ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA
VOL. XXVIII, 10 SECTIO A 1974

Instytut Ekonomii Politycznej i Planowania, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin

ZOFIA STANKIEWICZ

Sur la subordination en domaine de certains opérateurs

Podporządkowanie obszarowe pewnych operatorów

Подчинение по областям некоторых операторов

1. Soient g et G, $g(0) = G(0)$, des fonctions régulières dans le cercle $K_r = \{z: |z| < r\}$. Si l'on a la relation

$$g(z) = G(\omega(z)) \text{ pour } |z| < r,$$

où ω est une fonction holomorphe et $|\omega(z)| \leqslant |z| < r$, on dit que la fonction g est subordonneé en domaine à la fonction G dans le cercle K_r et on écrit

$$g \dashv_r G.$$

G est alors appelée majorante de la fonction g.

Si G est, de plus, univalente dans K_r, on dit qu'elle est une majorante univalente de la fonction g et cela signifie que

$$g(K_r) \subset G(K_r).$$

Dans plusieurs travaux, entre autres [1], [3], [4], on a étudié le problème suivant: pour quel r, aussi grand que possible, la subordination $g \dashv_1 G$ entraîne-t-elle la subordination de certains opérateurs particuliers des fonctions g et G dans le cercle K_r, où G sont des fonctions quelconques appartenant à des classes fixées de fonctions régulières dans K_r.

Nous désignerons par F un opérateur satisfaisant aux deux conditions suivantes:

1° L'opérateur F, appliqué à une fonction $g(z)$ régulière dans K_1, donne une fonction de la variable z régulière dans K_1. La fonction ainsi construite sera désignée par $F_z g(z)$ ou Fg.

2° Si dans le cercle K_1 $g(z) = G(\zeta(z))$, où ζ est une fonction régulière dans K_1, et si $|\zeta(z)| < 1$ pour $z \in K_1$, on a

$$F_\zeta G(\zeta) = F_z g(z); \quad \zeta = \zeta(z); \quad |z| < 1.$$

Pour la famille d'opérateurs ainsi définie Alienicyn a énoncé et établi les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait l'implication

$$g \dashv_1 G \Rightarrow \mathscr{I}g \dashv_r \mathscr{I}G,$$

où $\mathscr{I}g = Fg + zg'$, et il a indiqué une application dans le cas où $Fg = \mu g$, μ est un nombre réel quelconque, $\mu \neq -1$. Dans tous ses raisonnements il n'a considéré que des majorantes univalentes.

Dans le travail [4] la condition nécessaire et suffisante de Alienicyn a été généralisée en y remplaçant la condition d'univalence de la majorante G par une condition locale d'univalence, est-à-dire $G'(z) \neq 0$ pour $z \in K_1$, et ce problème y a été résolu dans le cas où les majorantes G parcourent la classe $S(a, \beta)$, c'est-à-dire satisfont à la condition

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\beta}\left(1+\frac{zG''(z)}{G'(z)}\right)\right\} > a\cos\beta,\ a \in \langle 0, 1),\ \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ z \in K_1.$$

Théorème 1.1. [4]. *Soit* $g_n(z) = a_1 z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \ldots$ *une fonction régulière dans* K_1 *et* $G_n(z) = z + A_{n+1}z^{n+1} + A_{n+2}z^{n+2} + \ldots$ *une fonction régulière et localement univalente, c'est-à-dire telle que* $G_n'(z) \neq 0$ *dans* K_1 *et convexe pour* $|z| \leqslant r$.

Soit $\mathscr{I}g_n = Fg_n + zg_n'$.

Si $g_n \dashv_1 G_n$, *pour que* $\mathscr{I}G_n$ *soit une majorante univalente de la fonction* $\mathscr{I}g_n$ *dans le cercle* $|z| \leqslant r$ *il faut et il suffit que la fonction* $\mathscr{I}G_n$ *soit univalente dans le cercle* $|z| \leqslant r$ *et que dans ce cercle soit satisfaite l'inégalité*

$$\left|\frac{d}{dz}\mathscr{I}G_n(z)\right| \geqslant |G_n'(z)|\cdot\frac{2nr^n}{1-r^{2n}}. \tag{1.1}$$

Remarquons que les conditions imposées à l'opérateur F sont remplies par tout opérateur de la forme

$$Fg = C(g),$$

où C est une fonction entière quelconque fixée.

