ANNALES UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN–POLONIA

VOL. XXXII, 1 SECTIO A 1978

Instytut Ekonomii Politycznej i Planowania
Zakład Zastosowań Matematyki
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej

Franciszek BOGOWSKI i Czesława BUCKA

Sur une classe de fonctions étoillées bornées

O pewnej klasie funkcji gwiaździstych ograniczonych

Об некотором классе звездных ограниченных функций

1. Introduction. Désignons par P la classe des fonctions p, holomorphes dans K, telles que $p(0) = 1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ pour $z \in K$, où $K_r = [z : |z| < r]$, $K_1 = K$.

Considérons la fonction :

$$P_M(z) = \frac{1+z}{\sqrt{(1-z)^2 + 4z/M}}, \qquad z \in K, \qquad M > 1, \tag{1.1}$$

où la branche du radical $\sqrt{(1-z)^2 + 4z/M}$ est celle qui est égale à 1 pour $z = 0$.

La fonction P_M est une fonction univalente dans K, car il résulte de l'égalite $P_M(z_1) = P_M(z_2)$ que $(1 - 1/M)(1 - z_1, z_2)(z_2 - z_1) = 0$, ce qui n'a lieu que pour $z_1 = z_2$. Cette fonction admet des valeurs réelles sur l'axe réel et effecture la représentation univalente du cercle K sur le demi-plan droit entaillé le long de l'axe réel positif de $\sqrt{M}$ à $+\infty$.

Désignons par P_M la classe des fonctions holomorphes et subordonnées en domaine dans le cercle K à la fonction P_M, c'est-à-dire des fonctions q telles que $q(z) = P_M(\omega(z))$, où ω est une fonction satisfaisant aux hypothèses du lemme de Schwarz ($\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$). Nous le noterons comme il suit:

$$q(z) \prec P_M(z) \qquad \text{ou} \qquad (q, P_M, 1).$$

De là on tire:

$$q(z) = P_M(\omega(z)) = \frac{1+\omega(z)}{\sqrt{(1-\omega(z))^2 + 4\omega(z)/M}}$$

Comme $\omega(z) = \dfrac{p(z) - 1}{p(z) + 1}$ pour $z \in K$, $p \in P$, il vient

$$q(z) = \frac{p(z)}{\sqrt{(p^2(z) - 1)\frac{1}{M} + 1}} \tag{1.2}$$

Pour $M = \infty$ la classe P_M est identique à la classe P.

A la classe P se rattache la classe S^* des fonctions étoilées, c'est-à-dire des fonctions qui représentent le cercle K sur des domaines étoilés par rapport à l'origine, en sorte que $f(0) = 0, f'(0) = 1$:

$$f \in S^* \Longleftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} = p(z), \quad p \in P, \quad z \in K.$$

C'est une sous-classe bien connue de la classe S des fonctions holomorphes et univalentes dans K; $f(0) = 0, f'(0) = 1$.

A la classe P_M, $M > 1$, on peut rattacher une classe $S_M^* \subset S$ de fonctions étoilées et bornées par M.

Définition.

$$f \in S_M^*, M > 1 \Longleftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} = q(z), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad q \in P_M \tag{1.3}$$

En tenant compte de (1.2) on obient:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{p(z)}{\sqrt{(p^2(z) - 1)\frac{1}{M} + 1}}. \tag{1.4}$$

La classe S_M^* est donc la famille des solutions de l'équation différentielle (1.4) avec les conditions initiales $f(0) = 0, f'(0) = 1$. Les fonctions de la classe S_M^* représentent K sur des domaines étoilés par rapport à l'origine, puisque

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \quad \text{pour} \quad z \in K.$$

Nous allons prouver plus loin, entre autres, que $|f(z)| < M$ pour $z \in K$ et que $S_M^* \subset S^*(M) = [f\colon f \in S,\ f(K)$ domaine étoilé par rapport à $w = 0, f(K) \subset K_M,\ M > 1]$.

2. Soit $p(z) = \dfrac{1 + ze^{ia}}{1 - ze^{ia}}$, $\quad a \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Alors

$$q(z, a) = P_M(ze^{ia}) = \frac{1 + ze^{ia}}{\sqrt{(1 - ze^{ia})^2 + \dfrac{4ze^{ia}}{M}}}$$

Pour une telle fonction les solutions de l'équation (1.4) ont la forme:

$$f(z) = \frac{4z}{\left[\sqrt{(1 - ze^{ia})^2 + \dfrac{4ze^{ia}}{M}} + (1 - ze^{ia})\right]^2} \tag{2.1}$$

On sait que cette fonction est solution de l'équation

$$\frac{w}{\left(1 - \dfrac{we^{ia}}{M}\right)^2} = \frac{z}{(1 - ze^{ia})^2}$$

où $w = f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, et qu'elle représente le cercle K sur le cercle K_M entaillé le long d'un rayon à partir de $e^{i(\pi - a)}M$ jusqu'à $e^{i(\pi - a)}M(2M - 1 - 2\sqrt{M(M-1)})$.

Pour $a = 0$ la fonction (2.1) prend la forme

$$F_M(z) = \frac{4z}{\left[\sqrt{(1 - z)^2 + \dfrac{4z}{M}} + 1 - z\right]^2} \tag{2.2}$$

C'est la „fonction de Pick", fonction extrémale dans certains problèmes dans la classe des fonctions univalentes bornées.

Lemme. *Si r est fixé et $0 < r < 1$, $|F_M(re^{i\theta})|$ est une fonction décroissante de la variable Θ pour $\Theta \in \langle 0, \pi \rangle$ et croissante de la variable Θ pour $\Theta \in \langle \pi, 2\pi \rangle$.*

Démonstration. Il suffit d'établir cette propriété pour $\log \left| \dfrac{F_M(z)}{z} \right|$, $z = re^{i\theta}$. Comme

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log \frac{F_M(z)}{z} = i \left[\frac{zF_M'(z)}{F_M(z)} - 1\right]$$

on a

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log\left|\frac{F_M(z)}{z}\right| = \mathrm{Re}\left[i\left(\frac{zF_M'(z)}{F_M(z)}-1\right)\right] = -\mathrm{Im}\left(\frac{zF_M'(z)}{F_M(z)}-1\right) =$$

$$= -\mathrm{Im}\,P_M(z) = -\mathrm{Im}\frac{1+z}{\sqrt{(1-z)^2+\frac{4z}{M}}}.$$

Puisque P_M est une fonction univalente et typiquement réelle et que $P_M'(0)=2(1-\frac{1}{M})>$ >0, on a

$$\mathrm{Im}\,P_M(re^{i\theta})>0 \quad \text{pour} \quad 0<\theta<\pi,$$

et

$$\mathrm{Im}\,P_M(re^{i\theta})<0 \quad \text{pour} \quad \pi<\theta<2\pi$$

(v.p.ex. [6]), d'où résulte la conclusion du lemme.

