ANNALES UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN-POLONIA

VOL. XXXIX, 21. SECTIO A 1985

Mathematisches Institut
Universität Plovdiv

P. G. TODOROV

Über die Verteilung der Nullstellen von zwei assoziierten Klassen von ganzen und gebrochenenrationalen Funktionen

O rozkładzie miejsc zerowych w dwóch sprzężonych klasach funkcji wymiernych

О распределении нульов в двух сопряженных классах рациональных функций

Man bilde die Klasse der m-Polynome ($m \geq 2$ - willkürlich) von Grad n ($n \geq 2$ - fixiert)

$$P_k(z) = a_k \prod_{l=1}^{n} (z - z_{kl}) \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

mit willkürlichen Koeffizienten $a_k > 0$ und Nullstellen z_{kl}, die in irgendeinem geschlossenen Kreis $\overline{K}$ der z-Ebene liegen. Durch Normalisierung kann man annehmen, dass $\overline{K}$ der Kreis

$$\overline{K} = \{z \mid |z| \leq R\} \qquad (R > 0) \tag{2}$$

ist. Von den Polynomen (1) möge man die folgenden zwei assoziierten Klassen durch die linearen Kombinationen

$$P(z; e) = \sum_{k=1}^{m} A_k [P_k(z)]^e \tag{3}$$

mit willkürlichen Koeffizienten $A_k > 0$ $(1 \leq k \leq m)$ bilden, wo $e = 1$ für die eine Klasse und $e = -1$ für die andere Klasse ist. Die Klasse (3) bei $e = 1$ ist von Tchakaloff [1] betrachtet, der beweist, dass die Nullstellen der Polynome (3) ($\varepsilon = 1$) im geschlossenen Kreis

$$\overline{G} = \left\{ z \mid |z| \geq \frac{R}{\sin \frac{\pi}{2n}} \right\} \tag{4}$$

liegen. Tchakaloff [1] zeigt mit folgendem Beispiel, dass der Kreis (4) maximal für die Klasse (3) ($\varepsilon = 1$) ist: Bei $m = 2$ liegen die Nullstellen der Polynome

$$P_{1,2}(z) = \left\{ z \pm i z_0 \sin \frac{\pi}{2n} \exp\left(\pm \frac{i\pi}{2n} \right) \right\}^n \tag{5}$$

wo z_0 irgendein Punkt von der Kreislinie $|z| = \dfrac{R}{\sin \frac{\pi}{2n}}$ ist, auf der Kreislinie $|z| = R$, und die Summe $P_1(z) + P_2(z)$ verschwindet bei $z = z_0$.

Tchakaloff [1] lässt die Frage betreffend die Einzigkeit der Polynome (5) mit solcher extremalen Eigenschaft offen. In vorliegender Mitteilung geben wir die Methode, mit der wir finden, dass die Polynome (5), multipliziert entsprechend mit willkürlichen positiven Zahlen $a_{1,2}$, die einzigen in der Klasse (1) sind, deren lineare Kombination mit entsprechend gewählten positiven Koeffizienten $A_{1,2}$ die extremale Unterklasse von Polynomen der Klasse (3) bei $z = 1$ bildet. Damit lösen wir das Problem für die Verteilung der Nullstellen der Klasse (3) bei $\varepsilon = 1$ im Kreis (5) vollkommen. Ausserdem stellen wir auch das analogische Problem für die assoziierte Klasse (3) bei $\varepsilon = -1$ auf und lössen es vollkommen.

Theorem. *Wenn die Nullstellen der Polynome* (1) *im Kreis* (2) *liegen, dann ist der Kreis* (4) *ein und derselbe maximale geschlossene Kreis, in dem die Nullstellen aller Funktionen der entsprechenden assoziierten Klassen* (3) *bei* $\varepsilon = 1$ *und* $\varepsilon = -1$ *liegen.*

Nur bei $m = 2$ *hat man entsprechend die einzigen extremalen Funktionen*

$$\begin{aligned} P(z;\varepsilon) &= A_1 a_1^{\varepsilon} \left\{ z - R \exp i \left[\varphi - \varepsilon \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \right) \right] \right\}^{\varepsilon n} + \\ &+ A_2 a_2^{\varepsilon} \left\{ z - R \exp i \left[\varphi + \varepsilon \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \right) \right] \right\}^{\varepsilon n}, \end{aligned} \tag{6}$$

wo

$$A_1 a_1^{\varepsilon} = A_2 a_2^{\varepsilon} \tag{7}$$

ist, die in dem Grenzpunkt

$$z_0 = \frac{R}{\sin \frac{\pi}{2n}} e^{i\varphi} \qquad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \tag{8}$$

verschwinden.