2. Soit $\mathscr{I}g = Fg + zg'$, où $Fg = \mu g + \delta g^2$, $\mu \neq -1$ étant un nombre réel quelconque et δ un nombre complexe quelconque, c'est-à-dire

$$\mathscr{I}g = \mu g + \delta g^2 + zg'.$$

Désignons par S la classe des fonctions univalentes admettant un développement de la forme $g(z) = z + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, $z \in K_1$, et par S^c la sous-classe de la classe S des fonctions convexes, c'est-à-dire satisfaisant à la condition

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right\} > 0 \text{ pour } z \in K_1.$$

Pour les opérateurs $\mathcal{J}g$ ainsi définis et pour les fonctions $G \in S$ ou $G \in S^c$ on a les théorèmes suivants.

Théorème 2.1. *Si $G \in S$, on a pour tout couple de fonctions g et G et pour tout couple de nombres μ et δ, où μ est réel, $\mu \neq -1$, δ complexe, l'implication*

$$g \dashv_1 G \Rightarrow \mathcal{J}g \dashv_{r(S,\mu,\delta)} \mathcal{J}G,$$

où

$$r(S, \mu, \delta) = \min\{r_c(S);\ R_0(S, \mu, \delta)\},$$

$r_c(S)$ est le rayon de convexité dans la classe S, égal à $2-\sqrt{3}$, tandis que $R_0(S, \mu, \delta)$ est la plus petite racine positive de l'équation

$$(1-\mu)r^3 + (\mu - 2|\delta| + 5)r^2 + (\mu - 2|\delta| - 5)r - (1+\mu) = 0 \quad \textit{pour } \mu < -1$$

ou

$$(1-\mu)r^3 + (\mu + 2|\delta| - 7)r^2 + (\mu + 2|\delta| + 7)r - (1+\mu) = 0 \quad \textit{pour } \mu > -1.$$

Théorème 2.2. *Soit $G \in S^c$. Alors pour tout couple de fonctions g et G et pour couple de nombres μ et δ, $\mu \neq -1$, on a l'implication*

$$g \dashv_1 G \Rightarrow \mathcal{J}g \dashv_{r(S^c,\mu,\delta)} \mathcal{J}G,$$

où

$$(2.1)\qquad r(S^c, \mu, \delta) = \begin{cases} \dfrac{-(2+|\delta|) + \sqrt{|\delta|^2 + 2|\delta|(1-\mu) + (3+\mu^2)}}{1-\mu+2|\delta|} & \textit{pour } \mu < -1, \\[2ex] \dfrac{2+|\delta| - \sqrt{|\delta|^2 + 2|\delta|(1-\mu) + (3+\mu^2)}}{1-\mu-2|\delta|} & \textit{pour } \mu > -1 \text{ et } |\delta| \neq \dfrac{1-\mu}{2}, \\[2ex] \dfrac{1+\mu}{2+\mu} & \textit{pour } |\delta| = \dfrac{1-\mu}{2};\ \mu \in (-1, 1\rangle. \end{cases}$$

Les démonstrations de ces deux théorèmes étant analogues, nous nous bornerons à présenter celle du premier.

Démonstration du théorème 2.1. La condition (1.1), qui constitue avec la convexité de la fonction G et l'univalence de $\mathcal{J}G$ pour $|z| \leqslant r$ la condition nécessaire et suffisante pour que le théorème soit vrai, prend la forme

$$(2.2)\qquad \left|\mu + 2|\delta|G + 1 + \frac{zG''}{G'}\right| \geqslant \frac{2r}{1-r^2},$$

puisque

$$\frac{d}{dz}\mathcal{J}G = G'\left[\mu+2|\delta|G+1+\frac{zG''}{G'}\right].$$

Nous allons déterminer le domaine de variation de la fonctionnelle

$$t(z) = \mu+2|\delta|G(z)+1+\frac{zG''}{G'} \text{ pour } z\epsilon K_r.$$

Comme pour la classe S la fonctionnelle

$$w = 1+\frac{zG''}{G'}$$

varie dans le cercle

$$\left|w-\frac{1+r^2}{1-r^2}\right| \leqslant \frac{4r}{1-r^2},$$

la fonctionnelle $\omega = 1+\mu+\frac{zG''(z)}{G'(z)}$ varie dans le cercle

$$\left|\omega-\frac{1+\mu+(1-\mu)r^2}{1-r^2}\right| \leqslant \frac{4r}{1-r^2}$$

et la fonctionnelle $t(z)$ variera dans un domaine contenu dans le cercle qu'on obtient du précédent en augmentant le rayon de

$$\max_{\substack{|z|\leqslant r\\ G\epsilon S}} |G(z)|\cdot 2|\delta|.$$

Par conséquent t satisfait à l'inégalité

$$\left|t-\frac{1+\mu+(1-\mu)r^2}{1-r^2}\right| \leqslant \frac{4r}{1-r^2}+\frac{2|\delta|r}{1-r^2}.$$

