ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA
VOL. XXI, 3 SECTIO A 1967

Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego

KRZYSZTOF TATARKIEWICZ

Sur la notion de l'équivalence des liaisons

O pojęciu równoważności więzów

О понятии эквивалентности связей

1. Introduction. Dans chaque traité de Mécanique – un peu plus grand – on trouve la phrase suivante: "*Le point* $P = (x_1, x_2, x_3)$ *est assujetti aux liaisons non holonomes*

(1,1) $$f(t; x_1, x_2, x_3; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = 0$$

si ces dernières ne sont pas équivalentes à aucune condition

(1,2) $$g(t; x_1, x_2, x_3) = 0".$$

Cependant la notion de l'équivalence n'étant pas assez précise, la phrase citée peut évoquer bien de doutes. Nous aussi nous avons employé (voir [8], p. 61) la notion de l'équivalence sans la préciser.

Cette note est consacrée à une analyse de cette notion. Nous croyons démontrer que le problème est bien plus compliqué qu'on ne l'admet généralement.

2. L'équivalence (*M*). Soient des fonctions

$$f_{ij} = f_{ij}(t; x_1, \ldots, x_{3n}; y_1, \ldots, y_{3n}; z_1, \ldots, z_{r_j}), \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, k_j \\ j = 1, 2, \ldots \end{array}$$

définies et de classe C^2 dans certains domaines.

Soit un ensemble de n points $P^i = (x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i})$, $i = 1, \ldots, n$. S'il existe un ensemble de constantes $\tilde{c}_1^{(1)}, \ldots, \tilde{c}_{r_1}^{(1)}; \tilde{c}_1^{(2)}, \ldots, \tilde{c}_{r_2}^{(2)}; \ldots$ tel que pour chaque $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ il existe un j tel que l'on a

$$f_{ij}(t; x_1(t), \ldots, x_{3n}(t); \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_{3n}(t); \tilde{c}_1^{(j)}, \ldots, \tilde{c}_{r_j}^{(j)}) \equiv 0$$

$i = 1, \ldots, k_j$ pour $t \in \langle \tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \rangle \subset \langle t_1, t_2 \rangle$ (où $\tilde{t}_1 < \tilde{t}_2$), nous dirons que le mouvement $x_i = x_i(t)$ $i = 1, \ldots, 3n$ est conforme aux liaisons L formées par les conditions: ou

$$(2,1\text{–}1) \qquad f_{i1}(t; x_1, \ldots, x_{3n}; \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{3n}; c_1^{(1)}, \ldots, c_{r_1}^{(1)}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, k_1,$$

ou

$$(2,1\text{–}2) \qquad f_{i2}(t; x_1, \ldots, x_{3n}; \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{3n}; c_1^{(2)}, \ldots, c_{r_2}^{(2)}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, k_2,$$

ou

. . . .

Ces liaisons seront appelées aholonomes. Pour faciliter les énoncés, nous nous bornons ici aux liasons qui ne dépendent que du temps, des positions et des vitesses.

Les liaisons L (c'est-à-dire) les conditions (2,1) definissent une classe de mouvements C^2 d'un système de points, conforme à ces liaisons. Nous allons l'appeller classe des mouvements conformes aux liaisons L.

Définition 1. *Si un système de points S admet comme classe de tous les mouvements possibles la classe de mouvements conformes aux liaisons L, nous dirons que le système S est assujetti aux liaisons L.*

Soient d'autres fonctions

$$\bar{f}_{ij} = \bar{f}_{ij}(t; x_1, \ldots, x_{3n}; y_1, \ldots, y_{3n}; z_1, \ldots, z_{\bar{r}_j}), \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, \bar{k}_j \\ j = 1, 2, \ldots \end{array}$$

De même que ci-dessus, en partant de ces fonctions nous pouvons dire quand est-ce qu'un mouvement du système S est conforme aux liaisons $\bar{L}$: ou

$$(2,2\text{–}1) \qquad \bar{f}_{i1}(t; x_1, \ldots, x_{3n}; \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{3n}; c_1^{(1)}, \ldots, c_{\bar{r}_1}^{(1)}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, \bar{k}_1,$$

ou

$$(2,2\text{–}2) \qquad \bar{f}_{i2}(t; x_1, \ldots, x_{3n}; \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{3n}; c_1^{(2)}, \ldots, c_{\bar{r}_2}^{(2)}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, \bar{k}_2,$$

ou

. . . .

et quand est-ce que ce système S est assujetti aux liaisons $\bar{L}$.

