $r \in (0,1)$, $\mathcal{H}$ devient un espace normé. Soit F une fonctionelle, déterminée dans l'espace $\mathcal{H}$. Supposons que F est difféfetiable dans le sens de Frechet et L_φ est sa différetielle frechetienne au point φ.

Examinons les classe suivantes :

$$G_\alpha = \left\{\varphi : \varphi(z) = \int_0^{2\pi} g(z,t)\, d\mu(t)\,, \quad \mu \in \Gamma_\alpha^*\right\},$$

$$G_\alpha(n) = \left\{\varphi : \varphi(z) = \int_0^{2\pi} g(z,t)\, d\mu(t)\,, \quad \mu \in \Gamma_\alpha^*(n)\right\},$$

où la fonction fixée $g(z,t)$ est analytique par rapport de z dans le disque unité et 2π–périodique et continûment dérivable par rapport de t.

Supposons que la fonction

$$\varphi_n(z) = \int_0^{2\pi} g(z,t)\, d\mu_n(t)$$

est extrémale pour le problème

(2) $$\max_{\varphi \in G_\alpha(n)} \operatorname{Re}\{F[\varphi]\}\,, \quad \alpha \geq 1\,.$$

En s'appuyant sur le théorème de Helly, de la suite $\{\varphi_n\}$ on peut extraire une sous–suite, uniformément convergente, dont la limite $\varphi^{(0)} \in G$. En outre la limite $\varphi^{(0)}(z)$ sera parmi les fonctions extrémales pour le problème

(3) $$\max_{\varphi \in G_\alpha} \operatorname{Re}\{F[\varphi]\}\,.$$

Désignons par t_j les points de discontinuité de la fonction $\mu_n(t)$, $t_j \in [0, 2\pi)$. Il existe [3] ([2]) un nombre complexe p_n, tel que les nombres t_i satisfont au système

(4) $$\begin{cases} \left|L_{\varphi_n}[g(z,t_j)] - p_n\right|^2 = \left|L_{\varphi_n}[g(z,t_k)] - p_n\right|^2 & \text{, pour tous les } j,k \\ \left(\left|L_{\varphi_n}[g(z,t_j)] - p_n\right|\right)_t' = 0 & \text{, pour tous les } j. \end{cases}$$

Remarquons que la condition $\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 0$ signifie que la fonction $\mu(t)$ est 2π–périodique. Alors si $\operatorname{Im}\{\omega(0)e^{i\gamma}\} = 0$,

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1-\omega(z)e^{it}}{1-\omega(0)e^{it}}\, d\mu(t) = \int_0^{2\pi} \log \frac{1-\omega(z)e^{i\gamma}\cdot e^{i(t-\gamma)}}{1-\omega(0)e^{i\gamma}\cdot e^{i(t-\gamma)}}\, d\mu(t) = \int_0^{2\pi} \log \frac{1-\omega_1(z)e^{i\tau}}{1-\omega_1(0)e^{i\tau}}\, d\tilde{\mu}(\tau)$$

où $\omega_1(z) = e^{i\gamma}\omega(z)$ et $\tilde{\mu}(\tau) = \mu(t+\tau)$; évidemment $\tilde{\mu} \in \Gamma_\alpha^*$. Autrement dit, sans restreindre la généralité, nous pouvons admettre que le nombre $b_0 = \omega(0)$ est réel.

Résultat principal. Dans [2] nous avons démontré que

$$\max_{f\in U_\alpha^*} |a_2| = \alpha .$$

Théorème. *Soit $M(\gamma_0)$ le maximum absolu de l'expression*

$$M(\gamma) = (\alpha-1)\sin^2\gamma + \sin\gamma\cos\gamma + 2\sin\gamma$$

dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors

$$\max_{f\in U_\alpha^*} |a_3| = 1 + \tfrac{2}{3}(\alpha-1)M(\gamma_0) .$$

Le maximum est réalisé par la fonction

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{1}{(1-\xi)^2}\left[\frac{1-e^{i\gamma_0\xi}}{1-e^{-i\gamma_0\xi}}\right]^{i(\alpha-1)} d\xi .$$