On a donc:

$$\max_{|z|\leq r}|F_M(z)| = \frac{4r}{\left[\sqrt{(1-r)^2+\frac{4r}{M}}+1-r\right]^2} = F_M(r),$$

(2.3)

$$\min_{|z|\leq r}|F_M(z)| = \frac{4r}{\left[\sqrt{(1+r)^2-\frac{4r}{M}}+1+r\right]^2} = -F_M(-r),$$

Théorème 2.1. *Si $f\in S_M^*$, on a*

(2.4) $$-F_M(-|z|)\leq|f(z)|\leq F_M(|z|), \quad z\in K$$

où F_M est une fonction de la forme (2.2).

Démonstration. De l'équation $\frac{zf'(z)}{f(z)}=q(z)$, $q\in P_M$, on tire

(2.5) $$f(z)=z\exp\int_0^z\frac{q(\zeta)-1}{\zeta}d\zeta,$$

d'où

$$|f(z)|=|z|\exp\left[\mathrm{Re}\int_0^z\frac{q(\zeta)-1}{\zeta}d\zeta\right].$$

En paramétrisant le segment $[0, z]$ comme il suit: $\zeta = te^{i\theta}$, $0 \leq t \leq |z|$, $\theta = \arg z$, et en tenant compte de ce que $d\zeta = e^{i\theta}$ dt, on a:

$$|f(z)| = |z| \exp\left[\mathrm{Re}\int_0^{|z|} \frac{q(te^{i\theta})-1}{t}\,dt\right] = |z| \exp \int_0^{|z|} \frac{\mathrm{Re}\,q(te^{i\theta})-1}{t}\,dt. \tag{2.6}$$

Puisque $q(z) \lesssim P_M(z)$ et que P_M est univalente dans K, il s'ensuit que

$$\min_{|z|\leq t} \mathrm{Re}\,P_M(z) \leq \mathrm{Re}\,q(te^{i\theta}) \leq \max_{|z|\leq t} \mathrm{Re}\,P_M(z). \tag{2.7}$$

Cela signifie qu'il existe des nombres $z_1 = te^{i\theta_1}$, $z_2 = te^{i\theta_2}$, $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$, $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$, tels que

$$\begin{aligned} &\max_{|z|\leq t} \mathrm{Re}\,P_M(z) = \mathrm{Re}\,P_M(te^{i\theta_1}) \\ &\min_{|z|\leq t} \mathrm{Re}\,P_M(z) = \mathrm{Re}\,P_M(te^{i\theta_2}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

En tenant compte dans (2.6) du second membre de l'inégalité (2.7) et de la prèmiere des égalites (2.8), on trouve:

$$|f(z)| = |z| \exp \int_0^{|z|} \frac{\mathrm{Re}\,P_M(te^{i\theta_1})-1}{t}\,dt = |F_M(e^{i\theta_1}|z|) \leq F_M(|z|)$$

en vertu du lemme. Tenant ensuite compte dans (2.6) du premier membre de l'inégalité (2.7) et de la seconde des égalités (2.8), on obtient:

$$|f(z)| \geq |F_M(|z|e^{i\theta_2})| \geq |F_M(-|z|) = -F_M(-|z|),$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Corollaire 1. $|f(z)| < M$ *pour* $z \in K$.
Cela résulte du second membre de l'inégalité (2.4) pour $r \to 1$. En effect, on a

$$\lim_{r\to 1} \frac{4r}{\left[\sqrt{(1-r)^2 + \dfrac{4r}{M}} + 1 - r\right]^2} = M.$$

Corollaire 2. $K_R \subset f(K)$ *pour toute fonction* $f \in S_M^*$, *où* $R = M(2M - 1 - 2\sqrt{M(M-1)})$. *Cela découle du premier membre de l'inégalité* (2.4) *pour* $r \to 1$.

La classe considérée est ainsi une classe de fonctions étoilées et bornées. Cependant elle ne contient pas toutes les fonctions étoilées et bornées par M.

Exemple. Considérons la fonction $w = f(z)$ satisfaisant à l'équation

$$\frac{w}{\left[1-\left(\frac{w}{M}\right)^k\right]^{2/k}} = \frac{z}{(1-z^k)^{2/k}} \tag{2.9}$$

k entier, $k \geqslant 1$, $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$, les branches des puissances $\left[1-\left(\frac{w}{M}\right)^k\right]^{2/k}$ et $(1-z^k)^{2/k}$ étant celles qui sont égales à 1 pour $z = 0$.

On sait que c'est la fonction extrémale par rapport à max $|f(z)|$ dans la classe des fonctions univalentes, bornées et k-symétriques [11].

De (2.9) il résulte qu'elle est de la forme

$$f_k(z) = \frac{\sqrt[k]{4z}}{\left[\sqrt{(1-z^k)^2 + \frac{4z^k}{M^k}} + 1 - z^k\right]^{2/k}} \tag{2.10}$$

et qu'elle représente K sur le cercle K_M muni de coupures radiales k-symétriques. On a

$$g_k(z) = \frac{zf_k'(z)}{f_k(z)} = \frac{1+z^k}{\sqrt{(1-z^k)^2 + \frac{4z^k}{M^k}}}$$

Cette fonction représente le cercle K sur le demi-plan droit recouvert k fois, entaillé suivant l'axe réel de $\sqrt{M^k}$ à $+\infty$, elle n'est donc pas subordonnée en domaine à la fonction P_M.