Moyennant ce domaine nous déterminerons le cercle à l'intérieur duquel les fonctions $\mathcal{J}G$ sont certainement univalentes. Nous profiterons de la définition donnée par Kaplan dans [2], d'après laquelle une fonction f, $f'(z) \neq 0$ pour $|z| \leqslant r$, est presque convexe, donc univalente, dans le cercle $|z| \leqslant r$ s'il existe une fonction φ, convexe et univalente, telle que

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f'(z)}{\varphi'(z)}\right\} > 0 \text{ pour } |z| \leqslant r.$$

Au lieu de la fonction φ nous utiliserons una fonction G ou $-G$ convexe et univalente dans le cercle $|z| \leqslant r_c(S) = 2-\sqrt{3}$. La condition

$$\mathrm{Re}\left|\frac{\frac{d}{dz}\mathcal{J}G}{G'}\right| > 0$$

ou

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\dfrac{d}{dz}\mathcal{I}G}{-G'}\right\} > 0$$

prendra la forme

$$(2.3)\qquad (1-\mu)r^3+(\mu-2|\delta|+3)r^2+(\mu-2|\delta|-3)r-(1+\mu)<0$$

pour $\mu < -1$

ou bien

$$(2.4)\qquad (1-\mu)r^3+(\mu+2|\delta|-5)r^2+(\mu+2|\delta|+5)r-(1+\mu)<0$$

pour $\mu > -1$.

Le rayon $r_s(S, \mu, \delta)$ du cercle cherché, dans lequel les fonctions $\mathcal{I}G$, $G \in S$, sont certainement univalentes, est donc le plus petit des deux nombres:

1°. $r_c(S) = 2-\sqrt{3}$

2°. la plus petite racine positive de l'équation que l'on obtient de (2.3) ou (2.4) en y prenant le signe d'égalité.

Pour $|\mu| > 1$ l'équation correspondante n'admet qu'une racine dans l'intervalle $(0, 1)$.

La condition demandée (1.1) ou la condition équivalente (2.2) sera satisfaite si

$$\left|\frac{1+\mu+(1-\mu)r^2}{1-r^2}\right| - \frac{4r}{1-r^2} - \frac{2|\delta|r}{(1-r)^2} \geqslant \frac{2r}{1-r^2}.$$

Le nombre cherché $R_0(S, \mu, \delta)$ est la plus petite racine positive de l'équation que l'on obtient de l'inégalité ci-dessus en y prenant l'égalité. Après quelques transformations on obtient

$$(2.5)\qquad (1-\mu)r^3+(\mu-2|\delta|+5)r^2+(\mu-2|\delta|-5)r-(1+\mu) = 0$$

pour $\mu < -1$

ou

$$(2.6)\qquad (1-\mu)r^3+(\mu+2|\delta|-7)r^2+(\mu+2|\delta|+7)r-(1+\mu) = 0$$

pour $\mu > -1$.

Pour $|\mu| > 1$ l'équation correspondante admet dans l'intervalle $(0, 1)$ exactement une racine.

Pour comparer les nombres $r_s(S, \mu, \delta)$ et $R_0(S, \mu, \delta)$ nous allons considérer les différences des polynômes correspondants. En faisant la différence des premiers membres de (2.5) et (2.3) on obtient l'expression $2r(1-r)$. Par conséquent pour $\mu < -1$ le polynôme (2.3) prend des valeurs plus grandes que le polynôme (2.5) et, de plus, pour $r = 0$ ils admettent une même valeur positive, tandis que pour $r = 1$ ils ont une même valeur négative. Il en résulte que pour tout δ et $\mu < -1$ on a

$$R_0(S, \mu, \delta) < r_s(S, \mu, \delta).$$

En faisant le même raisonnement pour $\mu \in (-1, 1\rangle$ et pour $\mu > 1$ on trouve que

$$\bigwedge_{\delta} \bigwedge_{\mu \neq -1} R_0(S, \mu, \delta) < r_s(S, \mu, \delta),$$

ce qui achève la démonstration.

