ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA

VOL. XXVIII, 12 SECTIO A 1974

Instytut Matematyki, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin

DOMINIK SZYNAL

Sur une loi forte des grands nombres de variables aléatoires enchaînées

O mocnym prawie wielkich liczb dla zmiennych losowych powiązanych w łańcuch Markowa

Об усиленном законе больших чисел для случайных величин, связанных в цепь Маркова

1. Soient $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, des champs de probabilité, c'est-à-dire Ω_i est un ensemble d'événements élémentaires $\mathscr{A}_i$ est une σ-algèbre d'événements A_i. Si $\{X_i, i \geqslant 1\}$ est une suite de variables aléatoires liées par une chaîne nonhomogène, alors nous dénotons par $P_i(\omega_i, A_{i+1})$ les fonctions de transition avec les domaines $(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \Omega_{i+1}, \mathscr{A}_{i+1})$ Nous désignons par $a_i = a(P_i)$ le coefficient ergodique de la fonction de transition P_i et par $a_{ij} = a(P_{ij})$ le coefficient ergodique de transition $P_{ij}(\omega_i, A_j)$ pour l'intervalle de temps i, j $(i+1 < j)$.

Désignons

$$a^{(n)} = \min_{1 \leqslant i < n} a_i,$$

et supposons que $a_i > 0$ pour $i \geqslant 1$ et $na^{(n)} \to \infty$ avec $n \to \infty$. Nous posons

$$X_j' = X_j I[|X_j| < \varepsilon], \; X_j'' = X_j I[|X_i| \geqslant \varepsilon],$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \; S_n' = \sum_{j=1}^{n} X_j', \; S_j'' = \sum_{j=1}^{n} X_j'',$$

où $\varepsilon > 0$ est un nombre quelconque et $I[A] = 1$ ou 0 suivant que l'événement A est réalisé ou non.

2. D'abord nous allons démontrer les inégalités suivantes:

Lemme 1. *Soient X_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ des variables aléatoires telles que X_j $j = 1, 2, \ldots, n$ sont liées par une chaîne de Markoff avec des coefficients ergodiques $a_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.*

Si $\{g_n(x), n \geqslant 1\}$ est une suite de fonctions positives paires non-décroissantes dans le domaine $x > 0$, telles que pour tout n

(a) $$\frac{g_n(x)}{x} \downarrow \quad \textit{pour } x > 0 \textit{ ou}$$

(b) $$\frac{g_n(x)}{x} \uparrow \quad \text{et} \quad \frac{g_n(x)}{x^2} \downarrow \quad \textit{pour} \quad x > 0 \ [3],$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$

(I) $$P[\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k - ES_k^{\cdot}| \geqslant 2\varepsilon] \leqslant 2C_1(a^{(n)})^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\frac{g_k(X_k)}{g_k(X_k)+g_k(\varepsilon)},$$

où C_1 est la constante de l'inégalité de Rosenblatt-Roth [5].

Si $a_j > \varrho > 0$ pour tout j, alors

(II) $$P[\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k^{\cdot} - ES_k^{\cdot}| \geqslant 2\varepsilon] \leqslant 2C_2 \sum_{k=1}^{n} E\frac{g_k(X_k)}{g_k(X_k)+g_k(\varepsilon)},$$

où C_2 est constante positive.

Démonstration. En vertu de l'inégalité

$$P[\max_{1\leqslant k\leqslant n} |X_k + Y_k| \geqslant 2\varepsilon] \leqslant P[\max_{1\leqslant k\leqslant n} |X_k| \geqslant \varepsilon] + P[\max_{1\leqslant k\leqslant n} |Y_k| \geqslant \varepsilon],$$

on a

(1) $$P[\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k - ES_k^{\cdot}| \geqslant 2\varepsilon] \leqslant P[\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k^{\cdot} - ES_k^{\cdot}| \geqslant \varepsilon] + P[\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k^{\cdot\cdot}| \geqslant \varepsilon].$$

L'inégalité de Rosenblatt-Roth du type de Kolmogoroff [4] et des calculs élémentaires donnent

$$P[\max_{n1\leqslant k\leqslant} |S_k^{\cdot} - ES_k^{\cdot}| \geqslant \varepsilon] \leqslant C(a^{(n)})^{-1} \sum_{k=1}^{n} \sigma^2 X_k^{\cdot}/\varepsilon^2$$
$$\leqslant C(a^{(n)})^{-1} \sum_{k=1}^{n} E(X_k^{\cdot 2}/\varepsilon^2) \leqslant C(a^{(n)})^{-1} \sum_{k=1}^{n} E(|X_k^{\cdot}|/\varepsilon),$$

où $C \geqslant 1$ est une constante positive dépendent de ε et de la chaîne de Markoff.