Cependant la fonction (2.10) peut être obtenue en considérant la classe $S^*_{M^k}$. Alors

$$f_k(z) = \sqrt[k]{F_{M^k}(z^k)}$$

où $F_M(z)$ est une fonction de la forme (2.2).

Remarque 1. Comme P_M est la classe des fonctions subordonées en domaine à la fonction P_M définie par la formule (1.1), elle est compacte, d'où il résulte qu'il en est de même de la classe S^*_M.

Remarque 2. Si la fonction $f(z)$ appartient à la classe S_M^*, la fonction $e^{-ia}f(ze^{ia})$ appartient aussi à cette classe.

3. Limitation de $\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right|$ et problème de la majoration en domaine et en module dans la classe S_M^*.

Théorème 1.3. *Si $f \in S_M^*$, on pour tout z fixé, $z \in K$,*

$$\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \Phi(r, M, \Theta_0), \tag{3.1}$$

où

$$\Phi(r, M, \Theta_0) = \operatorname{arc\,tg} \frac{r \sin \Theta_0}{1 + r\cos \Theta_0} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2r \sin \Theta_0\, [r\cos \Theta_0 + (2\tau - 1)]}{1 - r^2 + 2r(2\tau - 1)\cos \Theta_0 + 2r^2 \cos^2 \Theta_0},$$

$$\cos \Theta_0 = \frac{-\sqrt{1 + 2r^2(1 + 16\tau) + r^4} + 1 + r^2}{4r};\ |z| = r,\ \tau = \frac{1}{M}. \tag{3.2}$$

La fonction extrémale est une fonction de la forme (2.2).

Démonstration. Comme

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = q(z) \prec P_M(z) = \frac{1+z}{\sqrt{(1-z)^2 + 4z\tau}},\ \tau = \frac{1}{M},$$

on a

$$\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| = \left|\arg q(z)\right| \leq \max_{|z| \leq r} \left|\arg P_M(z)\right|.$$

Il suffit de trouver $\max\limits_{\theta \in \langle 0, 2\pi\rangle} |\arg P_M(re^{i\theta})|$.

or

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \arg P_M(re^{i\theta}) = \frac{\partial}{\partial\theta} \operatorname{Im} \log P_M(re^{i\theta}) = \tag{3.3}$$

$$= \operatorname{Im} \frac{2r(1-\tau)[(r\sin 2\theta - \sin\theta) + i(\cos\theta - r\cos 2\theta)]}{[1 - r(1-4\tau)(\cos\theta + r\cos 2\theta) + r^3 \cos 3\theta] - i[r(1-4\tau)(\sin\theta + r\sin 2\theta) - r^2 \sin 3\theta]} = 0,$$

d'où, en calculant la partie imaginaire, on tire

$$(3.4)\qquad 2r\cos^2\theta - (1-r^2)\cos\theta - 4\tau r = 0.$$

Posant $\cos\theta = t$ et résolvant (3.4) on obtient:

$$t_1 = \frac{1+r^2-\sqrt{1+2r(1+16\tau)+r^4}}{4r}, \qquad t_2 = \frac{1+r^2+\sqrt{1+2r(1+16\tau)+r^4}}{4r}.$$

Comme $t_2 > 1$ et $0 \leqslant t_1 \leqslant 1$ pour $r \in (0, 1)$ et $\tau \in (0, 1)$, il vient

$$\theta' = \arc\cos t_1, \qquad \theta'' = -\arc\cos t_1.$$

On a:

$$\arg P_M(re^{i\theta}) = \operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\Theta}{1+r\cos\Theta} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2r\sin\Theta\,[r\cos\Theta+(2\tau-1)]}{1-r^2+2r(2\tau-1)\cos\Theta+2r^2\cos^2\Theta} = \Phi(r,M,\Theta).$$

Tenant encore compte de l'égalité $\cos\theta' = \cos\theta'' = \cos\theta_0$ et de ce que $\Phi(r, M, \theta') = -\Phi(r, M, \theta'')$, on obtient (3.1).

La fonction extrémale est la fonction (2.2). Pour $M = \infty$, $\Phi(r, M, \theta) = 2\operatorname{arc\,tg} r$, $r = |z|$.

La limitation ainsi obtenue de $\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|$ permet de résoudre le problème du rapport entre les majorations en module et en domaine des fonctions qui appartiennent à la classe S_M^*.

La fonction $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, z \in K_r$, holomorphe dans K_r, est dite subordonnée en module à la fonction $F(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$, si $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ pour tout $z \in K_r$, ce que nous notons: $|f, F, r|$.

D'autre part, si $f(z) = F(\omega(z))$ pour tout $z \in K_r$, où la fonction $\omega(z)$ est holomorphe dans le cercle K_r et telle que $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < r$ pour $z \in K_r$, la fonction f est dite subordonnée en domaine à la fonction F dans le cercle K_r, ce que nous notons: $f \prec_r F$ ou (f, F, r).

Dans le cas où F est une fonction univalente, cette condition équivaut à la suivante:

$$f(K_r) \subset F(K_r).$$

Désignons par S_ν la classe des fonctions holomorphes et univalentes dans K, de la forme

$$F(z) = z + A_2 z^2 + \ldots,$$

qui satisfont pour tout $r \in \langle 0, 1)$ à la condition

$$\left| \arg \frac{zF'(z)}{F(z)} \right| \leqslant \nu(r) \quad \text{pour } |z| \leqslant r < 1,$$

où

$$\nu(r) = \sup_{F \in S_\nu} \left(\sup_{|z| \leqslant r} \left| \arg \frac{zF'(z)}{F(z)} \right| \right)$$

est une fonction continue dans l'intervalle $\langle 0, 1)$. Il en résulte que la fonction $\nu(r)$ ainsi définie est strictement croissante par rapport à $r \in \langle 0, 1)$ et que $\nu(0) = 0$ pourvu que cette classe ne soit pas composée d'une seule fonction. l'identité.

