ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XXVI, 9 SECTIO A 1972

Instytut Matematyki, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin

ANNA ŻMUREK

Sur la torsion intégrale du type I

O skręceniu integralnym typu I

Об интегральном кручении I типа

Introduction

Dans ce travail nous introduisons les définitions des torsions intégrales généralisées (secondes courbures intégrales) des types I et III* d'une courbe faiblement régulière plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions et nous énonçons une condition d'équivalence de ces types. En utilisant la méthode introduite par K. Radziszewski dans le travail [2] nous allons démontrer que la longueur de l'arc, la courbure intégrale et la torsion intégrale généralisée du type I déterminent une courbe à sa position dans l'espace près.

Désignons par $\langle A*B\rangle$ une courbe dans l'espace euclidien à trois dimensions E_3, dont l'équation paramétrique est

$$X = X(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

où $X(t)$ est le rayon-vecteur du point de la courbe qui correspond à la valeur t du paramètre, $X(0) = A$, $X(1) = B$ et telle que les conditions suivantes soient remplies:

1° $X(t_1) \neq X(t_2)$ pour $t_1 \neq t_2$, c'est-à-dire que la courbe n'a pas de points multiples;

2° dans un système de coordonnées le vecteur $X(t)$ a les coordonnées $x^1(t)$, $x^2(t)$, $x^3(t)$, fonctions réelles continues de la variable t, dont les dérivées $\dfrac{dx^i(t)}{dt}$, $i = 1, 2, 3$ sont continues dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$ et ne s'y annulent pas simultanément, c'est-à-dire qu'en tout point de la courbe il existe un vecteur tangent continu non nul.

De la condition 2° il résulte que la courbe $\langle A*B\rangle$ est rectifiable.

---

*) Les types portent les mêmes numéros que dans le travail [4].

Le vecteur tangent unité au point X de la courbe $\langle A*B\rangle$, déterminé par la condition 2°, sera désigné par $T(X)$, donc

$$T(X)=\frac{dX(t)}{dt}\Big/\left|\frac{dX(t)}{dt}\right|$$

où

$$\left|\frac{dX(t)}{dt}\right|=\left[\left(\frac{dx^1(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx^2(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx^3(t)}{dt}\right)^2\right]^{1/2}$$

Si l'on place l'origine du vecteur tangent $T(X)$ de la courbe $\langle A*B\rangle$ à l'origine 0 des coordonnées, son extrémité décrira sur la sphère-unité de centre 0 une courbe continue d'équation

(1) $$X^* = X^*(t) = \frac{dX(t)}{dt}\Big/\left|\frac{dX(t)}{dt}\right|$$

appelée indicatrice sphérique ou image sphérique de la courbe $\langle A*B\rangle$. Nous la désignerons par $\langle A^* * B^*\rangle$.

Supposons encore:

1) que la courbe $\langle A^* * B^*\rangle$ n'ait pas de points multiples,

2) que la courbe $\langle A^* * B^*\rangle$ soit rectifiable.

Pour la courbe $\langle A^* * B^*\rangle$ sur la sphère on peut déterminer, de même qu'on l'a fait dans le travail [4], p. 64, deux côtés, les appelant respectivement côté droit et côté gauche.

Une courbe $\langle A*B\rangle$ satisfaisant à toutes ces conditions sera dorénavant appelée courbe de classe $K^{(1)}$.

Notons

(2) $s(t)$ la longueur de l'arc $\langle A*X\rangle$, $X = X(t)$, $t\in\langle 0, 1\rangle$

(3) $k(t)$ la longueur de l'arc $\langle A^* * X^*\rangle$, $X^* = X^*(t)$, $t\in\langle 0, 1\rangle$

La fonction $k(t)$ est appelée courbure intégrale de l'arc $\langle A*X\rangle$.

Pour les courbes de classe C^2 la courbure intégrale est intégrale – au sens classique – de la courbure de la courbe en un point par rapport à la longueur de l'arc $\langle A*X\rangle$, $X = X(t)$. La fonction $k(t)$ est une fonction additive d'intervalle (d'arc). De là et des hypothèses 2° et 1), 2) il résulte que $s(t)$ et $k(t)$ admettent pour tout $t\in\langle 0, 1\rangle$ des valeurs positives finies.

On peut donc admettre dans la suite que la courbe $\langle A*B\rangle$ est rapportée à un paramètre naturel s et mettre son équation sous la forme:

$$X = X(s), \qquad 0\leqslant s\leqslant s^1,$$

où $X(0) = A$, $X(s^1) = B$ et où le vecteur $X(s)$ satisfait aux hypothèses précédentes.