Démonstration. Pour plus de commodité nous estimerons $|A_3|$ au lieu de $|a_3|$. Soient les fonctions $s(z)$, $\omega(z)$ et $h(z)$ analytiques dans le disque unité. On a

$$\{s'(z)\cdot\exp\varphi(z) + h(z)\}_2 = \{s'(z)\cdot\exp\varphi(z)\}_2 + \{h(z)\cdot s'(z)\exp\varphi(z)\} + o(\|h\|) .$$

Si l'on fixe $s(z)$, la fonctionelle $F[\varphi] = \{s'(z)\cdot\exp\varphi(z)\}_2$ est dérivable dans le sens de Frechet et sa différentielle au point φ est égale $L_\varphi[h(z)] = \{s'(z)\exp\varphi(z)\cdot h(z)\}_2$.

Alors si l'on fixe les fonctions $s(z)$ et $\varphi(z)$, le problème d'estimer $|A_3|$ devient un cas particulier du problème (3) avec la fonctionelle ci-dessus et la fonction

$$\begin{aligned} g(z,t) &= -2\log\frac{1-\omega(z)e^{it}}{1-\omega(0)e^{it}} = -2\log\frac{1-e^{it}(b_0+b_1z+\cdots)}{1-b_0e^{it}} = \\ &= -2\left[-\frac{b_1e^{it}}{1-b_0e^{it}}z - \frac{b_2e^{it}}{1-b_0e^{it}}z^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{b_1e^{it}}{1-b_0e^{it}}\right)^2 z^2 + O(z^3)\right] = \\ &= 2b_1\xi z + 2b_2\xi z^2 + b_1^2\xi^2z^2 + O(z^3) , \end{aligned}$$

où le nombre $\xi = \dfrac{e^{it}}{1-b_0e^{it}}$ représente un point de la circonférence à représentation paramétrique $\dfrac{b_0+e^{i\eta}}{1-b_0^2}$, $\eta\in[0,2\pi]$. L'égalité

$$\xi = \frac{e^{it}}{1-b_0e^{it}} = \frac{b_0+e^{i\eta}}{1-b_0^2} \tag{5}$$

détermine une correspondance biunivoque $t = t(\eta)$ d'un segment de longueur 2π dans un segment de la même longueur. Désignant $g(z,t(\eta)) = q(z,\eta)$ nous pouvons écrire

$$\varphi(z) = \int_0^{2\pi} g(z,t)\,d\mu(t) = \int_0^{2\pi} q(z,\eta)\,d\mu(t(\eta)) = \int_0^{2\pi} q(z,\eta)\,d\nu(\eta)\,.$$

Considérons le problème (2) avec la fonctionelle F ci–dessus et la fonction $q(z,\eta)$. Soit $\varphi_n(z)$ la fonction extrémale dans (2) et désignons

$$f_n'(z) = s'(z)\exp\varphi_n(z) = 1 + A_1^{(n)}z + A_2^{(n)}z^2 + \cdots\,.$$

Alors

$$\begin{aligned} L_{\varphi_n}[q(z,\eta)] &= \{f_n'(z)\cdot q(z,\eta)\}_2 = \\ &= \{(1 + A_1^{(n)}z + A_2^{(n)}z^2 + \cdots)(2b_1\xi z + (2b_2\xi + b_1^2\xi^2)z^2 + \cdots)\}_2 = \\ &= b_1^2\xi^2 + 2b_2\xi + 2b_1A_1^{(n)}\xi = P_2(e^{i\eta})\,, \end{aligned}$$

où $P_2(e^{i\eta})$ est un polynôme de deuxième degré par rapport de la variable $e^{i\eta}$.

A l'aide de la fonction $t = t(\eta)$ aux points de discontinuité de la fonction $\mu_\eta(t)$ correspondent des points différentes qui satisfont au système (4), dûment transformé. Nous pouvons écrire la deuxième équation de (4) dans la forme

$$\left[\left(P_2(e^{i\eta_j}) - p_n\right)\overline{\left(P_2(e^{i\eta_j}) - p_n\right)}\right]_\eta' = 0\,.$$

C'est une équation algébrique de quatriéme degré par rapport de $e^{i\eta}$. Alors le nombre des points η_j ne dépasse pas quatre. En s'appuyant sur le théorème de Rolle de la première équation de (4) on déduit que le nombre des points η_j ne dépasse pas deux. Si l'on suppose que se nombre est moins que deux, on en déduit que $\mu_n(t) \equiv 0$. Mais cette fonction n'est pas extrémale.

