ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XXVI, 6 SECTIO A 1972

Instytut Matematyki, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin

ADAM WÓJCIK

Über eine bestimmte Gleichung abstrakter Funktionen in lokal Konvexen Räumen

O pewnym równaniu dla abstrakcyjnych funkcji w przestrzeniach lokalnie wypukłych

О некотором уравнении для абстрактных функций в локально-выпуклых пространствах

Das Ziel dieser Arbeit ist eine Verallgemeinerung der Ergebnisse die sich in [1] befinden.

Jeder reellen Zahl $t \in \langle 0, \tau \rangle$, ordnen wir den linear topologischen lokal konvexen, folgen vollständigen Raum X_t zu, mit der Grundfamilie der stetigen Halbnormen $\{P_t\}$. Es sei für $\varepsilon > 0$ und $0 \leqslant t \leqslant \tau - \varepsilon$ eine lineare-stetige Operation $S(t, \varepsilon)\colon X_t \to X_{t+\varepsilon}$ und eine schlichte Abbildung $\varphi_{t,t-\varepsilon}$: $\{P_t\} \to \{P_{t-\varepsilon}\}$ gegeben. Es sei auch für $t \in \langle 0, \tau \rangle$ eine Abbildung $K_t\colon \{P_t\} \to R^+$ für $t \in \langle 0, \tau \rangle$ und $p \in \{P_t\}$ eine Abbildung $C_{t,p}\colon \{P_t\} \to R^+$ gegeben.

Wir nehmen folgende Voraussetzungen an:

A:

$$\varphi_{r,s} \cdot \varphi_{t,r}(p) = \varphi_{t,s}(p), \tag{1}$$

für $0 \leqslant s \leqslant r \leqslant t \leqslant \tau$ und $p \in \{P_t\}$.

$$\begin{gathered} K_{t-\varepsilon}(\varphi_{t,t-\varepsilon}(p)) = K_t(p) \\ p(S(t, \varepsilon)x) \leqslant (1 + K_{t+\varepsilon}(p)\varepsilon)\varphi_{t+\varepsilon,t}(p)(x) \end{gathered} \tag{2}$$

für $t \in \langle 0, \tau \rangle$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \tau - t$, $p \in \{P_{t+\varepsilon}\}$ und $x \in X_t$.

B: Für $t \in \langle 0, \tau \rangle$ und $p \in \{P_t\}$ gibt es eine konvexe, abgeschlossene, absorbierte und Null enthaltende Menge $Z_{t,p}$, so dass

$$S(t, \varepsilon)\colon Z_{t,p} \to Z_{t+\varepsilon,q}, \text{ wenn } p = \varphi_{t+\varepsilon,t}(q) \tag{3}$$

C:

$$p(S(t, \delta+\varepsilon)x - S(t+\delta, \varepsilon)S(t, \delta)x) \leqslant C_{t+\delta+\varepsilon,p} \cdot \delta \cdot \varepsilon. \tag{4}$$

gilt, für $p \in \{P_{t+\varepsilon+\delta}\}$, $t \in \langle 0, \tau\rangle$, $\varepsilon, \delta \geqslant 0$ $x \in Z_{t, \varphi_{t+\varepsilon+\delta, t}(p)}$ und $C_{t,p}$ erfüllt $C_{t,p} = C_{s, \varphi_{t,s}(p)}$. Die Transformation $\langle 0, \tau\rangle \ni t \to x(t) \in X_t$ heisst abstrakte Funktion (ab. F.).Definieren wir

$$\frac{D}{Dt} x(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [x(t) - S(t-\varepsilon, \varepsilon) x(t-\varepsilon)] \tag{5}$$

wenn diese Grenze existiert. Wir geben genügende Bedingungen an, damit die Gleichung

$$\frac{D}{Dt} x(t) = 0 \text{ aus } x(0) = a \in X_0 \tag{6}$$

in einer linearen Menge (ab. F.) nur eine Lösung hätte. Sei $s \in \langle 0, \tau\rangle$ und π: $0 \leqslant s = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_p = \tau$, $\delta_i = t_{i+1} - t_i$. Jeder Teilung π ordnen wir lineare Operation $T(\pi, s, t)$: $X_s \to X_t$ zu, sodass

$$T(\pi, s, t) x = S(t_k, t-t_k) S(t_{k-1}, \delta_{k-1}) \ldots S(t_0, \delta_0) x, \tag{7}$$

wenn $x \in X_s = X_{t_0}$ und $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$.