Beweis. Möge $m, n \geq 2$ sein. Wenn $z \notin \overline{K}$, aber alle $z_{kl} \in \overline{K}$ sind, erhalten wir aus (3)

$$\frac{1}{z^{\epsilon n}} P(z, \epsilon) = \sum_{k=1}^{m} A_k \left[\frac{1}{z^n} P_k(z) \right]^{\epsilon}, \tag{9}$$

wo

$$\left[\frac{1}{z^n} P_k(z) \right]^{\epsilon} = a_k^{\epsilon} \prod_{l=1}^{n} \left(1 - \frac{z_{kl}}{z} \right)^{\epsilon} \qquad (1 \leq k \leq m) \tag{10}$$

ist. Gemäss unserer Arbeit [2], Theorem 1 haben wir im Kreis $\overline{K}$ die Ungleichheit

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{z^n} P_k(z) \right]^{\epsilon} = a_k^{\epsilon} \operatorname{Re} \prod_{l=1}^{n} \left(1 - \frac{z_{kl}}{z} \right)^{\epsilon} \geq 0 \quad (1 \leq k \leq m), \tag{11}$$

wo wir die Gleichheist nur bei

$$\frac{z_{kl}}{z} = \sin \frac{\pi}{2n} \exp \left[\mp i\epsilon \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \right) \right] \quad (1 \leq l \leq m \,;\, 1 \leq k \leq m) \tag{12}$$

haben. Aus (12) folgt, dass man

$$|z| = \frac{R}{\sin \frac{\pi}{2n}}, \quad |z_{kl}| = R \quad (1 \leq l \leq m \,;\, 1 \leq k \leq m) \tag{13}$$

und

$$\arg z_{kl} \equiv \arg \mp \epsilon \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \right) (\bmod 2\pi) \quad (1 \leq l \leq n \,;\, 1 \leq k \leq m) \tag{14}$$

haben muss. Aus (13–14) folgt, dass man die Gleichheit in (11) nur dann hat, wenn der Punkt z von (8) bestimmt ist und alle Punkte $z_{kl} (1 \leq l \leq n \,;\, 1 \leq k \leq m)$ untereinander und mit jedem beliebigen der beinden Punkte

$$\varsigma \mp (\epsilon) = R \exp i \left[\varphi \mp \epsilon \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \right) \right]. \tag{15}$$

übereinstimmen. Wenn man in (1) alle $z_{kl} = \varsigma \mp (\epsilon)$ setzt, erhält man die einzigen extremalen Polynome

$$P_k^{\mp}(z; \epsilon) = a_k \left\{ z - R \exp i \left[\varphi \mp \epsilon \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \right) \right] \right\}^n \,(1 \leq k \leq m \,;\, a_k > 0) \tag{16}$$

in der Klasse (1) für die Ungleichheit (11), d.h. für die man in Punkt (8) die rein imaginären Werte

$$\left[\frac{1}{z_*^n} P_k^{\mp}(z_*; \epsilon) \right]^{\epsilon} = \mp i a_k^{\epsilon} \cos^{\epsilon n} \frac{\pi}{2n} \quad (1 \leq k \leq m) \tag{17}$$

hat. Folglich muss man die extremalen Funktionen der entsprechenden Klassen (3) bei $\epsilon = 1$ und $\epsilon = -1$ mit den Polynomen (16) so bilden, dass in dem Punkt (8) der rechte Teil von (9) verschwindet. Wenn man $P_k(z) = P_k^{-}(z; \epsilon)(1 \leq k \leq m)$ oder