L'hypothèse relative à la courbure intégrale $k(s)$ entraîne, de plus, que la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ est rectifiable et que sa longueur est une fonction additive d'intervalle (d'arc). En vertu du théorème V (Ch. Pauc, [1],) la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ admet presque partout un vecteur tangent.

Le point $X^* \epsilon \langle A^* * B^* \rangle$, où cette courbe admet un vecteur tangent sera dit point régulier de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$; on appellera point irrégulier un point où le vecteur tangent n'existe pas. Il en résulte que sur une courbe rectifiable $\langle A^* * B^* \rangle$ la mesure de l'ensemble de ses points réguliers est égale à la longueur de cette courbe, tandis que l'ensemble de ses points irréguliers est de mesure nulle.

Si le point $X \epsilon \langle A * B \rangle$ est tel que le point correspondant $X^* = T(X)$ sur l'image sphérique $\langle A^* * B^* \rangle$ est un point régulier de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$, la courbe $\langle A * B \rangle$ admet au point X un plan osculateur du type III ([4]). Un tel point X de la courbe $\langle A * B \rangle$ sera dit, par analogie avec le point correspondant $X^* \epsilon \langle A^* * B^* \rangle$, point régulier de la courbe $\langle A * B \rangle$, sinon il sera appelé irrégulier. De ces remarques et de l'hypothèse sur l'existence d'une courbure intégrale finie de la courbe $\langle A * B \rangle$ et enfin du théorème V (Ch. Pauc [1]) il s'ensuit que sur la courbe $\langle A * B \rangle$ l'ensemble de ses points irréguliers est de mesure nulle, tandis que l'ensemble de ses points réguliers est dense sur tout arc de la courbe $\langle A * B \rangle$ et que sa mesure est égale à la longueur de la courbe.

Soient $\tilde{A}, \tilde{B}$ des points réguliers de la courbe $\langle A * B \rangle$ appartenant à des entourages suffisamment petits des points correspondants A, B. Admettons que

$$\tilde{A} = X(\tilde{s}^0), \quad \tilde{B} = X(\tilde{s}^1), \quad 0 \leqslant \tilde{s}^0 < \tilde{s}^1 \leqslant s^1.$$

L'image de l'arc $\langle \tilde{A} * \tilde{B} \rangle \subset \langle A * B \rangle$ sur la sphère-unité K est l'arc $\langle \tilde{A}^* * \tilde{B}^* \rangle \subset \langle A^* * B^* \rangle$.

Nous désignerons par

$$W_m = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$$

une ligne brisée inscrite à la courbe $\langle \tilde{A} * \tilde{B} \rangle$, telle que

$$X_i = X(s_i), \; i = 1, 2, \ldots, m, \; \tilde{s}^0 = s_1 < s_2 < \ldots < s_m = \tilde{s}^1.$$

Si les points $X_i^* \epsilon \langle \tilde{A}^* * \tilde{B}^* \rangle$ sont les images sphériques des points $X_i \epsilon \langle \tilde{A} * \tilde{B} \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, m$, et si l'on fait passer par tout couple X_i^*, X_{i+1}^* de points sur la sphère K un arc de grand cercle de longueur inférieure à π on obtiendra une ligne brisée sphérique $W_m^* = \{X_1^*, X_2^*, \ldots, X_m^*\}$ inscrite à la courbe $\langle \tilde{A}^* * \tilde{B}^* \rangle$, $X_i^* = X^*(s_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\tilde{s}^0 = s_1 < s_2 < \ldots < s_m = \tilde{s}^1$.

Désignons par Y_i^* sur la sphère-unité K l'extrémité du vecteur

$$X_iX_{i+1} = \frac{X(s_{i+1}) - X(s_i)}{|X(s_{i+1}) - X(s_i)|}$$

$i = 1, 2, \ldots, m-1$.

Construisons, comme précédemment, la ligne brisée sphérique

$$V_{2m-1}^* = \{X_1^*, Y_1^*, X_2^*, Y_2^*, \ldots, X_m^*\}$$

en menant par tout couple de points X_i^*, Y_i^* et Y_i^*, X_{i+1}^* un arc de grand cercle $(X_i^* Y_i^*)$ resp. $(Y_i^* X_{i+1}^*)$ de longueur inférieure à π.

