ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XXXIII, 6 SECTIO A 1979

Zakład Zastosowań Matematyki Instytutu Ekonomii Politycznej i Planowania
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin
Zakład Matematyki Stosowanej, Politechnika Lubelska, Lublin

Krystyna CIOZDA, Zdzisław LEWANDOWSKI,
Józef PITUCH

Sur les représentations conformes du cercle unité sur des domaines balayés par certaines familles de demi-droites

O przekształceniach konforemnych koła jednostkowego na obszary wymiecione przez pewne rodziny półprostych

О конформных отображениях единичного круга на области выметённые некоторыми семействами полупростых

1. INTRODUCTION

Désignons par S_0 la classe des fonctions holomorphes et univalentes dans E, où $E_R = \{z : |z| < R\}$, $E_1 = E$, et soit $S \subset S_0$ la classe des fonctions de la forme $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ Désignons ensuite par T la classe des domaines convexes vers l'axe réel négatif, c'est-à-dire des domaines $D \neq \mathbb{C}$ tels que pour tout $w_0 \notin D$ fixé la demi-droite: $w(\lambda) = w_0 - \lambda$, $\lambda \in [0; \infty)$ est contenue dans $\mathbb{C} \setminus D$. Évidemment si $D \in T$, D est un domaine simplement connexe et, si $w_1 \in D$, la demi-droite: $w = w_1 + \lambda$, $\lambda \in [0;\infty)$ est contenue dans D.

De même que dans le travail [2] la classe des fonctions qui effectuent la représentation univalente du cercle E sur des domaines de la classe T sera notée L_0. Cette classe a été étudiée en détail dans les travaux [2], [3]. Dans le travail [2] se trouve établi le théorème 4 que, en tenant compte du lemme et des remarques finales du paragraphe 2 du présent travail, on peut énoncer comme il suit:

THÉORÈME 1. Une fonction f holomorphe et univalente dans E est presque convexe par rapport à la fonction convexe $h_0(z) = \frac{z}{1-z}$, c'est-à-dire qu'elle satisfait à l'inégalité

$$\mathrm{Re}(1-z)^2 f'(z) \geqslant 0, \qquad z \in E, \tag{1.1}$$

si et seulement s'il existe des suites $\{z_n'\}$, $\{z_n''\}$ de points appartenant à E, $n = 1,2,\ldots$, $\lim_{n\to\infty} z_n' = \lim_{n\to\infty} z_n'' = 1$ telles que

1° si $f(E)$ n'est pas une bande dont les bords sont parallèles à l'axe réel, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, f(z_n) = \sup_{z\in E} \mathrm{Im}\, f(z), \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, f(z_n) = \inf_{z\in E} \mathrm{Im}\, f(z), \tag{1.2}$$

2° si $f(E)$ est une bande dont les bords sont parallèles à l'axe réel, on a (1.2) et, en outre,

$\mathrm{Re}\, f(z_n') \nearrow \infty$ et $\mathrm{Re}\, f(z_n'') \nearrow \infty$ pour $n \to \infty$

Rappelons encore qu'une fonction f non constante et holomorphe dans E est presque convexe par rapport à une fonction h convexe et univalente dans E si elle satisfait à la condition $\mathrm{Re}\left[\frac{f'(z)}{h_0'(z)}\right] \geqslant 0$, $z \in E$. La définition des fonctions presque convexes a été donnée dans le travil de Kaplan [5].

Désignons par h^p, $p > 0$, la classe des fonctions harmoniques dans E et telles que si $F \in h^p$, $z = re^{i\varphi} \in E$, la fonction $\int_0^{2\pi} |F(r,\varphi)|^p d\varphi$ est bornée pour $r \in (0;1)$. Notons H_p la classe des fonctions f holomorphes dans E telles que la fonction $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi$ est bornée pour toute fonction $f \in H_p$ (classe de Hardy).

Dans [4] l'auteur a démontré (1ère partie du théorème 3, p. 378) que si $u(r,\Theta) \in h^p$, $p>1$, $u(r,\Theta)$ admet presque partout (au sens de la mesure de Lebesgue) des limites radiales $\lim_{r \to 1^-} u(r,\Theta) = u(\Theta)$ et $u(\Theta) \in L^p$, où L^p désigne la classe des fonctions de $p^{\text{ème}}$ puissance sommable dans $[0;2\pi]$; les fonctions $u(\theta)$ satisfont, de plus, à la formule de Poisson-Lebesgue. Dans ce cas on a pour toute fonction $f = u + iv$ holomorphe dans E:

$$(1.3)\qquad f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta)\,\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta + ib, \qquad b = \operatorname{Im} f(0),$$

(cf. [6], p. 431, formule 7.2).