Soit $r_0(\nu) = \sup_{r \in \langle 0, 1)} [r : \nu(r) + 2 \operatorname{arc\,tg} r < \pi/2]$. Pour la fonction $\nu(r)$ ainsi définie le nombre $r_0(\nu)$ est la racine positive unique de l'équation:

$$\nu(r) + 2 \operatorname{arc\,tg} r = \pi/2$$

Dans les travaux [2] et [3] A. Bielecki et Z. Lewandowski ont établi les théorèmes suivants:

Théorème 3.2 ([2]). *Si $F \in S_\nu$ et $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, $a_1 > 0$, est une fonction holomorphe dans K et $f(z) \neq 0$ pour $z \neq 0$, $z \in K$, et si $(f, F, 1)$, on a $|f, F, r_0(\nu)|$, où $r_0(\nu)$ est la racine unique de l'équation:*

$$\nu(r) + 2 \operatorname{arc\,tg} r = \pi/2.$$

Le nombre $r_0(\nu)$ ne peut être remplacé par aucun nombre plus grand.

Théorème 3.3 ([3]). *Si $F \in S_\nu$ et $\dfrac{f(z)}{f'(0)} \in S_\nu$, $f'(0) > 0$, et si de plus $|f, F, 1|$, on a $(f, F, r_0(\nu))$, où le nombre $r_0(\nu)$ est la racine unique de l'équation:*

$$\nu(r) + 2 \operatorname{arc\,tg} r = \pi/2.$$

Le nombre $r_0(\nu)$ ne peut être remplacé par aucun nombre plus grand.

Si $F \in S_M^*$, il résulte du théorème (3.1) que

$$\left| \arg \frac{zF'(z)}{F(z)} \right| \leqslant \Phi(r, M, \Theta_0) = \nu(r),$$

où $\Phi(r, M, \vartheta_0)$ et θ_0 sont donnés par les formules (3.2). Les théorèmes correspondants prennent dans la classe S_M^* la forme:

Théorème 3.4. *Si $F \in S_M^*$ et $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, $a_1 > 0$. est fonction holo-*

morphe dans K, $f(z) \neq 0$ pour $z \neq 0$, et si $(f, F, 1)$, on a $|f, F, r_0(v)|$, où $r_0(v)$ est la racine unique de l'équation:

$$(r, M, \theta_0) + 2 \operatorname{arc\,tg} r = \pi/2, \tag{3.5}$$

$\Phi(r, M, \theta_0)$ et θ_0 étant donnés par les formules (3.2). *Le nombre $r_0(v)$ ne peut être remplacé par aucun nombre plus grand.*

Théorème 3.5. *Si $F \in S_M^*$ et $\dfrac{f(z)}{f'(0)} \in S_M^*$, $f'(0) > 0$, et si $|f, F, 1|$, on a $(f, F, r_0(v))$, où la constante $r_0(v)$ est la racine unique de l'équation* (3.5) *et ne peut être améliorée.*

Pour $M = \infty$ on retrouve les résultats établis pour la classe S^* par A. Bielecki et Z. Lewandowski dans les travaux [2] et [4].

4. Limitations des premiers coefficients dans la classe S_M^*

On sait que la fonction

$$f \in S_M^*, \; f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

satisfait à l'équation

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = q(z), \tag{4.1}$$

où $q \in P_M$, $M > 1$ et $q(z) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k z^k$, ainsi que

$$q(z) \frac{p(z)}{\sqrt{(p^2(z) - 1)\frac{1}{M} + 1}}, \qquad p \in P, \tag{4.2}$$

et $p(z) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k z^k$.

De (4.1) et (4.2) on tire

$$a_2 = b_1, \quad a_3 = 1/2\,(b_2 + b_1^2), \quad a_4 = 1/6\,(2b_3 + 3b_1 b_2 + b_1^3),$$

où

$$b_1 = \left(1 - \frac{1}{M}\right) p_1, \qquad b_2 = \left(1 - \frac{1}{M}\right)\left(p_2 - \frac{3}{2M} p_1^2\right),$$

$$b_3 = \frac{1}{6}(1-\frac{1}{M})\left[6p_3 - \frac{18}{M}p_1p_2 - (\frac{3}{M}-\frac{15}{M^2})p_1^3\right].$$

Il s'ensuit que:

$$a_2 = (1-\frac{1}{M})p_1 \tag{4.3}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{M})\left[p_2 - p_1^2(\frac{5}{2M}-1)\right], \tag{4.4}$$

$$a_4 = \frac{1}{6}(1-\frac{1}{M})\left[2p_3 + 3(1-\frac{3}{M})p_1p_2 + (1-\frac{15}{2M}+\frac{21}{2M^2})p_1^3\right]. \tag{4.5}$$

Théorème 4.1. *Si $f \in S_M^*$, on a*

$$|a_2| \leq (1-\frac{1}{M})p_1 \tag{4.6}$$

$$|a_3| \leq \begin{cases} (1-\frac{1}{M})(3-\frac{5}{M}) & \text{si} \quad M \geq \frac{5}{2}, \\ 1-\frac{1}{M} & \text{si} \quad \frac{5}{4} \leq M \leq \frac{5}{2}, \\ (1-\frac{1}{M})(\frac{5}{M}-3) & \text{si} \quad 1 < M \leq \frac{5}{4}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Ces limitations sont exactes. Les fonctions extrémales ont les formes suivantes: pour (4.6) *la fonction extrémale est de la forme* (2.2), *pour* (4.7) *elle a dans le cas où $M \geq \frac{5}{2}$ et $1 < M \leq \frac{5}{4}$, la forme* (2.2), *enfin si $\frac{5}{4} \leq M \leq \frac{5}{2}$ c'est la fonction $f(z) = \sqrt{F_M(z^2)}$, où F_M est une fonction de la forme* (2.2).

Démonstration. L'inégalite (4.6) résulte de la formule (4.3) et du fait que $|p_1| \leq 2$. L'égalite a lieu pour la fonction $p(z) = \frac{1+z}{1-z}$, pour laquelle $p_1 = 2$ et la fonction correspondante $f \in S_M^*$ est de la forme (2.2).