Lemma 1:

$$p\big(T(\pi, s, t)x\big) \leqslant e^{K_t(p)(t-s)} \varphi_{t,s}(p)(x), \tag{8}$$

fur $0 \leqslant s \leqslant t$, $x \in X_s$ *und* $p \in \{P_t\}$.

Beweis: Aus (1) und (2) haben wir

$$p\big(T(\pi, s, t)x\big) \leqslant \big(1 + K_t(p)(t-t_k)\big) \times$$
$$\times \big(1 + K_t(p)\delta_{k-1}\big) \ldots \big(1 + K_t(p)\delta_0\big) \varphi_{t,s}(p)(x) \leqslant e^{K_t(p)(t-s)} \varphi_{t,s}(p)(x).$$

wzbw.

Lemma 2:

$$p\big(S(t_n, \delta_n) S(t_{n-1}, \delta_{n-1}) \ldots S(t_0, \delta_0)x - S(t_0, \delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_n)x\big) \tag{9}$$
$$\leqslant C_{t_{n+1}, p} \cdot e^{K_{t_{n+1}}(p)(t_{n+1} - t_0)} (t_{n+1} - t_0)^2 \text{ für } x \in Z_{t_0}, \varphi_{t_{n+1}, t_0}(p)$$

Beweis: Es ist leicht zu sehen, dass

$$p\big(S(t_n, \delta_n) S(t_{n-1}, \delta_{n-1}) \ldots S(t_0, \delta_0)x - S(r_0, \delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_n)x\big)$$
$$\leqslant \big(1 + K_{t_{n+1}}(p)\delta_n\big) \varphi_{t_{n+1}, t_n}(p) \big(S(t_{n-1}, \delta_{n-1}) \ldots S(t_0, \delta_0)x -$$
$$- S(t_0, \delta_0 + \ldots + \delta_{n-1})x\big) + C_{t_{n+1}, p}(\delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_{n-1})\delta_n.$$

Da $\varphi_{t_{n+1}, t_1}(p)\big(S(t_0, \delta_0)x - S(t_0, \delta_0)x\big) = 0$, haben wir (Induktion)

$$p\big(S(t_n, \delta_n) S(t_{n-1}, \delta_{n-1}) \ldots S(t_0, \delta_0)x - S(t_0, \delta_0 + \ldots + \delta_{n-1})x\big)$$
$$\leqslant C_{t_{n+1}, p} \cdot e^{K_{t_{n+1}}(p)(t_{n+1} - t_0)} (t_{n+1} - t_0)^2.$$

wzbw.

Lemma 3: *Sei* $t_0 \in \langle 0, \tau\rangle$, $\pi\colon t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_p = \tau$ *und* $\sigma\colon t_n = s_1^n \leqslant s_2^n \leqslant \ldots \leqslant s_{r_n}^n = t_{n+1}$. *Setzen wir* $\delta_i = t_{i+1} - t_i$, $\delta_i^n = s_{i+1}^n - s_i^n$, $\Delta = \max\limits_i \delta_i$ *und*

$$x_{n+1} = S(t_n, \delta_n) S(t_{n-1}, \delta_{n-1}) \ldots S(t_0, \delta_0) x_0$$
$$y_{n+1} = S(s_{r_{n-1}}^n, \delta_{r_{n-1}}^n) \ldots S(s_1^n, \delta_1^n) y_n,$$

für $x_0 \in Z_{t_0}, \varphi_{t_n, t_0}(p)$. *Dann*

$$p(x_n - y_n) \leqslant C_{t_n, p} e^{K_{t_n}(p)\cdot\Delta} \Delta \cdot e^{K_{t_n}(p)(t_n - t_0)} (t_n - t_0) \tag{10}$$

für $p \in \{P_{t_n}\}$.