Cependant dans le cas (a) on a $(|X_k^{\cdot}|/\varepsilon) \leqslant g_k(X_k^{\cdot})/g_k(\varepsilon)$, et dans le cas (b) $(X_k^{\cdot 2}/\varepsilon^2) \leqslant g(X_k^{\cdot})/g_k(\varepsilon)$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$. Donc, puisque $g_k(x)$ est non-décroissante pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$, nous avons

(2) $$P[\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k^{\cdot} - ES_k^{\cdot}| \geqslant \varepsilon] \geqslant 2C(a^{(n)})^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\frac{g_k(X_k)}{g_k(X_k)+g_k(\varepsilon)}.$$

Pour les variables aléatoires X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, nous obtenons

$$(3) \qquad P[\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k^{\cdot\cdot}| \geqslant \varepsilon] \leqslant \sum_{k=1}^{n} EI[|X_k| \geqslant \varepsilon] \leqslant 2C(a^{(n)})^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{g_k(X_k^{\cdot\cdot})}{g_k(X_k^{\cdot\cdot}) + g_k(\varepsilon)},$$

comme $(a^{(n)})^{-1} \geqslant 1$.

En ajoutant (2) et (3), par (1), nous obtenons (I).

La démonstration de (II) est obtenue de la même façon.

3. Maintenant nous allons démontrer quelques théorèmes concernant la convergence presque sûre des séries et des suites de variables aléatoires enchaînées.

Théorème 1. *Si les variables aléatoires de la suite $\{X_j, j \geqslant 1\}$ sont telles que les X_j sont liées par une chaîne de Markoff avec des coefficients ergodiques $a_j > \varrho > 0$, alors la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} E[g_n(X_n)/(g_n(X_n) + g_n(\varepsilon))]$ est une condition suffisante pour la convergence presque sûre de la série $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ dans le cas* (a) *respectivemnt de la série $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - EX_n^{\cdot})$ dans le cas* (b).

Démonstration. La convergence presque sûre de la série $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - EX_n^{\cdot})$ résulte de l'inégalité (II) et de la condition

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} E[g_k(X_k)/(g_k(X_k) + g_k(\varepsilon))] = 0.$$

Observant maintenant que dans la cas (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} E|X_n^{\cdot}| < 2\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} E[g_n(X_n^{\cdot})/(g_n(X_n^{\cdot}) + g_n(\varepsilon))] < \infty,$$

nous terminons la démonstration du théorème 1.

Du théorème 1 résulte la loi forte des grands nombres suivante.

Théorème 2. *Si les variables aléatoires de la suite $\{X_j, j \geqslant 1\}$ sont telles que $X_j^* = X_j I[|X_j| < b_j]$ sont liées par une chaîne de Markoff avec des coefficients ergodiques $a_j > \varrho > 0$ et si $\{0 < b_j \uparrow \infty, j \geqslant 1\}$ est une suite de nombres, alors la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} E[g_n(X_n)/(g_n(X_n) + g_n(b_n))]$ est une condition suffisante pour la convergence presque sûre S_n/b_n vers zéro dans le cas* (a), *respectivement $(S_n - ES_n^*)/b_n$ vers zéro avec $n \to \infty$ dans le cas* (b).

Les théorèmes 1 et 2 étant une extension de certains résultats de [3] et [7], ils constituent une extension des résultats Kai-Lai-Chung [2] aux des variables aléatoires enchaînées.

Soit Ψ une ensemble de fonctions ψ telles que $\psi(x)$ est non-décroissante dans le domaine $x > x_0$ pour un certain x_0 et $\Sigma 1/n\psi(n) < \infty$.