Pour la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$ sur la sphère on détermine ensuite deux côtés qu'on appellera respectivement droit et gauche (ce qui est possible, puisque la courbe est rectifiable, n'admet pas de points multiples et qu'en prenant pour paramètre la longueur de l'arc on peut déterminer le sens dans lequel le paramètre croît sur la courbe). Or, cela permet de distinguer les deux côtés de la ligne brisée W_m^* et V_{2m-1}^* qui correspondent aux deux côtés de la courbe $\langle A^* * B^* \rangle$.

Désignons par

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} a_i &= \sphericalangle(Y_i^* X_i^*, Y_i^* X_{i+1}^*) \\ \beta_i &= \sphericalangle(X_{i+1}^* Y_i^*, X_{i+1}^* Y_{i+1}^*) \end{aligned}$$

les angles que font les segments de ligne brisée sphérique V_{2m-1}^*, ces angles étant mesurés à droite de la ligne brisée V_{2m-1}^*.

Le nombre

$$\text{(5)} \qquad \tau_1(\langle A * B \rangle) = \lim_{\langle \tilde{A}^* * \tilde{B}^* \rangle \to \langle A^* * B^* \rangle} \left\{ \lim_{V_{2m-1}^* \to \langle \tilde{A}^* * \tilde{B}^* \rangle} \left[\sum_{i=1}^{m-1} (\pi - a_i) + \sum_{i=1}^{m-2} (\pi - \beta_i) \right] \right\}$$

(si la limite au second membre de (5) existe) sera appelé torsion intégrale généralisée du type I de la courbe $\langle A * B \rangle$.

Désignons ensuite par

$$\tau_1(s) = \tau_1(\langle A * X \rangle),$$

où $X = X(s)$, la torsion intégrale du type I de l'arc $\langle A * X \rangle \subset \langle A * B \rangle$.

Notons encore

$$\text{(6)} \qquad \varphi_i = \sphericalangle(X_{i+1}^* X_i^*, X_{i+1}^* X_{i+2}^*)$$

les angles que font les segments consécutifs de la ligne brisée sphérique W_m^*, mesurés à droite de celle-ci.

La torsion intégrale du type III de la courbe $\langle A*B\rangle$ sera définie comme la limite

$$\hat{\tau}_3(\langle A*B\rangle) = \lim_{\langle\tilde{A}^**\tilde{B}^*\rangle\to\langle A^**B^*\rangle}\Big[\lim_{W_m^*\to\langle\tilde{A}^**\tilde{B}^*\rangle}\sum_{i=1}^{m-2}(\pi-\varphi_i)\Big] \tag{7}$$

On désignera par

$$\hat{\tau}_3(s) = \hat{\tau}_3(\langle A*X\rangle),$$

où $X = X(s)$, la torsion intégrale du type III de l'arc $\langle A*X\rangle \subset \langle A*B\rangle$.

Observons que si la courbe $\langle A*B\rangle$ de classe $K^{(2)}$ (voir [4]) admet aux points A et B des plans osculateurs unilatères du type III, la torsion intégrale du type III de la courbe $\langle A*B\rangle$, définie par la formule (7), est équivalente à la définition 1 ([4]),

$$\hat{\tau}_3(\langle A*B\rangle) = \tau_3(\langle A*B\rangle).$$

Théorème 1. *Si la courbe $\langle A*B\rangle$ de classe $K^{(2)}$ admet aux points A et B des plans osculateurs unilatères du type* III, *on a*

$$\tau_1(\langle A*B\rangle) = \hat{\tau}_3(\langle A*B\rangle) = \tau_3(\langle A*B\rangle).$$

Démonstration. Soit $W_m = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ une ligne brisée quelconque inscrite à la courbe $\langle A*B\rangle$ et vérifiant la condition: $X_i = X(s_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $0 = s_1 < s_2 < \ldots < s_m = s^1$.

Construisons, de même qu'à la p. 111-112, les lignes brisées sphériques W_m^*, V_{2m-1}^* correspondant à la ligne brisée W_m. Désignons par $\alpha_i, \beta_i, \varphi_i$ les angles définis par (4) et (6), mesurés à droite des lignes brisées correspondantes, et posons

$$\gamma_i = \pm \sphericalangle(X_i^*Y_i^*, X_i^*X_{i+1}^*) \quad |\gamma_i| < \pi \tag{8}$$

$$\delta_i = \pm \sphericalangle(X_{i+1}^*Y_i^*, X_{i+1}^*X_i^*) \quad |\delta_i| < \pi$$

le signe „+" se rapportant au cas où le point Y_i^* est à gauche de l'arc $(X_i^*X_{i+1}^*)$ de la ligne brisée sphérique W_m^*, le signe „−" au cas contraire.