L'inégalité (4.7) découle de (4.4) et de l'inégalité: $|p_2 - \lambda p_1^2| \leq 2\max(1, |2\lambda - 1|)$, où λ est un nombre complexe quelconque (v. [9]). Effect, on a:

$$|a_3| \leq (1-\frac{1}{M})\max(1, |3-\frac{5}{M}|),$$

d'où résulte (4.7). Si $M \geqslant \frac{5}{2}$ ou $1 < M \leqslant \frac{5}{4}$, l'égalité a lieu pour la fonction $p(z) = \frac{1+z}{1-z}$, $p_1 = 2, p_2 = 2$, et la fonction correspondante f est de la forme (2.2). D'autre part, si $\frac{5}{4} \leqslant M \leqslant \frac{5}{2}$, l'égalite a lieu pour la fonction $p(z) = \frac{1+z^2}{1-z^2}$, $p_1 = 0, p_2 = 2$, et la fonction correspondante f est de la forme $f(z) = \sqrt{F_M(z^2)}$, où F_M est de la forme (2.2). Cette fonction représente K sur $K_{\sqrt{M}}$ muni de deux coupures radiales symétriques sur l'axe réel.

Théorème 4.2. *Si $f \in S_M^*$, on a la limitation*

$$|a_4| \leqslant \left(1 - \frac{1}{M}\right)\left(4 - \frac{15}{M} + \frac{14}{M^2}\right), \tag{4.2}$$

qui est exacte pour $M > M_0 = -(15 + \sqrt{57}) = 5{,}63\ldots$ Dans ce cas la fonction extrémale est de la forme (2.2).

Démonstration. Considerons l'égalité (4.5). Comme $1 - \frac{15}{2M} + \frac{21}{2M^2} > 0$ et $1 - \frac{3}{M} > 0$ pour $M > M_0 = 5{,}63\ldots$, on a dans ce cas

$$|a_4| \leqslant \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{M}\right)\left[2|p_3| + 3\left(1 - \frac{3}{M}\right)|p_1||p_2| + \left(1 - \frac{15}{2M} + \frac{21}{2M^2}\right)|p_1|^3\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 - \frac{1}{M}\right)\left(4 - \frac{16}{M} + \frac{14}{M^2}\right).$$

Cette limitation est exacte pour $M > M_0 = 5{,}63\ldots$, et la fonction extrémale est de la forme (2.2).

Remarque. Comme le coefficient a_4 s'exprime par les coefficients $p_1 = p'(0)$, $p_2 = \frac{1}{2!}\,p''(0)$, $p_3 = \frac{1}{3!}\,p'''(0)$, d'une fonction dont la partie réelle est positive, on constate, en appliquant le théorème de Sakaguchi [13] sur $\max\limits_{p \in P} \mathrm{Re}((p(z), p'(z), p''(z), \ldots, p^{(n)}(z))$, que si une fonction admet une partie réelle positive et satisfait à égalité dans (4.8), elle est de la forme:

$$p(z) = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \frac{1+ze^{-i\theta_k}}{1-ze^{-i\theta_k}}, \quad \sum_{k=1}^{3} \lambda_k = 1, \ \lambda_k \geqslant 0.$$

Il y a lieu de supposer que si $1 < M < M_0 = 5{,}63 \ldots$, la fonction extrémale par rapport à $\max\limits_{f \in S_M^*} \operatorname{Re} a_4$ représente K sur le cercle $K_{\sqrt[3]{M}}$ muni de trois coupures radiales symétriques, ou bien représente K sur K_M muni d'une coupure radiale.

La limitation de $|a_3|$ dans la classe $S^*(M)$ a été étudiée, entre autres, par R. W. Barnard dans le travail [1]. Cet auteur a démontré que la fonction extrémale par rapport à $\max\limits_{f \in S^*(M)} |a_3|$ représente K sur K_M avec deux coupures radiales symétriques au plus. Cependant il n'a pas donné de limitation pour $|a_3|$ dans le cas où $M > e$. Il semble que la limitation de $|a_3|$ dans la classe S_M^* est exacte dans toute la classe $S^*(M)$ pour $M \geqslant 3$.

5. Formules variationnelles dans la classe S_M^*.

Dans la classe P on connaît deux formules variationnelles: celle de M. S. Robertson [12] et celle de K. Sakaguchi [13].

Théorème 5.1 ([12]).

La fonction

$$p^*(z) = p(z) + \rho^2 A_R(z, z_0, p(z), p(z_0), \overline{p(z_0)}, e^{i\theta}, e^{-i\theta}) + 0(\rho^2) \tag{5.1}$$

appartient à la classe P pour $\rho > 0$ suffisamment petits, et pour toute fonction $p \in P$ et tout $z_0 \in K$ fixé, où

$$A_R(z) = -(1-|z_0|^2)\, z \left[\frac{ze^{i\theta}}{z_0(z-z_0)} + \frac{ze^{-i\theta}}{1-\overline{z}_0 z} - \frac{e^{i\theta} p(z)}{p(z_0)(z-z_0)} + \right. \tag{5.2}$$
$$\left. + \frac{e^{-i\theta} zp(z)}{\overline{p(z_0)}(1-\overline{z}_0 z)} \right];$$

$[\ \ ]'$ désigne la dérivation par rapport à z, $0(\rho^2)$ est une fonction analytique dans K et $\frac{0(\rho^2)}{\rho^2}$ est uniformément borné sur tout sous-ensemble fermé du cercle K.

Théorème 5.2 ([13]). *La fonction*

$$p^*(z) = p(z) + -A_s(z, z_0, p(z), p(z_0), \overline{p(z_0)}, e^{i\theta}, e^{-i\theta}) + 0(\rho) \tag{5.3}$$

appartient à la classe P pour $\rho > 0$ suffisamment petits, pour toute fonction $p \in P$ et tout $z_0 \in K$ fixé, où:

$$
(5.4)\qquad
\begin{aligned}
A_s(z) = {} & e^{i\theta}\left[p(z)\frac{1+\bar{z}_0 z}{1-\bar{z}_0 z} - (p(z) - \frac{1+\bar{z}_0 z}{1-\bar{z}_0 z}) - 1\right] - \\
& - e^{-i\theta}\left[p(z)\frac{z_0+z}{z_0-z} + p(z_0)(p(z) - \frac{z_0+z}{z_0-z}) - 1\right]
\end{aligned}
$$

et $\frac{0(\rho)}{\rho}$ tend presque uniformément vers zéro pour $\rho \to 0$.