$P_k(z) = P_k^+(z;\varepsilon)(1 \le k \le m)$ nimmt, dann wird der rechte Teil von (9) bei $z = z_\bullet$, gemäss (17),eine rein imaginäre Zahl sein, d.h. verschieden von Null. Folglich muss man $P_k(z) = P_k^-(z;\varepsilon)$ für irgendwelche Werte $k = \lambda_s, s = 1,\ldots,m$ $(\nu < m)$ aus der Folge $k = 1,2,3,\ldots,m$ und $P_k(z) = P_k^+(z;\varepsilon)$ für die übrigen Werte $k = \mu_s, s = 1,\ldots,m-\nu$ aus dieser Folge nehmen. Dann ergibt sich aus (3) und (16), dass die gesuchten extremalen Funktionen der Klassen (3) bei $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = -1$ die entsprechende Form

$$\begin{aligned} P(z;\varepsilon) &= \sum_{s=1}^{\nu} A_{\lambda_s}\left[P_{\lambda_s}^-(z,;\varepsilon)\right]^{\varepsilon} + \sum_{s=1}^{m-\nu} A_{\mu_s}\left[P_{\mu_s}^+(z,;\varepsilon)\right]^{\varepsilon} = \\ &= C_{1\varepsilon}\left\{z - R\exp i\left[\varphi - \varepsilon\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)\right]\right\}^{\varepsilon n} + \\ &+ C_{2\varepsilon}\left\{z - R\exp i\left[\varphi + \varepsilon\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)\right]\right\}^{\varepsilon n} \end{aligned} \tag{18}$$

haben müssen, wo

$$C_{1\varepsilon} = \sum_{s=1}^{\nu} A_{\lambda_s} a_{\lambda_s}^{\varepsilon}, \qquad C_{2\varepsilon} = \sum_{s=1}^{m-\nu} A_{\mu_s} a_{\mu_s}^{\varepsilon} \tag{19}$$

willkürliche positive Konstanten sind. Wir könen andere positive Konstanten $A_{1,2}$ und $a_{1,2}$ einführen, die entsprechend aus den Systemen

$$A_1 a_1^{\varepsilon} = C_{1\varepsilon}, \qquad A_2 a_2^{\varepsilon} = C_{2\varepsilon} \qquad (\varepsilon = \pm 1) \tag{20}$$

bestimmt werden. Dann nehmen die Funktionen (18) die Form(6) an. Um extremal zu sein, müssen die Funktionen (6) noch im Punkt (8) verschwinden. Wenn man in (6) $z = z_\bullet$ setzt, erhält man mit Hilfe von (17) die Werte

$$\frac{1}{z_\bullet^{\varepsilon n}} P(z_\bullet;\varepsilon) = i\,(A_1 a_1^{\varepsilon} - A_2 a_2^{\varepsilon}) \cos^{\varepsilon n}\frac{\pi}{2n}, \tag{21}$$

die gleich Null sind, wenn die Bedingung (7) erfüllt ist.

Aus den bis hierher erhaltenen Resultaten folgt, dass im Kreis $|z| \ge R\sin(\frac{\pi}{2n})$der rechte Teil von (9) verschieden von Null ist, ausser für die Funktionen (6–7) im Grenzpunkt (8).

Damit ist das Theorem vollkommen bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Tchakaloff, L., *Sur la distribution des zéros d'une classe de polynômes algébriques*.C.R. Acad. Bulgare Sci. ,Tome 13, (3) (1960), 249–252.

[2] Todorov,P., *Zur Theorie der analytischen positiven und schlichten konformen Abbildungen durch zusammengesetzte ganze und meromorphe Funktionen mit einer endlichen Anzahl Nullstellen und Polstellen*. Bulletin de l'Académie royale de Belgique (Classe des Sciences), 5ᵉ Serie, Tome LIV, 1968 (5), 513–526.

STRESZCZENIE

Praca dotyczy zagadnienia jednoznaczności wielomianów i funkcji wymiernych w przypadku ekstremalnym dla pewnego problemu rozważanego przez Czakałowa.

РЕЗЮМЕ

Данная работа касается проблемы единственности многочленов и рациональных функций в экстремальном случае для задачи Чакалова.

ANNALES UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA

Nakład 650 egz.+25 nadbitek. Ark. wyd. 10, ark. druk. 11,375. Oddano do składu w lipcu 1988 roku, do powielenia przyjęto w listopadzie 1988 r., powielono w grudniu 1988 r. w Zakładzie Poligrafii UMCS. Zam. 447/88. Cena zł 400,—

Skład komputerowy wykonali Andrzej Gryciuk i Krystian Pieńkoś SSP „Infel"

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKLODOWSKA
LUBLIN-POLONIA

VOL.XXXVIII SECTIO A 1984

Adresse:

UNIWERSYTET MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ
BIURO WYDAWNICTW
Plac Marii
Curie-Skłodowskiej 5 20-031 LUBLIN POLOGNE

Cena zł 400,—