2. LA CLASSE L_0^α

Désignons par L_0^α la classe des fonctions définies dans E, satisfaisant aux conditions normalisantes (1.2) et représentant le cercle unité E sur des domaines de la classe $T^\alpha \subset T$, où T^α est la classe des domaines convexes vers l'axe réel négatif et contenus dans une bande de largeur $2\pi\alpha$ $\alpha \in (0;1]$. Notons encore $M[a,b]$ la classe des fonctions m, faiblement croissantes dans l'intervalle $[a;b]$, telles que $\int_a^b dm(\theta) = 1$. On a le

THÉORÈME 2. Pour que $f \in L_0^{\alpha}$ pour $\alpha \in (0;1]$ il faut et il suffit que f soit représentable par la formule

$$(2.1) \qquad f(z) = 2\alpha\beta \int_0^{2\pi} \ln \frac{1 - ze^{-i\theta}}{1 - z}\, dm(\theta) + a_0$$

où $a_0 = f(0)$, $\beta \in (0;1]$, $\ln 1 = 0$ et $m \in M[0,2\pi]$.

Démonstration. 1° Admettons que $f \in L_0^{\alpha}$, $f(0) = a_0$, $\sup_{z \in E} \operatorname{Im} f(z) - \inf_{z \in E} \operatorname{Im} f(z) \leqslant 2\pi\alpha$ et que les conditions normalisantes (1.2) soient satisfaites. Cela veut dire que $f(E)$ est contenu dans une bande de largeur $2\pi\alpha$ et contenant le point a_0. En appliquant le théorème bien connu de Fatou à la fonction $\exp(-if)$ qui est bornée dans E, on constate que sur l'ensemble $[0,2\pi] \setminus A$ il existe une limite finie $\lim_{r \to 1^-} \operatorname{Im} f(re^{i\theta})$, où $A \subset [0;2\pi]$ et $\mu(A)=0$; μ est la mesure de Lebesque. Du fait que $f \in L_0$ il découle, en tenant compte des conditions normalisantes (1.2) et de la correspondance biunivoque entre les points de la frontière de $f(E)$ et ceux de la circonférence unité, que $\operatorname{Im} f(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1^-} \operatorname{Im} f(re^{i\theta})$ est sur l'ensemble $[0;2\pi] \setminus A$ une fonction faiblement décroissante. En admettant les valeurs de $\operatorname{Im} f(e^{i\theta})$ aux points de l'ensemble A égales à la moyenne aritmétique des limites à droite et à gauche au point θ, on obtient l'extension de $v(\theta) = \operatorname{Im} f(e^{i\theta})$ à tout l'intervalle $[0;2\pi]$ comme fonction faiblement décroissante.

Ceci posé, il résulte de la formule (1.3) que f peut être représentée par la formule

$$f(z) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, d\theta + \operatorname{Re} f(0),$$

d'où il vient

$$(2.2) \qquad f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta) \frac{d}{dz} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta$$

où il résulte des propriétés de la fonction v que l'intégrale dans (2.2) est une intégrale de Riemann.

Étant donné que $\frac{d}{dz} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} = - \frac{1}{iz} \frac{d}{d\theta} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}$ la formule (2.2) prend la forme

$$f'(z) = - \frac{1}{2\pi z} \int_0^{2\pi} v(\theta) d_\theta \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}$$

En intégrant par parties on obtient

$$f'(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - e^{i\theta}}{(e^{i\theta} - z)(1 - z)} dv(\theta)$$

Puisque $\sup_{z \in E} \operatorname{Im} f(z) - \inf_{z \in E} \operatorname{Im} f(z) \leqslant 2\pi\alpha$, on a $- \int_0^{2\pi} dv(\theta) \leqslant 2\pi\alpha$ et, en posant $- \frac{v(\theta)}{2\pi\alpha} = \mu(\theta)$ on obtient

$$f'(z) = - 2\alpha \int_0^{2\pi} \frac{1 - e^{i\theta}}{(e^{i\theta} - z)(1 - z)} d\mu(\theta),$$

où μ est une fonction non décroissante dans $[0;2\pi]$ et telle que $\int_0^{2\pi} d\mu(\theta) \leqslant 1$. Par conséquent

$$f'(z) = 2\alpha\beta \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} - 1}{(e^{i\theta} - z)(1 - z)} d\left(\frac{\mu(\theta)}{\beta}\right), \qquad \beta \in (0;1],$$

$$\int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = \beta ;$$

toutes les fonctions de la classe L_0 peuvent donc être représentées sous la forme

$$(2.3)\qquad f'(z) = 2\alpha\beta\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}-1}{(e^{i\theta}-z)(1-z)}\,dm(\theta),\qquad m = \frac{\mu}{\beta},$$