De l'inégalité (II) et du théorème 2 résulte une extension suivante des résultats de W. W. Pietroff [3].

Théorème 3. *Soit $\{X_j, j \geqslant 1\}$ une suite de variables aléatoires telles que $X_j^* = X_j I[|X_j| < b_j]$ sont liées par une chaîne de Markoff avec des coefficients ergodiques $a_j > \varrho > 0$ et soit $\{0 < b_j \uparrow \infty, j \geqslant 1\}$ une suite de nombres.*

Si $g_n(x) = g(x)$ pour tout $n = 1, 2, \ldots, Eg(X_n) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, et $a_n = \sum_{k=1}^{n} Eg(X_n) \to \infty$ avec $n \to \infty$, alors dans le cas (a) *l'égalité $S_n = o(g^{-1}(a_n\psi(a_n))$ est presque sûre et dans le cas* (b) *l'égalité $S_n - ES_n^* = o(g^{-1}(a\ \psi(a_n))$ est presque sûre pour une fonction quelconque $\psi \in \Psi$ où g^{-1} denote la fonction inverse de la fonction g.*

Démonstration. Comme $Eg(X_n) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left[\frac{g(X_n)}{g(X_n)+g(b_n)}\right] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} E\frac{g(X_n)}{g(b_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} E\frac{g(X_n)}{a_n\psi(a_n)},$$

où $b_n = g^{-1}(a_n\psi(a_n))$. Mais $\psi \in \Psi$, donc par le lemme 1 [3] la dernière série converge. Ce fait, en vertu de l'inégalité ci-dessus et du théorème 2, donne la conclusion du théorème 3.

Théorème 4. *Si dans les conditions du théorème 3 $g(x) = |x|^r$, $0 < r \leqslant 2$, alors dans le cas $0 < r \leqslant 1$, l'égalité $S_n = o((a_n\psi(a_n))^{1/r})$ est presque sûre et dans le cas $1 \leqslant r \leqslant 2$, l'égalite $S_n - ES_n^* = o((a_n\psi(a_n))^{1/r})$ est presque sûre pour une fonction quelconque $\psi \in \Psi$.*

Théorème 5. *Si $\{X_j, j \geqslant 1\}$ est une suite de déterminations d'une même variable aléatoire X et $U_j = X_j I[|X_j| < j]$ sont liées par une chaîne de Markoff avec des coefficients ergodiques $a_j > \varrho > 0$, alors pour la fonction $g(x) = x^2$ satisfaisant à la condition* (b), *les séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\frac{U_n^2}{n^2+U_n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} E\frac{V_n^2}{n^2+V_n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} E\frac{X_n^2}{n^2+X_n^2},$$

où $V_n = X_n I[|X_n| \geqslant n]$, sont équivalentes deux à deux en convergence, et la convergence de chacune d'elles est une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait $E|X| = \mu < \infty$; et elle est une condition suffisante pour que la loi forte des grands nombres ait lieu pour la suite $\{X_n, n \geqslant 1\}$.

Démonstration. L'existence de l'espérance mathématique équivaut à la convergence d'une quelconque des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{|x|<n} x^2 dF(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} P[|X| \geqslant n] \quad ([1], \text{ p. } 56, 57).$$

En vertu de ce théorème et des inégalités

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[V_n^2/(n^2+V_n^2)] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P[|X| \geqslant n] \leqslant E|X| < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P[|X| \geqslant n]$$

$$\leqslant 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} E[V_n^2/(n^2+V_n^2)];$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[U_n^2/n^2] \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} E[U_n^2/(n^2+U_n^2)] \leqslant 2E[U_n^2/n^2] \leqslant 4 + E|X|,$$

nous avons démontré la première partie du théorème 2.

Observant maintenant que la fonction $g(x) = x^2$ obéit à la condition (b) et l'existence de l'espérance mathémaitque implique la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n^2/(n^2+X_n^2)]$ nous obtenons la loi forte des grands nombres

Maintenant nous allons donner une extension de loi forte des grands nombres de M. Rosenblatt-Roth.