Beweis: Es gehören die Elemente x_n und y_n zur Menge $Z_{t_n}, \varphi_{t_{n+1}}, t_n(p)$. Dann aus (4) und (9) haben wir

$$p\big(y_{n+1} - S(t_n, \delta_n) y_n\big) \leqslant C_{t_{n+1}, p} e^{K_{t_{n+1}}(p)\delta_n} (\delta_n)^2.$$

Da $x_{n+1} = S(t_n, \delta_n) x_n$, haben wir

$$p(x_{n+1} - y_{n+1}) \leqslant p\big(y_{n+1} - S(t_n, \delta_n) y_n\big) + p\big(S(t_n, \delta_n)(y_n - x_n)\big)$$
$$\leqslant C_{t_{n+1}, p} e^{K_{t_{n+1}}(p)\cdot\delta_n} (\delta_n)^2 + (1 + K_{t_{n+1}}(p)\delta_n) \varphi_{t_{n+1}, t_n}(p)(x_n - y_n).$$

Weil $x_0 = y_0$, haben wir (Induktion)

$$p(x_n - y_n) \leqslant C_{t_n, p} \max_i e^{K_{t_n}(p)\delta_i} \prod_{i=0}^{n-1} (1 + K_{t_n}(p)\delta_i) \sum_{i=0}^{n-1} (\delta_i)^2$$
$$\leqslant C_{t_n, p} \cdot e^{K_{t_n}(p)\Delta} \cdot e^{K_{t_n}(p)(\delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_{n-1})} (\delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_{n-1}) \Delta$$
$$\leqslant C_{t_n, p} \cdot \Delta \cdot e^{K_{t_n}(p)\cdot\Delta} \cdot e^{K_{t_n}(p)(t_n - t_0)} (t_n - t_0).$$

wzbw.

Lemma 4: *Sei* $0 \leqslant s < \tau$, π *die Teilung* $\langle s, \tau\rangle$ σ *die Unterteilung* π, Δ *der Durchmesser* π. *Dann*

$$p\big(T(\pi, s, t)x - T(\sigma, s, t)x \tag{11}$$
$$\leqslant C_{t,p} \cdot \Delta \cdot e^{K_t(p)\cdot\Delta} (t - s) e^{K_t(p)(t-s)} (t - s), \text{ für } x \in Z_{s, \varphi_{t,s}(p)}.$$

Sei π_n *eine Folge der Teilungen, solcher dass* $\pi_n \subset \pi_{n+1}$ *und* $\Delta(\pi_n) \to 0$. *Für* $x \in \bigcap\limits_{p \in \{P_s\}} a_p Z_{s,p} \overset{\mathrm{df}}{=} Z_s$, *ist die Folge* $T(\pi_n, s, t)x$ *fundamental, weil*

$$p\big(T(\pi_n, s, t)x - T(\pi_m, s, t)x\big)$$
$$\leqslant 2C_{t,p} \cdot \Delta(\pi)_n \cdot e^{K_t(p)\Delta(\pi_n)} \cdot (t - s) \cdot e^{K_t(p)(t-s)} \text{ laut (11) gilt.}$$

Da der Raum X_t folgenvollständig ist, ist die Folge $T(\pi_n, s, t)x$ konvergent in der Topologie $\{P_t\}$ zu einem Element, das wir durch $T(s, t)x$ bezeichnen

$$T(s, t)x = \lim_{n\to\infty} T(\pi_n, s, t)x, \text{ für } x \in Z_s. \tag{12}$$

In (12) kann $x \in Z_s$ durch $x \in \mathrm{lin}(Z_s)$ ersetzt worden sein. Es ist auch wahr, dass

$$T(s,t)(Zs) \subset Z_t, \text{ und} \tag{13}$$

$$p\big(T(s,t)x\big) \leqslant e^{K_t(p)(t-s)}\varphi_{t,s}(p)(x), \tag{14}$$

für $x \in \mathrm{lin}(Z_s)$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \tau$.

Lemma 5: *Für* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \tau - \varepsilon$, $x \in Z_s$ *und* $\varepsilon \geqslant 0$ *ist*

$$p\big(S(t,\varepsilon)\cdot T(s,t)x - T(s,t+\varepsilon)x\big) \leqslant C_{t+\varepsilon,p}e^{K_{t+\varepsilon}(p)\varepsilon}\varepsilon^2 \tag{15}$$

wahr.