$$m\in M[0;2\pi],\qquad \beta\in(0;1].$$

Intégrant (2.3) on obtient

$$(2.4)\qquad f(z) = 2\alpha\beta\int_0^{2\pi}\ln\frac{1-ze^{-i\theta}}{1-z}\,dm(\theta)+a_0,\qquad \alpha\in(0;1],$$

$$\beta\in(0;1],\qquad a_0 = f(0).$$

2° Soit $f'(z) = 2\alpha\beta\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}-1}{(e^{i\theta}-z)(1-z)}\,dm(\theta)$.
Alors on a

$$(1-z)^2f'(z) = 2\alpha\beta\int_0^{2\pi}\frac{(e^{i\theta}-1)(1-z)}{e^{i\theta}-z}\,dm(\theta).$$

Comme la fonction sous le signe intégrale a une partie réelle positive et $m\in M[0;2\pi]$, on a $\mathrm{Re}\left[(1-z)^2f'(z)\right]\geqslant 0$ et, en vertu du théorème 1, $f\in L_0$ et satisfait aux conditions normalisantes (1.2). De (2.4) on tire

$$\mathrm{Im}\,f(z) = 2\alpha\beta\int_0^{2\pi}\mathrm{Im}\ln\frac{1-ze^{-i\theta}}{1-z}\,dm(\theta).$$

Comme la fonction $\frac{1-ze^{-i\theta}}{1-z}$ représente le cercle E sur un demi-plan dont le bord passe par l'origine, on a: $\sup_{z\in E}\mathrm{Im}\,f(z) - \inf_{z\in E}\mathrm{Im}\,f(z)\leqslant 2\pi\alpha$, étant donné que $\beta\in(0;1]$. La branche du logarithme qu'il y a à choisir dans (2.4) est celle pour laquelle $\ln 1 = 0$. Le théorème 2 se trouve ainsi établi.

De l'interprétation géométrique de la classe L_0 il découle directement (cf.p.ex. [2]) que pour toute fonction $g \in L_0$ il existe: $\tau \in [0;2\pi]$ et deux suites $\{z_n'\}$, $\{z_n''\}$, $n = 1,2,\dots$, $z_n' \in E$, $z_n'' \in E$, $\lim_{n\to\infty} z_n' = \lim_{n\to\infty} z_n'' = e^{i\tau}$, telles que

$$(2.5)\qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} g(z_n') = \sup_{z\in E} \operatorname{Im} g(z), \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} g(z_n'') = \inf_{z\in E} \operatorname{Im} g(z).$$

Soit maintenant $L^\alpha \subset L_0$ la classe des fonctions telles que si $f \in L^\alpha$, $f(E)$ est contenu dans une bande dont les bords sont parallèles à l'axe réel et dont la largeur est $2\pi\alpha$, $\alpha \in (0;1]$. Soit encore $L_\tau^\alpha \subset L^\alpha$ la classe des fonctions satisfaisant aux conditions normalisantes (2.5). Il s'ensuit que si $f \in L^\alpha$, il existe un $\tau \in [0;2\pi]$ tel que $f \in L_\tau^\alpha$. Évidemment $L^\alpha = \bigcup_\tau L_\tau^\alpha$, $\tau \in [0;2\pi]$. La fonction F: $F(z) = f(ze^{i\tau})$ appartient à L_0^α. Par conséquent, pour déterminer la structure interne des fonctions de la classe L^α il suffit de se borner à la classe L_0^α.

Du théorème 2 on obtient comme simple conséquence, en s'appuyant sur le théorème de l'enveloppe convexe [1], le

THÉORÈME 3. <u>Le domaine de variation du coefficient</u> a_1 <u>pour</u> $f \in L_0^\alpha$, $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, <u>est le cercle fermé de centre</u> $s = 2\alpha$ <u>et de rayon</u> $R = 2\alpha$, $\alpha \in (0;1]$.

En distinguant la sous-classe $L_0^\alpha \subset L_0$ nous avons voulu non seulement signaler un fait intéressant concernant les sous-classes de la classe L_0, mais aussi indiquer les propriétés internes des fonctions convexes par rapport au point w_0 qui feront l'objet du chapitre suivant.

3. UNE SOUS-CLASSE DE FONCTIONS CONVEXES PAR RAPPORT AU POINT W_o

On appelle domaine convexe par rapport au point w_o un domaine simplement connexe ne contenant pas les points w_o et $w=\infty$, tel que toute demi-droite d'extrémité w_o a en commun avec ce domaine un segment de droite ou l'ensemble vide; en particulier, ce segment peut être une demi-droite.