Par conséquent le problème (3) possède une fonction extrémale dont la mesure correspondante dans (1) apparient à la classe $I_\alpha^*(2)$. Alors pour estimer $|A_3|$ nous bornerons aux fonctions $f \in U_\alpha^*$ avec $\mu \in I_\alpha^*(2)$.

Soit $\tilde\omega(z) = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots$ une fonction analytique et bornée dans le disque unité, $|\tilde\omega(z)| < 1$. La fonction $\omega(z)$ peut etre mise sous la forme

$$\omega(z) = \frac{b_0 + \tilde\omega(z)}{1 + b_0\tilde\omega(z)}$$

Considérons les fonctions

$$w(z) = \exp\left\{-2\int_0^{2\pi}\log\frac{1-\omega(z)e^{it}}{1-\omega(0)e^{it}}\,d\mu(t)\right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n$$

$$W(z) = \exp\left\{-2\int_0^{2\pi}\log\frac{1-e^{it}(b_0+z)(1+b_0z)}{1-b_0e^{it}}\,d\mu(t)\right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n z^n\,.$$

Evidemment

$$w(z) = W(\tilde{\omega}(z)) = 1 + D_1\tilde{\omega}(z) + D_2\tilde{\omega}^2(z) + \cdots =$$
$$= 1 + D_1(\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots) + D_2(\alpha_1^2 z^2 + \cdots) + \cdots ,$$

d'où on obtient $a_1 = \alpha_1 D_1$, $a_2 = \alpha_1^2 D_2 + \alpha_2 D_1$ et alors

$$A_2 = \left\{(1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \cdots)(1 + d_1 z + d_2 z^2 + \cdots)\right\}_2 =$$
$$= \alpha_1^2 D_2 + \alpha_2 D_1 + 2c_2\alpha_1 D_1 + 3c_3 .$$

D'après la généralisation du lemme de Schwartz [1] $|\alpha_1| \leq 1$, $|\alpha_2| \leq 1 - |\alpha_1|^2$. D'autre part pour les coefficients de la fonction convexe $s(z)$ on à $|c_n| \leq 1$, $n \geq 2$ et, si l'on choisit $\tilde{\omega}(z) \equiv z$ et $s(z) = \frac{z}{1-z}$, on obtient

(6) $\quad |A_2| \leq 3|c_3| + 2|c_2| \cdot |\alpha_1| \cdot |D_1| + |\alpha_2| \cdot |D_1| + |\alpha_1|^2 \cdot |D_2| \leq 3 + |D_2| + 2|D_1| .$

Alors il ne nous reste que maximiser la part droite de (6) dans la classe $G_\alpha(2)$. Soit t_1 et t_2 les points de discontinuité d'une fonction $\mu \in I_\alpha^*(2)$ quelconque. De la condition $\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 0$ il suit $d\mu(t_1) = -d\mu(t_2) = u$. En outre $\int_0^{2\pi} |d\mu(t)| \leq \alpha - 1$ entraine $|u| \leq \frac{\alpha-1}{2}$. A l'aide de (5) nous obtenons

$$W(z) = \exp\left\{-2\int_0^{2\pi} \log \frac{1 - e^{i\eta} z}{1 + b_0 z}\, d\nu(\eta)\right\} = \left(\frac{1 - e^{i\eta_2} z}{1 - e^{i\eta_1} z}\right)^{2\nu} .$$

Maintenant il est facillement calculé que

$$D_1 = -4iue^{i\frac{\eta_2+\eta_1}{2}} \sin\frac{\eta_2 - \eta_1}{2}$$
$$D_2 = e^{i\frac{\eta_2+\eta_1}{2}}\left(-2iu\sin\frac{\eta_2 - \eta_1}{2} + \cos\frac{\eta_2 - \eta_1}{2}\right)D_1 .$$

Alors (6) devient

$$|A_2| \leq 3 + 4\left|u\sin\frac{\eta_2 - \eta_1}{2}\right|\left(2 + \left|-2iu\sin\frac{\eta_2 - \eta_1}{2} + \cos\frac{\eta_2 - \eta_1}{2}\right|\right) .$$