Beweis:

Es sei π: $0 \leqslant s = s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_{p+1} = t = t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_{n+1} = t+\varepsilon \leqslant t_{n+2} \leqslant \ldots \leqslant t_r = \tau$. Da $T(\pi, s, t)x \in Z_t$ und aus (9) erhalten wir

$$p\big(S(t,\varepsilon)T(\pi,s,t)x - T(\pi,s,t+\varepsilon)x\big) = p\big(S(t,\delta_1+\ldots+\delta_n)T(\pi,s,t) - \\ - S(t_n,\delta_n)\ldots S(t_1,\delta_1)T(\pi,s,t)x\big) \leqslant C_{t+\varepsilon,p}e^{K_{t+\varepsilon}(p)\varepsilon}\varepsilon^2.$$

Sei π_n die Folge der Teilungen, die die Punkte $s, t, t+\varepsilon$ enthalten so, dass $\Delta(\pi_n) \to 0$. Weil (15) für $T(\pi_n, s, t)x$ $(n = 1, 2, \ldots)$ wahr ist, ist auch für $T(s,t)x = \lim\limits_{n\to\infty} T(\pi_n, s, t)x$ wahr, weil die Operation $S(t,\varepsilon)$ linear und stetig ist.

Definition: (Ab. F.) $x(\cdot)$, $x(t) \in X_t$, *nennen wir gleichmässig differenzierbare Funktion* (**gl. diff. F.**), *wenn*

$$\bigwedge_{p\in\{P_t\}}\ \bigwedge_{\delta>0}\ \bigvee_{\bar\varepsilon>0}\ \bigwedge_{t\in\langle 0,\tau\rangle} \left(0 \leqslant \varepsilon \leqslant \bar\varepsilon \Rightarrow p\left(\frac{D}{Dt}x(t) - \varepsilon^{-1}[x(t) - S(t-\varepsilon,\varepsilon)x(t-\varepsilon)]\right) \leqslant \delta\right)$$

Alle (**gl. diff. F.**) *bilden linearen Menge.*

Lemma 6: *Wenn* $x(\cdot)$ (**gl. diff. F.**) *ist und* $\dfrac{D}{Dt}x(t) = 0$ *für* $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, *dann*

$$p\big(x(t_2)\big) \leqslant e^{K_{t_2}(p)(t_2-t_1)}\varphi_{t_2,t_1}(p)\big(x(t_1)\big). \tag{16}$$

Beweis: Sei $\delta \geqslant 0$ beliebig, wählen wir gewisses genügend grosses n so, dass $0 < \varepsilon \leqslant n^{-1}(t_2 - t_1)$, dann ergibt sich

$$p\left(\frac{1}{\varepsilon}[S(t-\varepsilon,\varepsilon)x(t-\varepsilon) - x(t)]\right) \leqslant \delta$$

Setzen wir $s_i = t_1 + \left(\frac{i}{n}\right)(t_2 - t_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\delta_i = s_{i+1} - s_i = \frac{1}{n}(t_2 - t_1)$. Aus (2) und (1) haben wir

$$p\big(x(s_{i+1}) - (1 + K_{s_{i+1}}(p)\,\delta_i)\varphi_{s_{i+1}, s_i}(p)(x(s_i))\big) \leqslant p\big(x(s_{i+1})\big) -$$

$$-p\big(S(s_i, \delta_i)x(s_i)\big) \leqslant p\big(S(s_i, \delta_i)x(s_i) - x(s_{i+1})\big) \leqslant \frac{1}{n}(t_2 - t_1)\,\delta.$$

daraus haben wir durch Induktion

$$p\big(x(t_2)\big) = p\big(x(s_n)\big) \leqslant \prod_{i=1}^{n-1}(1 + K_{t_2}(p)\,\delta_i)\varphi_{t_2, t_1}(p)\big(x(t_1)\big) +$$

$$+(n-1)n^{-1}(t_2 - t_1)\,\delta e^{K_{t_2}(p)(t_1 - t_1)} \leqslant e^{K_{t_2}(p)(t_2 - t_1)}\varphi_{t_2, t_1}(p)\big(x(t_1) +$$

$$+(t_2 - t_1)e^{K_{t_2}(p)(t_2 - t_1)}\big).$$

Da δ beliebig klein war, bekommen wir die These.

wzbw.

