

Department of Mathematics  
University of Helsinki  
Institute of Mathematics  
Helsinki University of Technology

S. TOPPILA, P. LOUNESTO

**On a Conjecture of Hellerstein, Shen and Williamson**

O hipotezie Hellersteina, Shena i Williamsona

Об одной гипотезе Геллерштейна, Шена и Вилямсона

Let  $f$  be a meromorphic function in the plane. We say that  $f$  is real if it assumes only real values (or  $\infty$ ) on the real axis. We shall consider the following conjecture of Hellerstein, Shen and Williamson [1].

Conjecture 1. Let  $F$  be real, transcendental, meromorphic, not entire, with only real poles. If  $F$ ,  $F'$ , and  $F''$  have only real zeros, then

$$(1) \quad F(z) = A \tan(az + b) + B$$

or

$$(2) \quad F(z) = A (\tan(az + b) - (az + b))$$

where  $A \neq 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $b$  and  $B$  are real constants.

This conjecture does not hold. We choose

$$F(z) = (\tan z + c) \tan z$$

where  $c$  is real and  $|c| \geq 2\sqrt{3}$ . Then  $F$  is real and transcendental with only real poles, and a direct calculation shows that  $F$ ,  $F'$  and  $F''$  have only real zeros.

#### REFERENCES

- [1] Hellerstein, S., Shen, L., Williamson, J., Solutions with only real zeros of second order differential equations and zeros of derivatives of a meromorphic function, Contemporary Mathematics 25 (1983), 63-67.

#### STRESZCZENIE

Podano kontrprzykład na postawioną w r. 1983 hipotezę dotyczącą postaci funkcji meromorficznych  $F$ , rzeczywistych na osi rzeczywistej, mających jedynie rzeczywiste bieguny i takich, że  $F$ ,  $F'$ ,  $F''$  mają jedynie rzeczywiste zera.

#### РЕЗЮМЕ

В данной работе представлен контрпример на поставленную в 1983 г. гипотезу относящуюся к виду мероморфных функций  $F$ , вещественных на действительной оси, имеющих только действительные полюсы и таких, что  $F$ ,  $F'$ ,  $F''$  имеют только действительные нули.