Définition 2. *Si la classe des mouvements conformes aux liaisons L est la même que la classe des mouvements conforme aux liaisons $\bar{L}$ (c'est-à-dire si un mouvement conforme aux liaisons L est aussi conforme aux liaisons $\bar{L}$ et inversement), nous dirons que les liaisons L et $\bar{L}$ du système S sont équivalentes (M)(dans un ensemble donné).*

Définition 3. *Si un système est assujetti aux liaisons* K:

$$\begin{array}{lll} ou & g_{i1}(t; x_1, \ldots, x_{3n}; c_1^{(1)}, \ldots, c_{r_1}^{(1)}) = 0, & i = 1, \ldots, k_1, \\ ou & g_{i2}(t; x_1, \ldots, x_{3n}; c_1^{(2)}, \ldots, c_{r_2}^{(2)}) = 0, & i = 1, \ldots, k_2, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array} \tag{2,3}$$

ou bien il est assujetti aux liaisons équivalentes (M) *à* K, *nous dirons qu'il est assujetti aux liaisons holonomes* (M). *Dans le cas contraire nous dirons qu'il est assujetti aux liaisons non holonomes* (M).

3. Une remarque. Pour simplifier nos énoncés dans ce paragraphe nous n'allons considérer qu'une seule condition (2,3) ne dépendant pas de t et des c_i. C'est-a-dire des liaisons

$$g(x_1, \ldots, x_{3n}) = 0 \tag{3,1}$$

où les coordonnées des n points du système $P^\nu = (x_{3\nu-2}, x_{3\nu-1}, x_{3\nu})_V$ sont considerées dans un système de référence V.

Nous designérons par R_N l'espace cartésienne à N dimensions, c'est-à-dire l'espace des points $(x_1, \ldots, x_N)_V$ dans laquelle l'introduction d'un système de reférence W à la place du système V se fait à l'aide d'une transformation linéaire

$$x_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} X_j + b_i \qquad i = 1, \ldots, N \tag{3,2}$$

où la $N \times N$ matrice réelle a_{ij} est orthogonale propre (c'est-à-dire que $\det|a_{ij}| = +1$) ou bien orthogonale.

Si nous voulons construire une mécanique dont les formules sont invariantes aux mouvements du système referentiel, nous ne pouvons pas considérer la fonction g comme une fonction du point de l'espace R_{3n}, c'est-à-dire que la condition

$$G(X_1, \ldots, X_{3n}) = 0$$

où

$$G(X_1, \ldots, X_{3n}) \equiv g(x_1, \ldots, x_{3n})|_{x_i = \sum_{j=1}^{3n} a_{ij}X_j + b_i}$$

ne nous fournira pas des liaisons équivalentes (M) aux liaisons fournies par la condition (3,1) mais comme une fonction de n points de l'espace R_3, c'est-à-dire qu'à la place de (3,2) nous devons employer la transformation

$$x_{3\nu-3+i} = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} X_{3\nu-3+j} + B_i, \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \\ \nu = 1, \ldots, n \end{array}$$

qui introduit "le même" nouveau systeme de référence W dans chacun des espaces R_3 des variables $(x_1, x_2, x_3), (x_4, x_5, x_6), \ldots, (x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n})$.

L'espace correspondant à une telle transformation pourrait être appellé l'espace R_3^n.

De ce point de vue la symbolique traditionelle

$$g(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}, x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}) = 0$$

—quoique plus longue—est préférable.

4. Quelques exemples. Considérons quelques exemples d'équivalence des liaisons.

4,1A. Les liaisons "$\dot{x}_1^2 = 0$" à sont équivalentes (M) "$x_1 - c_1 = 0$".

4,1B. Les liaisons "$\dot{x}_1^2 + x_1^2 = 0$" sont équivalentes (M) à "$x_1 = 0$".

4,1C. Les liaisons "$\dot{x}_1^2 - k^2 = 0$" à sont équivalentes (M) "$x_1 + k = 0$ ou $x_1 - k = 0$".