En vertu de (4), (6) et (8) on obtient:

$$\varphi_i = \beta_i - \delta_i - \gamma_{i+1} = \beta_i - (\pi - \alpha_i - \gamma_i) - \gamma_{i+1} = \alpha_i + \beta_i - \pi + \gamma_i - \gamma_{i+1} \tag{9}$$

pour chacune des quatre positions possibles des couples de points Y_i^*, Y_{i+1}^*.

De la relation (9) il résulte que

$$\sum_{i=1}^{m-2}(\pi-\varphi_i) = \sum_{i=1}^{m-2}[(\pi-\alpha_i)+(\pi-\beta_i)] - \gamma_1 + \gamma_{m-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{m-2}[(\pi-\alpha_i)+(\pi-\beta_i)] - \gamma_1 + (\pi - \alpha_{m-1} - \delta_{m-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1}(\pi-\alpha_i) + \sum_{i=1}^{m-2}(\pi-\beta_i) - \gamma_1 - \delta_{m-1},$$

donc

$$(10)\qquad \sum_{i=1}^{m-2}(\pi-\varphi_i)=\sum_{i=1}^{m-1}(\pi-\alpha_i)+\sum_{i=1}^{m-2}(\pi-\beta_i)-\gamma_1-\delta_{m-1},$$

Aux points A et B la courbe $\langle A*B\rangle$ admet des plans osculateurs unilatères du type III, donc l'image sphérique $\langle A^**B^*\rangle$ admet des tangentes unilatères aux points A^* et B^* ([4]). Comme l'existence d'un plan osculateur du type III en un point donné de la courbe implique celle d'un plan osculateur du type I et que ces plans se confondent, [3], les angles γ_1 et δ_{m-1} tendent vers zéro quand $W_m\to\langle A*B\rangle$.

En vertu du théorème 1 ([4]) la torsion intégrale du type III de la courbe $\langle A*B\rangle$ existe et, en tenant compte de (10), (5) et (7), on a

$$\tau_3(\langle A*B\rangle)=\hat{\tau}_3(\langle A*B\rangle)=\tau_1(\langle A*B\rangle),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si $W_m(\langle A*B\rangle)=\{X_1,X_2,\ldots,X_m\}$ est une ligne brisée inscrite à la courbe $\langle A*B\rangle$, $X_1=A$, $X_m=B$, on désignera par $W_m(\langle A*X_i\rangle)$ la ligne brisée inscrite à l'arc $\langle A*X_i\rangle$ de la courbe $\langle A*B\rangle$ telle que $W_m(\langle A*X_i\rangle)\subset W_m$.

Nous dirons que la torsion intégrale du type I de la courbe $\langle A*B\rangle$ est uniforme si pour toute suite finie de points réguliers $X_1,X_2,\ldots,X_n\in\langle A*B\rangle$ et tout $\varepsilon>0$ et toute suite de lignes brisées $W_m(\langle A*B\rangle)$ inscrites à la courbe $\langle A*B\rangle$, $W_m(\langle A*B\rangle)\to\langle A*B\rangle$ et contenant les points $X_1,X_2,\ldots,X_n$, il existe un indice m_0 tel que pour $m>m_0$ on ait

$$\left|\tau_1(\langle A*X_i\rangle)-\tau^*\big(W_m(\langle A*X_i\rangle)\big)\right|<\varepsilon,$$

pour tous les $i=1,2,\ldots,n$ en même temps, $\big(\tau_1(\langle A*X_i\rangle)$ désignant la torsion intégrale du type I de l'arc $\langle A*X_i\rangle\subset\langle A*B\rangle$; $\tau^*\big(W_m(\langle A*X_i\rangle)\big)$ la déviation de la ligne brisée sphérique $W_m^*(\langle A^**X_i^*\rangle)\subset W_m\big)$.

Soient $\langle A*B\rangle$, $\langle A'*B'\rangle$ des courbes de classe $K^{(1)}$ d'équations paramétriques

$$X=X(s),\quad X'=X'(s),\quad 0\leqslant s\leqslant s^1,$$

s étant le paramètre naturel des deux courbes.

Désignons respectivement par $k(s)$, $k'(s)$ les courbures intégrales et par $\tau_1(s)$, $\tau_1'(s)$ et $\tau_3(s)$, $\tau_3'(s)$ les torsions intégrales des types I et III des arcs $\langle A*X\rangle$, $X=X(s)$, $\langle A'*X'\rangle$, $X'=X'(s)$.