Ces deux formules peuvent s'écrire sous la forme:

$$
(5.5)\qquad p^*(z) = p(z) + \lambda A(z, z_0, p(z), \overline{p(z_0)}, e^{i\theta}, e^{-i\theta}) + 0(\lambda),
$$

où, dans le cas de la formule de M. S. Robertson, il faut poser $A = A_R$, A_R étant donné par la formule (5.2), et remplacer λ par ρ^2, tandis que dans le cas de la formule de K. Sakaguchi il faut poser $A = A_s$, A_s étant donné par la formule (5.4), et remplacer λ par —.

En s'appuyant sur ces formules variationnelles pour les fonctions de la classe P, on peut déduire les formules variations du type de Robertson et de Sakaguchi dans la classe S_M^*.

Théorème 5.3. *Si $f \in S_M^*$ et z_0 est un point quelconque fixé du cercle K, et si $\rho > 0$ est suffisamment petit, les fonctions:*

$$
(5.6)\qquad f^*(z) = f(z)\left[1 + \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\frac{1}{M}}}\int_0^z \left[1 - \left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)^2 \frac{1}{M}\right]^{3/2} A_R(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} + 0(\rho^2),\right.
$$

$$
(5.7)\qquad f^*(z) = f(z)\left[1 + \frac{\rho}{\;}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{M}}}\int_0^z \left[1 - \left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)^2 \frac{1}{M}\right]^{3/2} A_s(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\right] + 0(\rho).
$$

où A_R est donné par la formule (5.2), A_s par la formule (5.4), et la fonction $p(z)$ qui y intervient est de la forme

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} \sqrt{\frac{1-\frac{1}{M}}{1-\frac{1}{M}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2}} \tag{5.8}$$

appartiennent à S_M^*.

Démonstration. Comme $f \in S_M^*$, on a

$$f(z) = z \exp \int_0^z \frac{q(\zeta)-1}{\zeta} d\zeta , \tag{5.9}$$

où

$$q(z) = \frac{p(z)}{\sqrt{(p^2(z)-1)\frac{1}{M}+1}} . \tag{5.10}$$

En tenant compte de la formule (5.5) dans (5.10), on obtient pour la fonction $q \in P_M$ la formule variationnelle suivante:

$$q^*(z) = q(z) + \lambda \frac{\left(1-g^2(z)\frac{1}{M}\right)^{3/2}}{\sqrt{1-\frac{1}{M}}} A(z) + 0(\lambda^2) . \tag{5.11}$$

Dans le cas de la formule de Robertson il faut poser $A = A_R$, tandis que dans celui de la formule de Sakaguchi $A = A_s$, A_R et A_s letant donnés par les formules (5.2) et (5.4), et remplacer la fonction $p(z)$ qui y intervient par

$$p(z) = q(z) \sqrt{\frac{1-\frac{1}{M}}{1-\frac{1}{M}q^2(z)}}$$

Tenant compte de la formule (5.11) dans (5.9) et profitant du développement de la fonction exponentielle par rapport au paramètre λ, on obtient respectivement les formules (5.6) et (5.7). Dans la formule du type de Robertson on prend $A = A_R$, donné par la formule (5.2) et $\lambda = \rho^2$, dans la formule du type de Sakaguchi on pose $A = A_s$, donné par la formule (5.4) et $\lambda = \frac{\rho}{2}$. Dans les deux cas on prend pour $p(z)$ la fonction donné par la formule (5.8).

Pour $M = \infty$ on tire de la formule (5.6) la formule variationnelle bien connue de Hummel (v.p.ex. [8]) pour la classe S^*. D'autre part, on obtient de la formule (5.7) la formule variationnelle du type de Sakaguchi dans la classe S^*[14], indépendante de la formule de Hummel.

Nous établirons maintenant deux formules variationnelles auxiliaires pour les fonctions de la classe S_M^*.

Considérons la fonction $t(z)$, $t(0) = 0$, $t'(0) > 0$, qui représente le cercle K sur le cercle unité muni d'une coupure radiale suffisamment petite issue du point $t = e^{-i\theta}$. On sait que cette fonction satisfait à l'équation:

$$\frac{t}{(1+te^{i\theta})^2} = (1-\lambda)\frac{z}{(1+ze^{i\theta})^2}, \qquad \lambda > 0 \text{ suffisamment petit.}$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme:

$$te^{i\theta} + \frac{1}{te^{i\theta}} + 2 = \frac{1}{1-\lambda}(ze^{i\theta} + \frac{1}{ze^{i\theta}} + 2)\,.$$

Remarquons que pour $\lambda = 0$ on a $t(z) = z$. Si $\lambda > 0$ est suffisamment petit on a:

$$t_\lambda(z) = z - \lambda z\frac{1+ze^{i\theta}}{1-ze^{i\theta}} + 0(\lambda^2)\,, \qquad t'(0) = 1-\lambda\,.$$

Appliquons maintenant cette formule à la fonction $q(z) \lesssim P_M(z)$. Comme $q(t_1(z)) \lesssim q(z) \lesssim P_M(z)$, la fonction $q(t_2(z))$ appartient à la classe P_M pour $\lambda > 0$ suffisamment petits et

$$q^*(z) = q(z) - \lambda z\frac{1+ze^{i\theta}}{1-ze^{i\theta}}q'(z) + 0(\lambda^2) \tag{5.12}$$

est aussi subordonnée en domaine à la fonction $P_M(z)$. Tenant encore compte de (5.12) dans la formule (5.9) on obtient pour $\lambda > 0$ suffisamment petits:

$$f^*(z) = f(z)\,[\,1 - \lambda\int_0^z \zeta\frac{1+\zeta e^{i\theta}}{1-\zeta e^{i\theta}}\,(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)})'\,d\zeta] + 0(\lambda^2)\,.$$

Si $f \in S_M^*$, la fonction $e^{-ia}f(ze^{ia})$, $a \in \langle 0, 2\pi\rangle$, appartient aussi à la classe S_M^*. Si $a > 0$ est suffisamment petit on a

$$f^*(z) = f(z)\left[1 + ia\,(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1)\right] + 0(a)\,.$$

6. Le problème de Jenkins dans la classe S_M^*

Soit T une sous-classe compacte fixée de la classe S. Désignons par $L(r, f)$, $f \in T$, la mesure linéaire de l'ensemble des valeurs que la fonction f n'admet pas et qui appartiennent à la circonférence $|w| = r$, $R < r < 1$, où K_R est le cercle recouvert dans la classe T, c'est-à-dire tel que $K_R \subset f(K)$ pour toute fonction $f \in T$.

