ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA

VOL. XXII/XXIII/XXIV, 13 SECTIO A 1968/1969/1970

Педагогический институт, Каменец-Подольский, СССР

ФЁДОР Г. КРАВЧЕНКО

Области абсолютной сходимости рядов, представляющих K_{ml_i} - функции многих параметров

Obszary zbieżności absolutnej szeregów przedstawiających K_{ml_i} — funkcje wielu parametrów

Domains of Absolute Convergence for Series Expressing K_{ml_i} — functions of Several Parameters

В работах [1], [2] показано, что нули произвольного полинома аналитически выражаются через его коэффициенты с помощью K_{ml_i}-функций.

K_{ml_i} — функции от многих параметров для произвольного полинома, записанного в виде

$$L(Z)=Z^m+\sum_{i=1}^{\mu-2}P_{m-l_i}Z^{l_i}+P_m,\ m>l_1>l_2>\ldots>l_{\mu-2};\ \mu\leqslant m+1, \tag{1}$$

определяются рядами

$$\underset{i=l}{\overset{\mu-2}{K_{ml_i}}}(\alpha_{ml_i})=1+$$

$$+\sum_{i=1}^{\mu-2}\alpha_{ml_i}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\substack{r_1,r_2,\ldots,r_{\mu-2}=0\\ r_1+r_2+\ldots+r_{\mu-1}=n}}^{n}\prod_{i=1}^{\mu-2}\frac{\alpha_{ml_i}^{r_i}}{r_i!}\prod_{\nu=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{\mu-2}r_il_i+1-\nu m\right) \tag{2}$$

и рядами, полученными из (2) путем применения к индексам K_{ml_i} — функций и индексам параметров определенных систем подстановок [3].

В связи с этим значительный интерес представляет задача нахождения областей абсолютной сходимости рядов (2).

Эту задачу будем решать путем приведения K_{ml_i} — функций к обобщенным гипергеометрическим функциям многих комплексных переменных с последующим применением аналогов классических признаков абсолютной сходимости обычных рядов на случай кратных степенных рядов.

В работе [4] показано, что K_{ml_i} — функции многих параметров можно представить конечной суммой обобщенных гипергеометрических функций вида

$$\overset{\mu-2}{\underset{i=1}{F}}(a_{ml_i}) = \sum_{r_1, r_2, \ldots, r_{\mu-2}=0}^{\infty} \times$$

$$\times \frac{m^{\sum\limits_{i=1}^{\mu-2}(r_i m+t_i)-1} \Gamma\left[\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{\mu-2}(r_i m+t_i)\, l_i + \frac{1}{m}\right] \prod\limits_{i=1}^{\mu-2} a_{ml_i}^{r_i m+t_i}}{\prod\limits_{i=1}^{\mu-2}(r_i m+t_i)!\, \Gamma\left[\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{\mu-2}(r_i m+t_i)\, l_i + \frac{1}{m} + 1 - \sum\limits_{i=1}^{\mu-2}(r_i m+t_i)\right]}. \qquad (3)$$

Поэтому абсолютная сходимость рядов (2) определяется абсолютной сходимостью рядов (3).

Применяя вышеуказанные аналоги признаков абсолютной сходимости к рядам (3), получим

$$\left| a_{ml_j}^{m} K_{ji}^{-m} \Big(\sum_{\gamma=1}^{\mu-2} K_{\gamma i} l_\gamma\Big)^{l_j} \Big[\sum_{\gamma=1}^{\mu-2} K_{\gamma i}(m-l_\gamma)\Big]^{m-l_j} \right| < 1;\ j, i = 1, 2, \ldots, \mu-2;$$

$$0 \leqslant K_{ji} \leqslant 1. \qquad (4)$$

Сопряженные радиусы R_j абсолютной сходимости рядов (2) удовлетворяют системе равенств

$$R_j^m K_{ji}^{-m} \Big(\sum_{\gamma=1}^{\mu-2} K_{\gamma i} l_\gamma\Big)^{l_j} \Big[\sum_{\gamma=1}^{\mu-2} K_{\gamma i}(m-l_\gamma)\Big]^{m-l_j} = 1;\ j, i = 1, 2, \ldots, \mu-2;$$

$$K_{ji} = 1 \text{ при } i = j. \qquad (5)$$

Исключая из (5) коэффициенты $K_{\gamma i}$ при фиксированном i, получим функциональную зависимость между R_j ($j = 1, 2, \ldots, \mu-2$) в форме определителя

$$\Delta(R_1, R_2, \ldots, R_{\mu-2}) = 0. \qquad (6)$$

Главная диагональ этого определителя $(m+l_1)$-го порядка состоит из элементов

$$a_{ii} = \begin{cases} +1 & \text{при } \quad i = 1, 2, \ldots, l_1 \\ -1 & \qquad\quad i > l_1. \end{cases}$$

Элементами $(m-l_\gamma)$-ой ($\nu = 1, 2, \ldots, \mu-2$) верхней поддиагонали являются

$$a_{i, m-l_\gamma+i} = \begin{cases} -R_\gamma l_\gamma & \text{при } \quad i = 1, 2, \ldots, l_1 \\ 0 & \qquad\quad i > l_1. \end{cases}$$

l_ν-ая ($\nu = 1, 2, \ldots, \mu-2$) нижняя поддиагональ содержит элементы

$$a_{l_\nu+j,j} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots, l_1 - l_\nu \\ (m-l_\nu) R_\nu & \qquad j > l_1 - l_\nu . \end{cases}$$

Элементы всех остальных поддиагоналей равны нулю.

Принимая во внимание (4), (6), нетрудно показать, что для всех точек $P_k(a_{ml_1}^{(k)}, a_{ml_2}^{(k)}, \ldots, a_{ml_{\mu-2}}^{(k)})$ пространства $C^{\mu-2}$, удовлетворяющих системе неравенств (4), имеет место соотношение

$$(-1)^m \Delta(|a_{ml_1}^{(k)}|, |a_{ml_2}^{(k)}|, \ldots, |a_{ml_{\mu-2}}^{(k)}|) > 0 . \tag{7}$$

Неравенство (7) определяет некоторую звездную область пространства $C^{\mu-2}$, являющуюся областью абсолютной сходимости ряда (2).

Области абсолютной сходимости рядов, определяющих другие функциональные элементы полной $\underline{\overline{K}}_{ml_i}$ — функции многих параметров, можно получить из (7) путем его преобразования с помощью известных систем подстановок.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кравченко Ф. Г., *Аналитические функции корней полиномов и их свойства. Представление корней полиномов с помощью Kml_i — функций*, УМЖ, т. 21, По 6, 1969.

[2] Кравченко Ф. Г., ДАН УРСР, сер. А, 692 (1968).

[3] Кравченко Ф. Г., *Об аналитических функциях корней полиномов*. Вычислительная и прикладная математика. 7. Изд-во Киевского университета, 1969.

[4] Кравченко Ф. Г., ДАН УРСР, сер. А, 809 (1968).

STRESZCZENIE

W pracy tej znaleziono obszary absolutnej zbieżności szeregów przedstawiających K_{ml_i} — funkcje wielu parametrów.

Otrzymano zależność funkcyjną między sprzężonymi promieniami zbieżności absolutnej tych szeregów.

SUMMARY

In this paper the domains of absolute convergence of series representing the K_{ml_i} functions of several parameters are determined. The relations between the conjugate radii of absolute convergence are found.