Théorème 6. *Soit* $\{X_j, j \geqslant 1\}$ *une suite de variables aléatoires telles que* $X'_j = X_j I[|X_j| < j]$ *sont liées par une chaîne de Markoff avec des coefficients ergodiques* $a_j > 0$. *Si pour un nombre* $l > 1$.

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a^{(l^m+1)-1} \sum_{j=1}^{l^{m+1}} E \frac{g(X_j)}{g(l^m)+g(X_j)} < \infty, \tag{4}$$

alors

$$(S_n - ES'_n)/n \xrightarrow{\text{p.s.}} 0 \textit{ avec } n \to \infty. \tag{5}$$

Démonstration. La convergence de la série (4) implique, après des calculs simples, la convergence de la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} P[\max_{l^m \leqslant n < l^{m+1}} |S_n - ES'_n| \geqslant 2l^m \varepsilon].$$

Observant que

$$P\left[\max_{l^m \leqslant n < l^{m+1}} \left|\frac{S_n - ES'_n}{n}\right| \geqslant 2\varepsilon\right] \leqslant P[\max_{l^m \leqslant n < l^{m+1}} |S_n - ES'_n| \geqslant 2l^m \varepsilon],$$

nous obtenons (5).

Considérons maintenant certain cas particulier.

Corollaire. *Si dans les conditions du théorème* 6 $Eg(X_j) < \infty$ *pour tout* j, *alors la convergence de la série* $\sum_{j=1}^{\infty} w_j^{-2} Eg(X_j)$,

où

$$w_j^{-2} = \sum_{m=s}^{\infty} [g(l^m) a^{(l^{m+1})}]^{-1}, \quad l^s \leqslant j < l^{s+1},$$

est une condition suffisante pour $S_n/n \xrightarrow{p.s.} 0$ *dans le cas* (*a*) *respectivement pour* $S_n/n - ES'_n/n \xrightarrow{p.s.} 0$ *dans le cas* (*b*), *où* $n \to \infty$.

Démonstration. Il résulte de l'inégalité

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a^{(l^{m+1})})^{-1} \sum_{j=1}^{l^{m+1}} E\frac{g(X_j)}{g(l^m)+g(X_j)} \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} [g(l^m) a^{(l^{m+1})}] \sum_{j=1}^{l^{m+1}} Eg(X_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} w_j^{-2} Eg(X_j).$$

Si $g(x) = x^2$, nous obtenons le résultat de M. Rosenblatt-Roth [4].

REFERENCES

[1] Dugué D., *Traité de statistique mathématique et appliquée*, Paris (1958).

[2] Kai-Lai-Chung, *Note on Some Strong Laws of Large Numbers*, Amer. J. Math., vol. 69 (1947), 189-192.

[3] Петров В. В., *Об усиленном законе больших чисел*, Теория вероятностей и ее применение, 14 (1969), 193-202.

[4] Розенблат-Рот М., *О законе больших чисел для неоднородных цепей Маркова*, ДАН СССР, 147 (1962), 1294-1295.

[5] Rosenbalatt-Roth M., *Sur la dispersion de sommes de variables aléatoires enchaînées*, C. R. Acad. Paris, 252 (1963), 5499-5501.

[6] Rosenblatt-Roth M., *Some Theorems Concerning the Strong Law of Large Numbers for Non-Homogeneous Markov Chains*, Ann. Math. Statist., vol. 35 (1964), 566-576.

[7] Szynal D., *Sur une extension du théorème de Marcinkiewicz-Zygmund*, Bull. Acad. Pol. Sci., 16 (1968), 895-898.

[8] Szynal D., *Sur une loi faible des grands nombres de variables aléatoires enchaînées*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. XVII (1972), 1091-1095.

STRESZCZENIE

Podano kilka twierdzeń dotyczących mocnego prawa wielkich liczb dla zmiennych losowych powiązanych w niejednorodny łańcuch Markowa. Sformułowane twierdzenia nie zakładają istnienie momentów i stanowią rozszerzenie lub wzmocnienie wyników z [4], [6] i [8].

РЕЗЮМЕ

Даются несколько теорем, касающихся усиленного закона больших чисел для неоднородных цепей Маркова. Сформулированные теоремы не предполагают существования моментов и являются расширением или усилением результатов работ [4], [6] и [8].