Nous nous occuperons justement de ce cas particulier où la partie commune est une demi-droite. La classe des domaines simplement connexes qui satisfont à la définition ainsi rétrécie de la convexité par rapport au point w_o sera désignée par $T(w_o)$. Soit $T^{\alpha}(w_o)\subset T(w_o)$, $\alpha\in(0;1]$ la classe des domaines contenus dans un angle de sommet w_o et de mesure $2\pi\alpha$. Nous noterons $L^{\alpha}[w_o]$ la classe des fonctions holomorphes et univalentes dans E et telles que $f\in L^{\alpha}[w_o]\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow f(E)\in T^{\alpha}(w_o)$. Désignons encore par $L_0^{\alpha}[w_o]\subset L^{\alpha}[w_o]$ la classe des fonctions f satisfaisant aux conditions normalisantes suivantes: il existe des suites $\{z_n'\}$, $\{z_n''\}$, $z_n'\in E$, $z_n''\in E$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n' = \lim\limits_{n\to\infty} z_n'' = 1$ telles que

1° si $f(E)$ n'est pas un angle de sommet w_o, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\arg\left[f(z_n')-w_o\right] &= \sup_{z\in E}\arg\left[f(z)-w_o\right],\\ \lim_{n\to\infty}\arg\left[f(z_n'')-w_o\right] &= \inf_{z\in E}\arg\left[f(z)-w_o\right],\end{aligned}\tag{3.1}$$

2° si $f(E)$ est un angle de sommet w_o, les conditions normalisantes (3.1) sont satisfaites et, de plus, on demande que le point $z=1$ corresponde au point $w=\infty$ de la frontière du domaine $f(E)$.

Soit $\varphi(z) = \ln(f(z) - w_0) = \ln|f(z) - w_0| + i \arg[f(z) - w_0]$. On obtient ainsi le

THÉORÈME 4. $f \in L_0^\alpha[w_0] \Leftrightarrow \varphi \in L_0^\alpha$.

Des théorèmes 2 et 4 découle le

THÉORÈME 5. La classe $L_0^\alpha[w_0]$ obéit à la formule structurale suivante:

$$(3.2) \quad f(z) = w_0 + [f(0) - w_0]\exp[2\alpha\beta \int_0^{2\pi} \ln \frac{1 - e^{-i\theta}z}{1 - z}\, dm(\theta)$$

Cette note, que nous considérons comme préliminaire, constitue une introduction à une étude plus détaillée de certaines classes de fonctions univalentes que nous nous proposons d'exposer dans une note à suivre.

REFERENCES

[1] Ašnevic, I.Ya., Ulina, G.V., On regions of values of analytic functions represented by a Stieltjes integral, (Russian), Vestnik Leningrad. Univ., 10(1955), 31-42.

[2] Ciozda, K., Sur la classe des fonctions convexes vers l'axe négatif, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., (sous presse).

[3] ,, , Sur quelques problèmes extrémaux dans les classes des fonctions convexes vers l'axe réel négatif, Ann. Polon. Math., (sous presse).

[4] Goluzin, G.M., Geometric theory of functions of a complex variable, (Russian), Moscow 1966.

[5] Kaplan, W., Close-to-convex schlicht functions, Michigan Math. J., 1(1952), 169-185.

[6] Zygmund, A., Trigonometric series, I, Cambridge 1968.

STRESZCZENIE

Niech L^{α} będzie klasą funkcji f jednolistnych w E i takich, że $f(E)$ jest zawarty w pasie równoległym do osi rzeczywistej o szerokości $2\pi\alpha$, $\alpha \in (0,1]$. Załóżmy ponadto, że jeśli $w_1 \in f(E)$, to półprosta $w = w_1 + \lambda$, $\lambda \in [0,\infty)$ jest zawarta w $f(E)$.
Dla podklasy $L_0^{\alpha} \subset L^{\alpha}$ funkcji spełniających pewne warunki normalizacyjne podano wzór strukturalny. Rozważano też klasę $L_0^{\alpha}[w_0]$ funkcji wypukłych względem punktu w_0.

Резюме

Пусть L^{α} обозначает класс функций f однолистных в E таких, что $f(E)$ содержится в полосе ширины $2\pi\alpha$, $\alpha \in (0,1]$ параллельной к вещественной оси. Кроме того предполагается, что $f(E)$ имеет следующее свойство: если $w_1 \in f(E)$, то полупрямая $w = w_1 + \lambda$, $\lambda \in [0,\infty)$ содержится в $f(E)$. Для подкласса $L_0^{\alpha} \subset L^{\alpha}$ функций нормированных соответственным образом дана структурная формула. Исследуется также классы $L_0^{\alpha}[w_0]$ функций выпуклых относительно точки w_0.