Puisque les éléments de $I_\alpha^*(2)$ sont des fonctions 2π-périodiques, nous pouvons choisir une fonction $\nu(\eta)$, telle que

$$0 < \eta_2 - \eta_1 \leq \pi .$$

Dans ce cas l'estimation pour $|A_2|$ atteindra son maximum pour $u = \frac{\alpha-1}{2}i$. Désignant $\frac{\eta_2-\eta_1}{2} = \gamma$ nous obtenons l'assertion du Théorème. La fonction $f_0(z)$ correspond aux valeurs $\eta_1 = -\gamma_0$ et $\eta_2 = \gamma_0$.

Pour compléter les études sur le coefficient a_3 nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme. *Si* $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\tfrac{1}{2}\left[(\alpha+1)+\sqrt{(\alpha+1)^2+1}\right] \leq M(\gamma_0) = \sqrt{(\alpha+1)^2+1}\,.$$

Démonstration. Désignons $m_1(\gamma) = (\alpha+1)\sin^2\gamma + \sin\gamma\cos\gamma$ et $m_2(\gamma) = (\alpha+1)\sin\gamma + \cos\gamma$. L'équation

$$m_1'(\gamma) = (\alpha+1)\sin 2\gamma + \cos 2\gamma = 0$$

possède et une seule racine située dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Cette racine correspond au maximum absolu de la fonction $m_1(\gamma)$. Après quelques calculations on obtient

$$m_1(\gamma) \leq \tfrac{1}{2}\left[(\alpha+1)+\sqrt{(\alpha+1)^2+1}\right], \quad \gamma \in [0, \tfrac{\pi}{2}]\,.$$

De la meme façon, à l'aide de l'équation

$$m_2'(\gamma) = (\alpha+1)\cos\gamma - \sin\gamma = 0\,,$$

on obtient

$$m_2(\gamma) \leq \sqrt{(\alpha+1)^2+1}\,, \quad \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]\,.$$

Puisque $0 \leq \sin\gamma \leq 1$, alors $m_1(\gamma) = M(\gamma) = m_2(\gamma)$. Les signes d'égalité apparaissent si et seulement si $\gamma = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$, pour l'inégalité gauche, et si $\gamma = \frac{\pi}{2}$, pour l'inégalité droite. Alors

$$\max_{\gamma\in[0,\frac{\pi}{2}]} m_1(\gamma) \leq M(\gamma_0) \leq \max_{\gamma\in[0,\frac{\pi}{2}]} m_2(\gamma)\,.$$

Ça prouve le lemme.

Par conséquent

$$1+\tfrac{1}{3}(\alpha-1)\left[(\alpha+1)+\sqrt{(\alpha+1)^2+1}\right] \leq \max_{f\in U_\alpha^*}|a_3| \leq 1+\tfrac{2}{3}(\alpha-1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}\,,$$

d'où on obtient dans le cas spécial $\alpha = 2$

$$3,054\ldots = 2+\frac{\sqrt{10}}{3} \leq \max_{f\in U_2^*}|a_3| = 1+\tfrac{2}{3}\sqrt{10} \leq 3,108\ldots$$

Ce fait montre que la fonction, réalisant le maximum de $|a_3|$ dans la classe U_2^* est différente de la fonction à propriétés analogiques dans la classe de fonctions presque convexes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Goluzin, G.M., *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, Izdat. Nauka, Moscow 1966 (in Russian).

[2] Dimkov, G. M., Starkov, V. V., *On Some Generalization Close-to-convex Functions*, Studia Mathematica Bulgaria, (to appear).

[3] Starkov, V.V., *On Some Subclasses Linear Invariant Families Having Integral Representations*, VINITI, 1981.

[4] Starkov, V.V., *Some linear-invariant families of functions having an integral representation*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 5 (1983) 82–85 (in Rusian).

[5] Kaplan, W., *Close-to-convex schlicht functions*, Michigan Math. J. 1 (1952), 169–185.

STRESZCZENIE

W pracy tej autorzy wprowadzają określoną wzorem (1) klasę funkcji U_α^*, $\alpha \geq 1$, i znajdują dokładne oszacowanie trzeciego współczynnika w tej klasie.