Théorème 2. *Si les courbes $\langle A*B\rangle$, $\langle A'*B'\rangle$ de classe $K^{(1)}$ sont rapportées au paramétre naturel s, $0\leqslant s\leqslant s^1$ et admettent des courbures intégrales finies et des torsions intégrales du type I finies et uniformes et si*

$$k(s)=k'(s),\quad \tau_1(s)=\tau_1'(s),$$

pour tout $s\in\langle 0,s^1\rangle$, les courbes $\langle A*B\rangle$ et $\langle A'*B'\rangle$ se confondent.

Démonstration. Considérons les arcs $\langle\tilde{A}*\tilde{B}\rangle \subset \langle A*B\rangle$ et $\langle\tilde{A}'*\tilde{B}'\rangle \subset \langle A'*B'\rangle$, où $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{A}', \tilde{B}'$ sont des points réguliers quelconques des courbes $\langle A*B\rangle$ resp. $\langle A'*B'\rangle$ tels que $\tilde{A} = X(\tilde{s}^0)$, $\tilde{B} = X(\tilde{s}^1)$, $\tilde{A}' = X'(\tilde{s}^0)$, $\tilde{B}' = X'(\tilde{s}^1)$, $0 \leqslant \tilde{s}^0 < \tilde{s}^1 \leqslant \tilde{s}^1$. L'existence de ces points résulte du fait que sur les deux courbes l'ensemble des points réguliers est dense et que sa mesure est égale à la longueur de ces courbes (p. 111).

Désignons par $s(\langle\tilde{A}*\tilde{B}\rangle)$, $s(\langle\tilde{A}'*\tilde{B}'\rangle)$ les longueurs des arcs correspondants. Il résulte de ce qui précède que $s(\langle\tilde{A}*\tilde{B}\rangle) = s(\langle\tilde{A}'*\tilde{B}'\rangle) = \tilde{s}^1-\tilde{s}^0$. Admettons encore que $|(\tilde{s}^1-\tilde{s}^0)-s^1| < \varepsilon$.

Soient $\langle\tilde{A}^**\tilde{B}^*\rangle$, $\langle\tilde{A}'^**\tilde{B}'^*\rangle$ les images sphériques des courbes $\langle\tilde{A}*\tilde{B}\rangle$, $\langle\tilde{A}'*\tilde{B}'\rangle$. Ces courbes admettant, par hypothèses, des tangentes continues, leurs images sphériques sont des courbes continues.

Soient $W^*_m = \{X^*_1, X^*_2, \ldots, X^*_m\}$, $W'^*_m = \{X'^*_1, X'^*_2, \ldots, X'^*_m\}$ des lignes brisées sphériques inscrites respectivement aux courbes $\langle\tilde{A}^**\tilde{B}^*\rangle$, $\langle\tilde{A}'^**\tilde{B}'^*\rangle$, $X^*_i = X^*(s_i)$, $X'^*_i = X'^*(s_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\tilde{s}^0 = s_1 < s_2 < \ldots < s_m = \tilde{s}^1$ et telles que X^*_i, X'^*_i soient des points réguliers des courbes correspondantes. Il résulte de l'hypothèse que $k(s_i) = k'(s_i)$, $\tau_1(s_i) = \tau_1'(s_i)$. On admet de plus que les lignes brisées W^*_{m+1}, W'^*_{m+1} s'obtiennent des lignes brisées W^*_m, W'^*_m en adjoignant à l'ensemble des points $X^*_1, X^*_2, \ldots, X^*_m$ et $X'^*_1, X'^*_2, \ldots, X'^*_m$ les nouveaux points réguliers $X^*(s') \in \langle\tilde{A}^**\tilde{B}^*\rangle$, $X'^*(s') \in \langle\tilde{A}'^**\tilde{B}'^*\rangle$.

Formons, de même qu'à la p. 112, les lignes brisées sphériques $V^*_{2m-1} = \{X^*_1, Y^*_1, X^*_2, Y^*_2, \ldots, X^*_m\}$, $V'^*_{2m-1} = \{X'^*_1, Y'^*_1, X'^*_2, Y'^*_2, \ldots, X'^*_m\}$.