4,1D. Les liaisons "$\dot{x}_1^2 + x_2^2 = 0$" sont équivalentes (M) à "$x_1 = 0$, $x_2 = 0$".

4,2A. Posons

$$f(t; x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} y_1 + x_2 y_3 \exp - \dfrac{1}{x_1^2} & \text{pour } x_1 > 0 \\ y_1 & \text{pour } x_1 \leqslant 0 \end{cases}$$

La fonction f a des dérivées de tous les ordres et elle est linéaire en variables y_1, y_2, y_3. Considérons les liaisons

$$\text{(4,1)} \qquad \text{“}f(t; x_1, x_2, x_3; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = 0\text{”}.$$

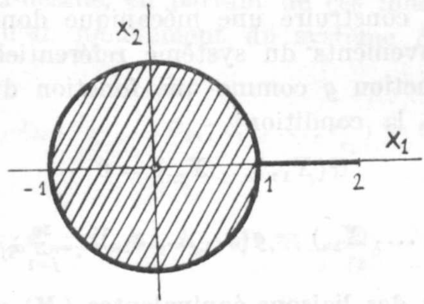

Fig. 1

Pour $x_1 \leqslant 0$ ces liaisons sont équivalentes (M) à $x_1 - c_1 = 0$, donc sont holonomes, mais pour $x_1 > 0$ —comme il est facile à voir— elles ne vérifient pas les conditions d'intégrabilité (voir — par exemple — [4], p. 311), donc — vu la Definition 3 — sont non holonomes.

4,2B. En partant de l'exemple 4,2A il est facile de construire une fonction $f_1 = f_1(t; x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$ telle que les liaisons $f_1(t; x_1, x_2, x_3;$

$\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = 0$ sont de classe D^∞ et holonomes dans une infinité de domaines disjoints de l'espace (x_1, x_2, x_3) et non holonomes dans d'autres.

4,3. Considérons les liaisons

$$“x_1^2+x_2^2-1 \leqslant 0, x_3 = 0 \text{ ou } 1 \leqslant x_1 \leqslant 2, x_2 = 0, x_3 = 0”$$

Pour les points tels que $x_3 = 0, x_1^2+x_2^2 < 1$ ces liaisons ont un autre caractère que dans les points tels que $x_3 = 0, x_1^2+x_2^2 = 1$ ou bien tels que $x_2 = 0 = x_3, 1 < x_1 < 2$, enfin ils ont encore un autre caractère dans les points $(1, 0, 0)$ et $(2, 0, 0)$ (voir fig. 1).

4,4A. Les liaisons aholonomes scléronomes

$$“\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2-v^2 = 0, \quad \dot{x}_3-k = 0”$$

où $0 < k < v$ sont équivalentes (M) aux liaisons aholonomes scléronomes

$$“\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2-(v^2-k^2) = 0, \quad \dot{x}_3-k = 0”$$

et au couple de liaisons: holonome rhéonome, non scléronome et aholonome scléronome

$$“\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2-(v^2-k^2) = 0, \quad x_3-kt-c = 0”.$$

4,4B. Les liaisons aholonomes

$$“\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2-v^2 = 0, \quad \dot{x}_1+x_2\dot{x}_3\exp-\frac{1}{x_1^2} = 0”$$

sont formées d'une condition non linéaire aholonome et d'une condition linéaire non intégrable. Est-ce que ces conditions peuvent être équivalentes (M) à une condition holonome et une condition non holonome?

4,4C. Les liaisons aholonomes

$$“\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2-v^2 = 0, \quad \dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2-3\dot{x}_3^2 = 0”$$

sont équivalentes (M) aux liaisons

$$“2\dot{x}_3-v = 0, \quad 4\dot{x}_1^2+4\dot{x}_2^2-3v^2 = 0$$

ou

$$2\dot{x}_3+v = 0, \quad 4\dot{x}_1^2+4\dot{x}_2^2-3v^2 = 0”$$

donc aussi aux liaisons

$$“2x_3-vt-c_1 = 0, \quad 4\dot{x}_1^2+4\dot{x}_2^2-3v^2 = 0$$

ou

$$2x_3+vt-c_2 = 0, \quad 4\dot{x}_1^2+4\dot{x}_2^2-3v^2 = 0”.$$

5. Conséquences. L'exemple 4, 1A montre qu'il est indispensable de considérer des liaisons contenant des constantes arbitraires (elles peuvent — évidemment — être implicites et “cachées” dans le symbole “f” — voir Lurie [5], p. 13).