Soit $l(r) = \sup_{f \in T} L(r, f)$. J. A. Jenkins [7] a étudié ce problème dans la classe S, tandis que Z. Lewandowski [10] l'a étudié dans la classe S^*.

Dans la classe S^* il a été possible de résoudre ce problème en appliquant la méthode de symétrisation; la symétrisation circulaire ne diminue pas, en effet, le rayon conforme intérieur et, comme l'a montré Z. Lewandowski [10], les domaines étoilés soumis à une symétrisation circulaire conservent cette propriété: si G est un domaine étoilé par rapport à l'origine, le domaine symétrise G^* est aussi étoilé par rapport à l'origine (la demi-droite de symétrisation est issue de l'origine).

Dans ce cas la fonction extrémale est de la forme

$$\psi(z) = e^{-ia} f(ze^{ia}) \cdot |f'(0)|^{-1},$$

où a est choisi en sorte que $\psi \in S^*$,

$$f(z) = F\left(\frac{w_0 - \overline{w_0}\, z}{1 - z}\right), \qquad w_0 = -(\theta^2 - 2 + i\theta\sqrt{4 - \theta^2}), \qquad \theta \in (0, 2),$$

et

$$F(w) = \left(\frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}}\right)^{\theta} \cdot \frac{1 - \theta\sqrt{w} + w}{1 + \theta\sqrt{w} + w}.$$

La fonction ψ représente K sur le domaine

$$G = \{w\colon |w| < r\} \cup \{w\colon |w| \geqslant r,\ |\arg w| \leqslant \tfrac{1}{2}\pi\theta\},$$

où le nombre r est lié à θ par la relation:

$$r = 4\left[(2+\theta)^{2+\theta}(2-\theta)^{2-\theta}\right]^{-1/2}.$$

Le fait que dans la symétrisation circulaire, dans laquelle la demi-droite de symétrisation est issue de l'origine, les domaines étoilés et bornés conservent ces propriétés, le problème de Jenkins a pu être résolu dans la classe $S^*(M)$.

Dans ce cas la fonction extrémale [5] représente K sur le domaine $G = K_M - W$, où

$$W = \{w\colon r \leqslant |w| \leqslant M,\quad \theta \leqslant \arg w \leqslant 2\pi - \theta\},\quad \theta \in (0, \pi).$$

Nous indiquerons maintenant une autre construction de la fonction extrémale dans $S^*(M)$, différente de celle qui a été donnée dans [5]. Considérons la représentation conforme du cercle K sur le cercle K entaillé le long du segment $\langle -1, -\rho \rangle$, $0 < \rho \leqslant 1$. Cette fonction satisfait à l'équation:

$$\frac{t}{(1-t)^2} = \frac{az}{(1-z)^2}, \quad a = \frac{4\rho}{(1+\rho)^2}, \tag{6.1}$$

$t = t(z), \quad t(0) = 0.$

De l'équation (6.1) il résulte que la fonction $h(z) = P_M(t(z)) \lessgtr P_M(z)$, où P_M est donnée par la formule (1.1), est de la forme:

$$h(z) = \sqrt{\frac{(1-z)^2 + 4az}{(1-z)^2 + \frac{4az}{M}}}, \tag{6.1'}$$

où l'on prend la branche du radical qui est égale à 1 pour $z = 0$, et elle représente K sur le demi-plan droit entaillé le long des segments de l'axe réel: de 0 à $s < 1$ et de $\sqrt{M}$ à

$+\infty$, $s = \dfrac{1-\rho}{\sqrt{(1+\rho)^2 - \frac{4\rho}{M}}} (1) = 0.$

Alors la fonction:

$$f(z) = z \exp \int_0^z \frac{h(\zeta) - 1}{\zeta} d\zeta \tag{6.2}$$

appartient à la classe S_M^* et représente K sur le domaine $K_M - G$, où

$$G = [w: r \leqslant |w| \leqslant M, \quad |\arg w| \geqslant \gamma], \quad \gamma \in (0, \pi).$$

Il existe donc sur la circonférence unité des points $z_k = e^{i\theta_k}$, $k = 1,2$, $0 < \theta_1 < \theta_2 \leqslant \pi$, tels que

$$\begin{aligned}
|f(e^{i\theta})| &= M && \text{si} \quad \theta \in \langle -\theta_1, \theta_1 \rangle, \\
\arg f(e^{i\theta}) &= \gamma && \text{si} \quad \theta \in \langle \theta_1, \theta_2 \rangle, \\
|f(e^{i\theta})| &= r && \text{si} \quad |\theta| \geqslant \theta_2, \\
\arg f(e^{i\theta}) &= -\gamma && \text{si} \quad \theta \in \langle -\theta_2, -\theta_1 \rangle.
\end{aligned}$$

Les nombres z_1, z_2 peuvent être exprimés en fonction de $a = 4\rho(1+\rho)^{-2}$ et M; en effet, $z_2 = 1 - 2a + 2i\sqrt{a(1-a)}$, $|z_2| = 1$, $\theta_2 = \arg z_2$, $z_1 = e^{i\theta_1}$ où $\theta_1 = \arg f^{-1}(e^{i\arg t_0})$ (t^{-1} étant la représentation inverse de (6.1)), enfin $t_0 = \frac{1}{M}(M - 2 + 2i\sqrt{M-1})$.