Pour $\delta = 0$ le théorème 2.1 se rapporte au cas étudié par Alienicyn [1]. Cependant, comme la méthode appliquée dans l'étude de l'univalence de $\mathscr{I}G$ est différente de celle de Alienicyn, les résultats obtenus ici sont plus généraux. La généralisation consiste en ce que les intervalles μ pour lesquels le résultat obtenu est exact sont plus larges. Ce théorème prend la forme suivante:

Théorème 2.3. *Si $G \in S$, on a, indépendamment du choix des fonctions g et G, l'implication*

$$g \dashv_1 G \Rightarrow \mu g + zg' \dashv_{r(\mu)} \mu G + zG',$$

où

$$(2.7) \qquad r(\mu) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{8+\mu^2}-3}{1-\mu} & \textit{pour } \mu \in (-3,258\ldots; -1) \\[2ex] \dfrac{3-\sqrt{8+\mu^2}}{1-\mu} & \textit{pour } \mu \in (-1; 1,39\ldots) \\[2ex] 2-\sqrt{3} & \textit{pour } \mu \notin (-3,258\ldots; 1,39\ldots \end{cases}$$

En mettant $\delta = 0$ dans le théorème 2.2 on retrouve le résultat établi par l'auteur de ce travail dans [4].

Les rayons: (2.7) pour $\mu \in (-3,258\ldots; 1,39\ldots)$ et (2.1), où l'on pose $\delta = 0$, sont exacts. L'égalité a lieu pour la fonction

$$G = \frac{z}{(1+\varepsilon z)^2}, \quad |\varepsilon| = 1$$

dans le cas du théorème 2.3, ou pour la fonction

$$G = \frac{z}{1-\varepsilon z}, \quad |\varepsilon| = 1$$

dans le cas du théorème 2.2 (pour $\delta = 0$).

3. Désignons par $\tilde{S}_n$, $\tilde{S}_n \subset S$, la classe des fonctions univalentes admettant un développement de la forme $\tilde{G}_n(z) = z + A_{n+1}z^{n+1} + A_{2n+1}z^{2n+1} + \ldots$ c'est-à-dire la classe des fonctions univalentes n-symétriques.

Alienicyn a déterminé le rayon du cercle à l'intérieur duquel a lieu la subordination $zg_n' \dashv z\tilde{G}_n'$, où $g_n(z) = a_1 z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \ldots$, $g_n \dashv_1 \tilde{G}_n$, est une fonction holomorphe dans K_1. Ce théorème peut être généralisé en remplaçant les fonctions $z\tilde{G}_n'$ par les fonctions $\mu\tilde{G}_n + z\tilde{G}_n'$, μ réel, $\mu > -1$.

Théorème 3.1. *Si $\tilde{G}_n \in \tilde{S}_n$, on a pour tout couple de fonctions g_n et $\tilde{G}_n$ l'implication*

$$g_n \dashv_1 \tilde{G}_n \Rightarrow \mu g_n + zg_n' \dashv_{r_n(\mu)} \mu\tilde{G}_n + z\tilde{G}_n',$$

où

$$r_n(\mu) = \begin{cases} r_n'(\mu) & \text{pour } \mu \in (-1, 0\rangle, \\ \min\{r_n'(\mu); r_c(n)\} & \text{pour } \mu \in (0, 1), \\ r_c(n) & \text{pour } \mu \geqslant 1, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$r_n'(\mu) = \sqrt[n]{\frac{1 + 2n - \sqrt{\mu^2 + 4n + 4n^2}}{1-\mu}}, \tag{3.2}$$

$r_c(n) = \sqrt[n]{1 + n - \sqrt{2n + n^2}}$ = *rayon de convexité dans la classe $\tilde{S}_n$. Le résultat est exact pour les μ tels que $r_n(\mu) = r_n'(\mu)$. L'égalité a lieu pour la fonction*

$$\tilde{G}_n = \frac{z}{(1 + \varepsilon z^n)^{2/n}}; \quad |\varepsilon| = 1.$$

Démonstration. Nous nous appuierons, comme dans les théorèmes précédents, sur le théorème 1.1. Nous utiliserons le domaine de variation de la fonctionnelle

$$w(z) = 1 + \frac{z\tilde{G}_n''(z)}{\tilde{G}_n'(z)},$$

déterminé par Alienicyn [1]. Si l'on pose

$$w = \mu + 1 + \frac{z\tilde{G}_n''(z)}{\tilde{G}_n'(z)}$$

on aura, pour $|z| \leqslant r$,

$$\left| w - \left(n\frac{1 + r^{2n}}{1 - r^{2n}} + \mu \right) \right| \leqslant (n-1)\frac{1 + r^{2n}}{1 - r^{2n}} + 2(n+1)\frac{r^n}{1 - r^{2n}}.$$