Satz 1: *Sei* $0 \leqslant s \leqslant \tau$, $a \in \operatorname{lin}(Z_s)$, *dann ist abstrakte Funktion* $x(t) = T(s, t)a$ *die Lösung in der Klasse der abstrakten gleichmässig differenzierbaren Funktionen.*

Beweis: Sei $a \in Z_s$, dann $T(s, t)a \in Z_t$, dann aus (15) haben wir, dass

$$\frac{D}{Dt}T(s, t)a = 0. \tag{17}$$

$T(s, t)a$ ist abstrakte, gleichmässig differenzierbare Funktion. Die Eindeutigheit bekommen wir aus Lemma 6. Der Übergang von Z_s, zu $\operatorname{lin}(Z_s)$ ist klar.

wzbw.

Bei den Voraussetzungen A, B, C geben wir Bedingungen für die Lösung der Gleichung $\frac{D}{Dt}x(t) = y(t)$ aus $x(0) = a \in X_0$, einziger in einer linearen Menge abstrakter Funktionen.

Satz 2: *Sei* $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant \tau$, $x \in \operatorname{lin}(Z_{t_1})$, *dann*

$$T(t_2, t_3)T(t_1, t_2)x = T(t_1, t_3)x \tag{18}$$

Beweis: Setzen wir $x(t) = T(t_1, t)x$, $y(s) = T(t_2, s)x(t_2)$. Dann wird

$$\frac{D}{Dt}x(t) = 0, \quad \frac{D}{Ds}y(s) = 0$$

$$y(t_2) = T(t_2, t_2)x(t_2) = x(t_2)$$

aus Satz 1 erhalten wir $x(t) = y(t)$ für $t_2 \leqslant t \leqslant \tau$

$$T(t_2, t)T(t_1, t_2)x = T(t_1, t)x$$

Der Übergang zum Fall $x \in \operatorname{lin}(Z_{t_1})$ macht keine Schwierigkeiten.

wzbw.

Satz 3: *Sei* $t_1 \in \langle 0, \tau\rangle$, $y(t) \in Z_{t_1}$, $t \geqslant 0$. *Wenn die Ableitung* $d^- y(t) = \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}[y(t-\varepsilon) - y(t)]$ *in* X_{t_1} *existiert hinsichtlich der Topologie* $\{P_{t_1}\}$, *dann* $\frac{D}{Dt} T(t_1, t)y(t)$ *existiert auch und wir haben*

$$\frac{D}{Dt} T(t_1, t)y(t) = T(t_1, t)d^- y(t). \tag{19}$$

Beweis: Laut (18) für $\varepsilon > 0$ gilt

$$p\left(\frac{1}{\varepsilon}[S(t-\varepsilon, \varepsilon)T(t_1, t-\varepsilon)y(t-\varepsilon) - T(t_1, t)y(t)] - \right.$$
$$\left. - T(t_1, t)\left\{\frac{1}{\varepsilon}[y(t-\varepsilon) - y(t)]\right\}\right) = p\left(\frac{1}{\varepsilon}[S(t-\varepsilon, \varepsilon) - \right.$$
$$\left. - T(t-\varepsilon, t)]T(t_1, t-\varepsilon)y(t-\varepsilon)\right) \leqslant C_{t,p} e^{K_t(p)\varepsilon} \cdot \varepsilon.$$

Diese Ungleichung bekommt man aus des Lemma 5, wenn man $T(t_1, t-\varepsilon)$ $y(t-\varepsilon)$ anstatt x und $t-\varepsilon$ anstatt t setzt. Man kann Lemma 5 anwenden, weil $y(t) \in Z_{t_1}$ und laut (14) ergibt sich $T(t_1, t-\varepsilon)y(t-\varepsilon) \in Z_{t-\varepsilon}$ Die ergebene Ungleichung gibt die These des Satzes, weil $T(t_1, t)$ (13) erfüllt.

wzbw.

Definition: *Die abstrakte Funktion* $x(\cdot)$, $x(t) \in X_t$ *nennen wir gleichmässig T-stetig, wenn sie die Bedingung*

$$\bigwedge_{p \in \{P_{t+\varepsilon}\}} \bigwedge_{\delta > 0} \bigvee_{v > 0} [(0 \leqslant \varepsilon \leqslant v) \rightarrow p(x(t+\varepsilon) - T(t, t+\varepsilon)x(t)) \leqslant \delta].$$

Bezeichnen wir M als eine Menge der abstrakten gleichmässig T-stetigen Funktionen $x(\cdot)$, sodass $x(t) \in Z_t$ für $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Sei $y \in M$, dann die abstrakte Funktion $z(s) = T(s, t)y(s)$, die für ein festgestelltes t, als eine Funktion der Variable s betrachtet ist, hat ihre Werte im festgestellten Raum X_t und ist auch in der Topologie $\{P_t\}$ stetig. Laut dieses existiert das Integral $\int\limits_0^t T(s, t)y(s)ds$.