On pourrait obtenir une condition ne contenant pas de constantes, si on choisissait des conditions initiales convenables (elles ne peuvent pas être arbitraires dans le cas général — voir ci-dessous). Dans mon travail [8], en poursuivant d'autres buts nous avons mis les forces agissantes $\boldsymbol{F}$ et la réalisation des liaisons $\boldsymbol{T}$ en avant des conditions initiales. Cela correspond mieux aux applications de la dynamique, car les conditions initiales se rattachent aux liaisons directement (mais elles sont une notion appartenanat à la cinématique).

L'exemple 4,1B montre qu'il est indispensable de considérer comme liaisons des conditions ayant forme d'alternative (voir aussi l'exemple 4,3).

Les exemples 4,2 (liaisons non holonomes) et 4,3 (liaisons holonomes) montrent qu'en général on ne peut considérer l'équivalence des liaisons que localement (c'est le point de vue que nous avons adopté dans notre travail [6]).

Les exemples 4,4 nous seront utiles au § 14.

6. Une généralisation. Soit un système de points. Si chaque mouvement C^2 de ce système appartenant à une classe W de mouvement est conforme aux liaisons L nous dirons que ce système est assujetti à ces liaisons L relativement à cette classe W de mouvements. De même, on peut definir l'équivalence (M) des liaisons d'un système relativement à une classe de mouvements.

Exemple 6,1. Soit un point (x_1, x_2, x_3). Ses liaisons banales (c'est-à-dire il manque des liaisons de forme (2,1) — voir [8]) ne sont pas équivalentes (M) aux liaisons

$$(x_1 - c_1)\cos c_3 - (x_2 - c_2)\sin c_3 = 0. \tag{6,1}$$

Soit W la classe de mouvements $x_i = x_i(t)$ tels que $\ddot{x}_1(t) = 0 = \ddot{x}_2(t)$. Chaque mouvement de notre point appartenant à W est conforme aux liaisons (6,1). Donc les liaisons banales sont équivalentes (M) aux liaisons (6,1) relativement à la classe W. Considérons — conformement aux résultats de la dynamique — notre point comme se mouvant sous l'influence d'une force F_i où $F_1 = 0 = F_2$. Alors, il est facile à voir que notre point forme un système pseudo-libre dans le sens de la définition donnée dans [8] p. 62.

De même ont peut introduire la notion des liaisons holonomes relativement à une classe donnée des mouvements. Par exemple un système pseudo-holonome (sa definition est donnée dans [8] p. 62) est un système $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{I}$ non holonome assujetti aux liaisons holonomes relativement à la classe des mouvements possibles sous l'influence des forces $\boldsymbol{F}$ et des réactions générées par la réalisation $\boldsymbol{T}$ des liaisons (pour exemple concret voir [8], p. 64).

7. Une autre notion de l'équivalence. La notion de l'équivalence des liaisons est chez presque tous les Auteurs définie (presque exclusivement d'une façon implicite) d'une autre manière. Nous ne nous posons pas comme but de donner cette autre définition dans toute sa généralite et tout à fait rigoureusement. Car pour le faire il faudrait considérer non seulement les derivées d'ordres supérieurs et préciser les domaines d'existance des fonctions employées, mais aussi construire la classe des opérations analytiques qui conduisent d'une proposition à une autre équivalente. Intuitivement il s'agirait de construire toutes les opérations analytiques — de classe, par exemple, C^2 — qui conduisent des conditions (2,1) aux conditions (2,2) et telles que pour chaque système de constantes $c_k^{(1)}$ (s'il y a des constantes) l'ensemble des points de l'espace des états $(t;\ x_1, \dots, x_{3n};\ \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{3n})$ défini par les conditions (2,1) est le même que l'ensemble défini par les conditions (2,2) pour un des systèmes des constantes $C_k^{(2)}$.