Construisons les lignes brisées planes $L_m, L'_m, \mathcal{L}_{2m-1}, \mathcal{L}'_{2m-1}$ contenues dans le plan E_2, dans lequel on a déterminé un système orthonormal de coordonnées, de telle façon que les longueurs de leurs segments aient des longueurs égales à celles des segments correspondants des lignes brisées W^*_m, W'^*_m, V^*_{2m-1}, V'^*_{2m-1} et tells que les angles orientés que font les segments consécutifs des lignes brisées planes soient respectivement égaux aux angles que font les segments consécutifs des lignes brisées sphériques. On obtient ainsi une transformation biunivoque qui fait correspondre aux lignes brisées sphériques W^*_m, W'^*_m, V^*_{2m-1}, V'^*_{2m-1} les lignes brisées planes respectives et qui conserve les longueurs des lignes brisées ainsi que les angles que font leurs segments consécutifs.

Soient $\tilde{A}^{**}, \tilde{B}^{**}, \tilde{A}'^{**}, \tilde{B}'^{**}, X^{**}_i, X'^{**}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, Y^{**}_j, Y'^{**}_j, $j = 1, 2, \ldots, m-1$ les images dans le plan E_2 des points correspondants de la sphère. Il existe un mouvement euclidien du plan E_2 dans lequel le transformé du point $\tilde{A}'^{**}$ est le point $\tilde{A}^{**}$, le transformé du vecteur $X'^{**}_1 X'^{**}_2$ et le vecteur $X^{**}_1 X^{**}_2$ colinéaire avec lui et de même sens. On peut donc admettre que $\tilde{A}^{**} = \tilde{A}'^{**}$ et $X'^{**}_1 X'^{**}_2 = \lambda X^{**}_1 X^{**}_2$, $\lambda > 0$.

Nous appliquerons maintenant un raisonnement analogue à celui que K. Radziszewski a fait dans le travail [2]:

Choisissons un système de coordonnées tel que son origine soit $0 = \bar{A}^{**} = \bar{A}'^{**}$, que le demi-axe positif Ox se confonde avec la direction du vecteur $X_1^{**} X_2^{**}$, et que les points $\bar{B}^{**}$ et $\bar{B}'^{**}$ soient d'un même côté de l'axe Ox, ce qui est toujours permis puisque l'on peut faire subir à la courbe une réflexion par rapport à l'axe Ox.

Désignons respectivement par d_i, d_i' les longueurs des segments $(X_i^* X_{i+1}^*)$, $(X_i'^* X_{i+1}'^*)$ des lignes brisées W_m^*, $W_m'^*$ et par φ_i les angles donnés par la formule (6).

Si (x_i, y_i) sont les coordonnées orthonormales des points X_i^{**}, $i = 1, 2, \ldots, m$, on aura:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0\\
x_2 &= d_1\\
x_3 &= d_1 + d_2\cos(\pi-\varphi_1)\\
x_4 &= d_1 + d_2\cos(\pi-\varphi_1) + d_3\cos[2\pi-(\varphi_1+\varphi_2)]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_1 &= 0\\
y_2 &= 0\\
y_3 &= d_2\sin(\pi-\varphi_1)\\
y_4 &= d_2\sin(\pi-\varphi_1) + d_3\sin[2\pi-(\varphi_1+\varphi_2)]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

donc généralement

$$\begin{aligned}
x_m &= \sum_{i=1}^{m-1} d_i\cos[(i-1)\pi-(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_{i-1})]\\
y_m &= \sum_{i=1}^{m-1} d_i\sin[(i-1)\pi-(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_{i-1})]
\end{aligned} \tag{11}$$

pour $m \geqslant 2$.

En désignant respectivement par

$$\begin{aligned}
\tau_3^i &= \sum_{j=1}^{i-1}(\pi-\varphi_j)\\
\tau_1^i &= \sum_{j=1}^{i}(\pi-a_j) + \sum_{j=1}^{i-1}(\pi-\beta_j)
\end{aligned} \tag{12}$$

les torsions intégrales des types III et I de la ligne brisée $W_m(\langle \tilde{A} * X_i \rangle) \subset W_m$, on aura, en vertu de (10),

$$\tau_3^i = \tau_1^i - \gamma_1 - \delta_i, \tag{13}$$

les angles $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$ étant définis par (4) et (8).

En profitant de (11), (12) et (13) on obtient

$$x_m = \sum_{i=1}^{m-1} d_i \cos(\tau_1^i - \gamma_1 - \delta_i),$$

$$y_m = \sum_{i=1}^{m-1} d_i \sin(\tau_1^i - \gamma_1 - \delta_i), \quad m \geqslant 2.$$

On aura des expressions analogues pour les coordonnées (x'_m, y'_m) du point X'^{**}_m.