Satz 4: *Wenn die abstrakte Funktion $y(\cdot) \in M$, dann ist die abstrakte Funktion $\int_0^t T(s,t)y(s)ds$ gleichmässig differenzierbar und*

$$\frac{D}{Dt}\int_0^t T(s,t)y(s)ds = y(t)$$

Beweis: Sei $\delta > 0$, weil $y(\cdot)$ gleichmässig T-stetig ist, also $v > 0$ sodass für $t-\varepsilon \leqslant s \leqslant t$

$$p\big(T(s,t)y(s) - y(t)\big) \leqslant \frac{\delta}{2} \qquad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant v)$$

Setzen wir $\varepsilon_1 = \min\big(v, \ (2C_{t,p}\cdot\tau\cdot e^{K_t(p)\tau})^{-1}\delta\big)$. Wenn die Voraussetzung $y(\cdot) \in M$, $y(s) \in Z_s$ ziecht, haben wir laut (13) anwenden. Wir setzen jetzt $T(s, t-\varepsilon)y(s)$ anstatt x und bekommen die Ungleichung, die für $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ wahr ist.

$$p\left(\frac{1}{\varepsilon}\Big\{\int_0^t T(s,t)y(s)ds - S(t-\varepsilon,\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} T(s,t-\varepsilon)y(s)ds\Big\} - y(t)\right)$$

$$\leqslant p\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t-\varepsilon}[T(t-\varepsilon,t) - S(t-\varepsilon,\varepsilon)T(s,t-\varepsilon)y(s)ds\right) +$$

$$+ p\left(\frac{1}{\varepsilon}[T(s,t)y(s) - y(t)]ds \leqslant \varepsilon^{-1}(t-\varepsilon)C_{t,p}e^{K_t(p)\varepsilon}\varepsilon^2 +\right.$$

$$\leqslant \tau\cdot C_{t,p}e^{K_t(p)\tau}\varepsilon_1 + \frac{\delta}{2} \leqslant \delta$$

wzbw.

Satz 5: *Sei $y(\cdot) \in M$, $a \in Z_0$, dann ist die abstrakte Funktion $x(t) = \int_0^t T(s,t)y(s)ds + T(0,t)a$ die einzige Lösung der Gleichung*

$$\frac{D}{Dt}x(t) = y(t), \ x(0) = a$$

in der Klasse der abstrakten gleichmässig differenzierbaren Funktionen.

Beweis: Der erste Teil unserer Folgerung ergibt sich aus Satz 4, die Eindeutigkeit ist die Konsequenz des Lemmas 6 die oben definirte abstrakte Funktion ist laut des Satz 4 und Lemmas 5 gleichmässig differenzierbar.

wzbw.

SCHRIFTTUM

[1] Leżański, T., *Sur l'integration directe des équations d'evolution*, Studia Math. 31 (1970), 149-163.

[2] Yoshida, K., *Functional Analysis*, Berlin 1966.

STRESZCZENIE

W pracy tej przenosimy pewne wyniki znajdujące się w [1] na przypadek przestrzeni liniowo topologicznych lokalnie wypukłych. Rozpatrujemy równanie $\frac{D}{Dt}x(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}[S(t-\varepsilon,\ \varepsilon)x(t-\varepsilon)-x(t)] = 0$ $\left(\frac{D}{Dt}x(t) = y(t)\right)$, z warunkiem początkowym $x(0) = a \in X_0$ w pewnym liniowym zbiorze funkcji abstrakcyjnych.

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе переносятся некоторые результаты работы [1] на случай линейно-топологичного локально-выпуклого пространства. Рассматривается уравнение

$$\frac{D}{Dt}x(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}[s(t-\varepsilon,\varepsilon)x(t-\varepsilon)-x(t)] = 0, \left(\frac{D}{Dt}x(t) = y(t)\right)$$

с начальным условием $x(0) = a \in X_0$, в некотором линейном множестве абстрактных функций.