Dans cette définition on emploie (d'ordinaire implicitamment) une opération que nous avons designée par D^1 et définie dans le travail [6], p. 6 (dans le manuel [10] nous employons une notation un peu différente). En précisant ce que signifie qu'elle conduit d'une condition à une autre équivalente nous pouvons dire qu'il nous est permis de substituer à la condition

$$g(t;\ x_1, \dots, x_{3n}) = 0 \tag{7,1}$$

la condition

$$D^1(t;\ x_1, \dots, x_{3n};\ \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{3n})\, g(t;\ x_1, \dots, x_{3n}) = 0 \tag{7,2}$$

où par définition on à (voir [6], p. 6)

$$D^1(t;\ x_1, \dots, x_{3n};\ v_1, \dots, v_n)\, g(t;\ x_1, \dots, x_{3n}) =$$

$$\stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial g}{\partial t}(t;\ x_1, \dots, x_{3n}) + \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(t;\ x_1, \dots, x_{3n})\, v_i \tag{7,3}$$

et inversement on peut substituer la condition

$$g(t;\ x_1, \dots, x_{3n}) - c = 0$$

à la condition (7,2). Si les conditions initiales sont données, alors à (7,2) peut être équivalente même la condition (7,1) — c'est-à-dire une condition, qui ne contient pas de constantes indéterminées.

Maintenant nous pouvons procéder à l'énoncé de cette — pas tout à fait rigoureuse — definition:

Definition 4. *Nous dirons que les liaisons L définies par les conditions* (2,1) *sont équivalentes* (A) *aux liaisons $\bar{L}$ définies par les conditions* (2,2) *si l'on peut passer des conditions* (2,1) *aux conditions* (2,2) *à l'aide des opérations suivantes*:

a) *opérations logiques*,

b) *opérations analytiques*,

et c) *de l'opération* D^1 *ou de son inverse.*

L'opération D^1 est specifique pour notre théorie, donc l'équivalence (A) sort au-dela de la notion d'équivalence considerée ordinairement dans l'Analyse—quand même pour la définition de l'équivalence (A) les traités de Mècanique renvoient (implicitemment) les lecteurs à l'Analyse. Il s'ensuit que la notion de l'équivalence des liaisons (qui est fondamentale pour toute la mécanique des systèmes assujettis aux liaisons) en réalité n'est pas définie et n'est employée qu'intuitivement.

Cela ne conduit pas aux erreurs car la plupart des Auteurs quoique ils definissent (plus ou moins implicitemment) l'équivalence dans le sens (A) n'emploient que l'équivalence dans le sens (M) qui est très intuitive (quoique cette dernière équivalence ne soit jamais définie d'une façon explicite). Cette substitution des équivalences est dans une certaine mesure tolérable, car si l'on fait des suppositions suffisamment fortes sur la regularité des fonctions envisagées, alors ces définitions conduisent à des notions indentiques (ou plus tôt qui devraient être identiques si la définition de l'équivalence (A) serait donnée d'une façon suffisamment précise).

Definition 5. *Si un système est assujetti aux liaisons équivalentes* (A) *aux liaisons* (2,3), *alors nous dirons qu'il est assujetti aux liaisons holonomes* (A). *Dans le cas contraire nous dirons qu'il est assujetti aux liaisons non holonomes* (A).

Évidemment, si un système est assujetti aux liaisons (2,3), alors il est aussi bien holonome (M) que holonome (A). Et si la condition

$$\sum_{i=1}^{3n} a_i(x_1, \ldots, x_{3n})\dot{x}_i = 0 \tag{7,4}$$

est non intégrable, alors elle fournit des liaisons non holonomes (M) et aussi des liaisons non holonomes (A).

D'ailleurs sous des suppositions suffisament fortes les notions de système holonome (M) et de système holonome (A) devraient être identiques.

8. Une condition nécessaire. Les liaisons holonomes d'un point ayant deux dégrés de liberté ont (localement) la forme la plus générale (1,2) où

$$\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial g}{\partial x_i}(t; x_1, x_2, x_3)\right]^2 > 0 \tag{8,1}$$

ou sont des liaisons équivalentes (A) à (1,2) (où g rérifie la condition (8,1)). En particulier, à ces liaisons seront équivalentes (A) les liaisons aholonomes

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t; x_1, x_2, x_3) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial x_i}(t; x_1, x_2, x_3)\dot{x}_i = 0. \tag{8,2}$$

Ces liaisons sont linéaires en $\dot{x}_i$. Il s'ensuit que la condition nécessaire pour que les liaisons (1,1) soient holonomes (A) de deux degrés de liberté dans un domaine, est qu'elles sont linéaires en $\dot{x}_i$, ou bien qu'elles sont équivalentes (A) aux liaisons de forme (7,4) pour $n = 1$. La condition suffisante pour que les liaisons (1,1) soient holonomes (A) est qu'elles ont la forme (8,2) (c'est une tres faible condition), ou bien qu'il sont équivalentes (A) aux liaisons de forme (8,2).