En s'appuyant sur les relations précédentes on va trouver des limitations de $|x_m - x'_m|$, et $|y_m - y'_m|$ comme dans le travail [2]:

$$\begin{aligned}
|x_m - x'_m| &= \Big|\sum_{i=1}^{m-1} [d_i \cos(\tau_1^i - \gamma_1 - \delta_i) - d'_i \cos(\tau'^i_1 - \gamma'_1 - \delta'_i)]\Big| \\
&\leqslant \Big|\sum_{i=1}^{m-1} d_i [\cos(\tau_1^i - \gamma_1 - \delta_i) - \cos(\tau'^i_1 - \gamma'_1 - \delta'_i)]\Big| + \\
&\quad + \Big|\sum_{i=1}^{m-1} (d_i - d'_i) \cos(\tau'^i_1 - \gamma'_1 - \delta'_i)\Big| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m-1} d_i \Big| 2 \sin \frac{\tau_1^i - \tau'^i_1 - \gamma_1 + \gamma'_1 - \delta_i + \delta'_i}{2} \sin \frac{\tau_1^i + \tau'^i_1 - \gamma_1 - \gamma'_1 - \delta_i - \delta'_i}{2}\Big| + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m-1} |d_i - d'_i| \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} d_i |\tau_1^i - \tau'^i_1 - \gamma_1 + \gamma'_1 - \delta_i + \delta'_i| + \sum_{i=1}^{m-1} |d_i - d'_i|.
\end{aligned}$$

Comme les sommets $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_m^*$ et $X'^*_1, X'^*_2, \ldots, X'^*_m$ des lignes brisées W_m^*, W'^*_m sont des points réguliers des courbes $\langle \tilde{A}'^* * \tilde{B}^* \rangle$, resp. $\langle \tilde{A}'^* * \tilde{B}'^* \rangle$ pour tout $m = 2, 3, \ldots$, il existe un indice m_0 tel que pour tous les $m > m_0$

$$|\gamma_1| < \varepsilon, \ |\gamma'_1| < \varepsilon, \ |\delta_i| < \varepsilon, \ |\delta'_i| < \varepsilon, \tag{14}$$

$i = 1, 2, \ldots, m-1$, ε étant un nombre positif quelconque donné d'avance.

La torsion intégrale du type I des courbes $\langle A*B\rangle$, $\langle A'*B'\rangle$ étant uniforme par hypothèse, on a:

$$(15)\qquad \begin{gathered}|\tau_1^i-\tau_1(\langle\tilde{A}*X_i\rangle)|<\varepsilon\\ |\tau_1'^i-\tau_1'(\langle\tilde{A}'*X_i'\rangle)|<\varepsilon\end{gathered}$$

pour tout $i=1,2,\ldots,m-1$. L'hypothèse entraîne aussi

$$(16)\qquad \tau_1(\langle\tilde{A}*X_i\rangle)=\tau_1'(\langle\tilde{A}'*X_i'\rangle)$$

pour tout $i=1,2,\ldots$.

Pour toutes les valeurs de $i=1,2,\ldots,m-1$, $m>m_0$ et en vertu de (14), (15) et (16) on a:

$$\begin{aligned}|\tau_1^i-\tau_1'^i-\gamma_1+\gamma_1'-\delta_i+\delta_i'|&\leqslant|\tau_1^i-\tau_1(\langle\tilde{A}*X_i\rangle)|+\\ &|\tau_1(\langle\tilde{A}*X_i\rangle)-\tau_1(\langle\tilde{A}'*X_i'\rangle)|+|\tau_1'^i-\tau_1(\langle\tilde{A}'*X_i'\rangle)|+\\ &+|\gamma_1|+|\gamma_1'|+|\delta_i|+|\delta_i'|<6\varepsilon.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$(17)\qquad \sum_{i=1}^{m-1}d_i|\tau_1^i-\tau_1'^i-\gamma_1+\gamma_1'-\delta_i+\delta_i'|<6\varepsilon\tilde{k},$$

où

$$(18)\qquad \tilde{k}=s(\langle\tilde{A}^**\tilde{B}^*\rangle).$$

La longueur $\tilde{k}$ de la courbe $\langle\tilde{A}^**\tilde{B}^*\rangle$ est la courbure intégrale de la courbe $\langle\tilde{A}*\tilde{B}\rangle$, définie par l'égalité

$$\tilde{k}=\lim_{W_m^*\to\langle\tilde{A}^**\tilde{B}^*\rangle}\sum_{i=1}^{m-1}d_i$$

donc

$$(19)\qquad \Big|\sum_{i=1}^{m-1}d_i-\tilde{k}\Big|\to 0.$$

Mais, comme la courbure de la courbe $\langle\tilde{A}*\tilde{B}\rangle$ est une fonction additive d'arc, on a:

$$(20)\qquad \tilde{k}=\sum_{i=1}^{m-1}k(\langle X_i*X_{i+1}\rangle).$$

De (19) et (20) on tire donc

$$\Big|\sum_{i=1}^{m-1}k(\langle X_i*X_{i+1}\rangle)-\sum_{i=1}^{m-1}d_i\Big|=\Big|\sum_{i=1}^{m-1}\big(k(\langle X_i*X_{i+1}\rangle)-d_i\big)\Big|\to 0,$$

d'où il résulte que

$$\sum_{i=1}^{m-1} |k(\langle X_i * X_{i+1}\rangle) - d_i| \to 0, \tag{21}$$

puisque les termes de la somme

$$\sum_{i=1}^{m-1} [k(\langle X_i * X_{i+1}\rangle) - d_i]$$

sont positifs (la longueur de l'arc est toujours au moins égale à la corde).

En profitant de (21) on obtient:

$$\sum_{i=1}^{m-1} |d_i - d_i'| \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} |d_i - k(\langle X_i * X_{i+1}\rangle)| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m-1} |k(\langle X_i * X_{i+1}\rangle) - k(\langle X_i' * X_{i+1}'\rangle)| + \sum_{i=1}^{m-1} |d_i' - k(\langle X_i' * X_{i+1}'\rangle)| \to 0.$$

d'où, en tenant compte de (17), on tire finalement

$$|x_m - x_m'| \to 0$$

quand

$$W_m^* \to \langle \tilde{A}^* * \tilde{B}^*\rangle, \quad W_m'^* \to \langle \tilde{A}'^* * \tilde{B}'^*\rangle.$$

Répétant le même raisonnement pour les coordonnées y_i, y_i' on obtient:

$$|y_m - y_m'| \to 0$$

quand

$$W_m^* \to \langle \tilde{A}^* * \tilde{B}^*\rangle, \quad W_m'^* \to \langle \tilde{A}'^* * \tilde{B}'^*\rangle.$$

Par conséquent

$$\tilde{B}^{**} = \tilde{B}'^{**}.$$

Nous avons ainsi démontré que les images sphériques $\langle \tilde{A}^* * \tilde{B}^*\rangle$, $\langle \tilde{A}'^* * \tilde{B}'^*\rangle$ des courbes $\langle \tilde{A} * \tilde{B}\rangle$, $\langle \tilde{A}' * \tilde{B}'\rangle$ se confondent, d'où il résulte que les courbes elles-mêmes sont congruentes.

Comme les points $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ et $\tilde{A}'$, $\tilde{B}'$ sont des points réguliers arbitraires des courbes $\langle A * B\rangle$, $\langle A' * B'\rangle$, en admettant que $\tilde{s}^0 \to 0$, $s^1 \to \tilde{s}^1$, on déduit des considérations précédentes que les courbes $\langle A * B\rangle$ et $\langle A' * B'\rangle$ se confondent comme limites d'arcs congruents, ce qui achève la démonstration du théorème.

REFERENCES

[1] Pauc, Ch., *Les méthodes directes en géométrie différentielle*, Paris 1941.

[2] Radziszewski, K., *Sur la courbure intégrale d'une classe de courbes*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 14 (1962), 19-40.

[3] Van der Wagg, E. J., *Sur les plans osculateurs*, I, II, Indagationes Mathematicae 14 (1952).

[4] Żmurek, A., *Sur la torsion intégrale du type* III, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 25 (1971).

STRESZCZENIE

W pracy tej zostały wprowadzone definicje uogólnionych skręceń integralnych drugich krzywizn integralnych typów III i I krzywej słabo regularnej zanurzonej w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej oraz podany został warunek ich równoważności. W oparciu o metodę podaną przez K. Radziszewskiego w [2] zostało wykazane, że długość łuku, krzywizna integralna i uogólnione skręcenie integralne typu I określają krzywą z dokładnością do położenia w przestrzeni.

РЕЗЮМЕ

В работе вводятся определения обобщенных интегральных кручений (вторых интегральных кривизн) типов III и I слабо регулярной кривой в трехмерном эвклидовом пространстве и определяется условие их эквивалентности. Применяя метод К. Радишевского [2] доказывается, что длина луча, интегральная кривизна и обощенное интегральное кручение определяют кривую с точностью до движения в пространстве.

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CU
VOL. XXV SECTIO A

UNIWERSYTET MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ
BIURO WYDAWNICTW
LUBLIN Plac Litewski 5 POLAND