La méthode utilisée dans la démonstration du théorème 2.1 pour établir l'univalence de la fonction $\mu\tilde{G}_n + z\tilde{G}'_n$ ne donne des résultats pour tout $n \geqslant 1$ que si $\mu > -1$. On trouve, en effet, que les fonctions $\mu\tilde{G}_n + z\tilde{G}'_n$ sont des fonctions univalentes au moins dans le cercle $|z| < r_s(n, \mu)$, où

$$r_s(n, \mu) = \begin{cases} \sqrt[n]{\dfrac{1+n-\sqrt{n^2+2n+\mu^2}}{1-\mu}} & \text{si } \mu \in (-1, 0), \\ r_c(n) & \text{si } \mu \geqslant 0. \end{cases}$$

En vertu du théorème 1.1 la subordination $\mu g_n + z g'_n \dashv \mu\tilde{G}_n + z\tilde{G}'_n$ aura lieu si l'inégalité suivante est satisfaite:

$$n \cdot \frac{1+r^{2n}}{1-r^{2n}} + \mu - (n-1)\frac{1+r^{2n}}{1-r^{2n}} - 2(n+1)\frac{r^n}{1-r^{2n}} \geqslant \frac{2nr^n}{1-r^{2n}},$$

d'où $r \leqslant r'_n(\mu)$; $r'_n(\mu)$ est défini par la formule (3.2). Un simple calcul montre que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $\mu > -1$ on a

$$r'_n(\mu) < r_s(\mu, n).$$

Par conséquent le rayon de subordination cherché est le nombre $r_n(\mu)$ défini par la formule (3.1) et la démonstration est achevée.

En mettant dans ce théorème $\mu = 0$ on retrouve le résultat de Alienicyn, tandis que pour $n = 1$ on obtient le théorème 2.3. La valeur donnée dans le théorème est exacte, ce qu'on établit de même que dans le travail de Alienicyn.

RÉFÉRENCES

[1] Аленицин Ю. Е., *Об однолистных мажорантах*, Математический Сборник, 26 (1950), 57–74.

[2] Kaplan W., *Close-to-Convex Schlicht Functions*, The Michigan Mathematical Journal, 1, 2 (1952), 169-185.

[3] Robinson M. R., *Univalent Majorants*, TAMS, 61 (1947), 1-35.

[4] Stankiewicz Z., *Sur la subordination en domaine de certains opérateurs dans les classes $S(\alpha, \beta)$*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, 27 (1973), 109-119

STRESZCZENIE

W omawianej pracy, w oparciu o metodę podaną w [4], wyznaczono liczby $r(T, \mu, \delta)$, $T = S$ lub $T = S^c$, będące promieniami pewnych kół, w których spełniona jest następująca implikacja

$$g \dashv G \Rightarrow \mathcal{I}g \dashv_{r(T,\mu,\delta)} \mathcal{I}G$$

gdzie $\mathcal{I}f = \mu f + \delta f^2 + zf'$, $\mu \neq -1$ jest liczbą rzeczywistą, zaś δ dowolną liczbą zespoloną.

Wyznaczono również liczbę $r_n(\mu)$ będącą promieniem koła, w którym zachodzi implikacja

$$g_n \dashv_1 \tilde{G}_n \Rightarrow \mu g_n + z g_n' \dashv_{r_n(\mu)} \mu \tilde{G}_n + z \tilde{G}_n'$$

gdzie $g_n = a_1 z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \ldots$ jest funkcją holomorficzną, zaś $G_n = z + A_{n+1} z^{n+1} + A_{2n+1} z^{2n+1} + \ldots$ jest funkcją jednolistną.

РЕЗЮМЕ

Опираясь на метод, представленный в работе [4], определяются числа $r(T, \mu, \delta)$, $T = S$ или $T = S^c$ являющиеся радиусами некоторых кругов, в которых удовлетворена следующая импликация

$$g \dashv_1 G \Rightarrow \mathscr{I} g \dashv_{r(T,\mu,\delta)} \mathscr{I} G$$

где $\mathscr{I} f = \mu f + \delta f^2 + z f'$, $\mu \neq -1$ — действительное число, а δ — произвольное комплексное число.

Определено также число $r_\mu(\mu)$ являющееся радиусом круга, в котором имеет место импликация

$$g_n \dashv_1 \tilde{G}_n \Rightarrow \mu g_n + z g_n' \dashv_{r_n(\mu)} \mu \tilde{G}_n + z \tilde{G}_n',$$

где $g_n = a_1 z + a_{n+1}, z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \ldots$ — голоморфная функция, а $\tilde{G}_n = z + A_{n+1} z^{n+1} + A_{2n+1} z^{2n+1} + \ldots$ — однолистная функция.