On a: $\sup\limits_{f \in S^*(M)} L(r, f) = \pi r \phi(r)$,

où
$$\pi\phi(r) = 2(\pi - \gamma).$$

Les quantités r et $\phi(r)$ peuvent être exprimées en fonction de ρ. Pour $|\theta| \geqslant \theta_2$ on a

$$\log r = \log \left| f(e^{i\theta}) \right| = \operatorname{Re} \int_0^{e^{i\theta}} \frac{h(\zeta) - 1}{\zeta} d\zeta = \int_0^1 \frac{\operatorname{Re} h(xe^{i\theta}) - 1}{x} dx$$

si l'on tient compte de la formule (2.6) (la fonction h est donnée par la formule (6.1)). En posant, en particulier, $\theta = \pi$, on obtient:

$$\log r = \int_0^1 \frac{h(-x) - 1}{x} dx,$$

$$\gamma = \arg f(e^{i\theta_2}) = \operatorname{Im} \log f(e^{i\theta_2}) = \theta_2 + \operatorname{Im} \int_0^{e^{i\theta_2}} \frac{h(\zeta) - 1}{\zeta} d\zeta.$$

Effectuant l'intégration, d'abord le long du rayon [0, 1], puis le long de l'arc de circonférence $|z| = 1$ de 1 à $e^{i\theta_2}$ (l'équation paramétrique tant $\zeta = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$), on obtient:

$$\gamma = \theta_2 + \operatorname{Re} \int_0^{\theta_2} (h(e^{i\theta}) - 1)\, d\theta = \operatorname{Re} \int_0^{\theta_2} h(e^{i\theta})\, d\theta.$$

Comme $\operatorname{Re} h(e^{i\theta}) = 0$ pour $\theta \in \langle \theta_1', \theta_2 \rangle$ et $\operatorname{Im} h(e^{i\theta}) = 0$ pour $\theta \in \langle 0, \theta_1 \rangle$, on a finalement

$$\gamma = \int_0^{\theta_1} h(e^{i\theta})\, d\theta,$$

d'où

$$\pi\phi(r) = 2(\pi - \int_0^{\theta_1} h(e^{i\theta})\, d\theta.$$

Comme la fonction F, donnée par la formule (6.2), appartient à la classe S_M^*, elle est aussi une fonction extrémale dans le problème de Jenkins dans cette classe.

RÉFÉRENCES

[1] Barnard, R. W., *A variational technique for bounded starlike functions*, Canad. J. Math., 27 (1975), 337–347.

[2] Bielecki, A., Lewandowski, Z., *Sur une généralisation de quelques théorèmes de M. Biernacki sur les fonctions analytiques*, Ann. Polon. Math., 12 (1962), 65–70.

[3] ---, *Sur certaines majorantes des fonctions holomorphes dans le cercle unité*, Colloq. Math., 9 (1962), 299–303.

[4] ---, *Sur certaines familles de fonctions α-étoilées*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A, 15 (1961), 45–55.

[5] Bogucki, Z., *Pewne problemy ekstremalne związane z teorią podporządkowania i wartościami przyjmowanymi przez funkcje gwiaździste* (Thèse de doctorat), Lublin 1970.

[6] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, Москва 1966.

[7] Jenkins, J. A., *On circulary symmetric functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955), 620–624.

[8] Hummel, J. A., *A variational method for starlike functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 9 (1958), 82–87.

[9] Keogh, F. R., Merkes, E. P., *A coefficient inequality for certain classes of analytic functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1969), 8–12.

[10] Lewandowski, Z., *On circular symmetrization of starshaped domains*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A, 17 (1963), 35–38.

[11] Mikołajczyk, L., *O pewnych własnościach ekstremalnych funkcji jednolistnych, p-symetrycznych i ograniczonych z dołu w kole* $|z| < 1$, Zeszyty Nauk. Uniw. Łódz. Ser. II, 20 (1966), 103–115.

[12] Robertson, M. S., *Variational methods for functions with positive real part*, Trans. Amer. Math. Soc., 102 (1962), 82–93.

[13] Sakaguchi, K., *A variational method for functions with positive real part*, J. Math. Soc. Japan., 16 (1964), 287–297).

[14] Wesołowski, A., *Communiqué des formules variationnelles et de certains résultats obtenus dans les sous-classes des fonctions étoilées*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 22/23/24 (1968/1969/1970), 193–199.

STRESZCZENIE

W pracy rozważamy klasę S_M^*, $M > 1$, funkcji gwiaździstych i ograniczonych przez M, określoną definicją (1.3) i wyprowadzamy dla tej klasy wzory strukturalne.

Dowodzimy twierdzenia: jeżeli $f \in S_M^*$, to $|f(z)| < M$ dla $|z| < 1$.
Znajdujemy dokładne oszacowania:

$$\max_{f \in S_M^*} \left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right|, \quad \max_{f \in S_M^*} |a_2|, \quad \max_{f \in S_M^*} |a_3|, \; M > 1, \text{ oraz dla } M > M_0 = 5{,}63\ldots,$$

$\max_{f \in S_M^*} |a_4|$, podając w każdym przypadku funkcje ekstremalne.

Następnie wyprowadzamy w tej klasie wzory wariacyjne typu Robertsona i Sakaguchiego oraz dwa pomocnicze wzory wariacyjne.

W ostatniej części pracy rozwiązujemy problem Jenkinsa dla klasy S_M^*, polegający na znalezieniu $\sup_{f\in S_M^*} L(r,f)$, gdzie $L(r,f)$ jest miarą liniową zbioru wartości nie przyjmowanych przez funkcję f i leżących na okręgu $|w|=r$.

РЕЗЮМЕ

В работе обсуждается класс $S_M{}^*$, $M>1$, звёздных функций и ограниченных M, определенной дефиницией (1.3) и сделано для этого класса структуральные формулы.

Доказываем теорему: если $f\in S_M{}^*$ то $|f(z)|<M$ для $|z|<1$.

Находим точную оценку: $\max_{f\in S_M^*}\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|$, $\max_{f\in S_M^*}|a_2|$, $\max_{f\in S_M^*}|a_3|$, $M>1$, а также для $M>M_0=5{,}63...$, $\max_{f\in S_M^*}|a_4|$, представляя в каждом случае экстремальные функции.

Потом выводим для этого класса формулы вариации типа Робертсона и Сакагучего, а также две вспомогательные формулы вариации.

В окончательной части работы решается проблема Дженкинса для класса $S_M{}^*$, расчитывающая на открытие $\sup_{f\in S_M^*} L(r,f)$ где $L(r,f)$ является линейным модулем множества значения, непринимающихся функций f и находящихся на контуре $|w|=r$.