La généralisation de ces résultats aux systèmes et à d'autres dégrés de liberté est évidente.

9. Une propriété des systèmes non holonomes linéaires. Dans tous les traités de la Mécanique on donne comme propriété caractéristique des systèmes non holonomes qu'ils peuvent admettre toutes les positions possibles dans un ensemble G (de l'espace des $(x_1, \ldots, x_{3n})$), mais qu'ils ne peuvent admettre toutes les vitesses tangentes — c'est une suite immédiate de la définition des liaisons non holonomes acceptée. Cette proposition peut être formulée d'une autre manière "*le nombre des dégrés de liberté infinitesimales pour un système non holonome est plus petit que la nombre de dégrés de liberté intégrales et inversement*". Il résulte de cette proposition immédiatement que les liaisons (aholonomes non linéaires en $\dot{x}_i$) considérées dans le travail [7], à savoir

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 - v^2 = 0$$

ou $v > 0$ sont non holonomes.

Implicitamment on emploie une proposition plus forte, à savoir qu'un système non holonome ayant une position $x_1^{(1)}, \ldots, x_{3n}^{(1)}) \in G$ peut passer par un mouvement continu (dont nous ne pouvons rien supposer au sujet des accélérations, c'est-à-dire dans l'interprétation dynamique, qu'il est realisé sous l'influence des forces apropriées), dont la courbe de mouvement (c'est-à-dire l'ensemble des points $(x_1, \ldots, x_{3n}) \in R_{3n}$ parcouru par $x_i = x_i(t)$) est contenu dans G, dans chaque autre position $(x_1^{(2)}, \ldots, x_{3n}^{(2)}) \in G$. Évidement on ne donne pas des démonstrations de ce théorème plus fort. Évidemment, car jusqu'à present une telle démonstration n'est pas connue.

Cependant pour les liaisons non holonomes linéaires homogénes

$$\sum_{i=1}^{3n} a_i(x_1, \ldots, x_{3n})\dot{x}_i = 0$$

et localement (c'est-à-dire pour les $x_i^{(1)}$ suffisamment proches des $x_i^{(2)}$ ce théorème est vrai: c'est une suite immédiate du théorème fundamental de la thérmodynamique de Carathéodory (voir [3]) précisée dans mon travail [9], Théorème 1.

La généralisation de ce théorème de Carathéodory (voir [9], Théorème 3) est intéressante, car il en résulte que la courbe du mouvement peut être pourvue de tangente continue, donc que le mouvement de $(x_1^{(1)}, \ldots, x_{3n}^{(1)})$ à $(x_1^{(2)}, \ldots, x_{3n}^{(2)})$ peut se faire sans arrêts momentanés.

Il serait intéressant de savoir si a) ce théorème est valable aussi intégralement (ou sous quelles suppositions suplémentaires) et si b) il serait aussi vrai pour les liaisons non holonomes non nécessairement linéaires.

10. Les liaisons non holonomes non linéaires. À la question b) mentionnèe ci-dessus on peut donner une réponse partielle.

Soit un système de n points, assujetti au liaisons

$$f(t; x_1, \ldots, x_k; \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k) = 0 \tag{10,1}$$

où la fonction f est définie dans $R_1 \times G \times R_k$ et C^2. Nous écrivons k et non $3n$, car nous voulons englober ici aussi des systèmes assujettis aux liaisons holonomes supplémentaires (par exemple assujettis aux liaisons $x_3 = 0$).

Nous allons appeler figuratrice de ces liaisons au moment $t = t^0$ et au point $(x_1^0, \ldots, x_k^0)$ l'hypersurface

$$f(t^0; x_1^0, \ldots, x_k^0; y_1, \ldots, y_k) = 0$$

de l'espace $(y_1, \ldots, y_k)$ de k dimensions.

Definition 6. *Nous dirons que dans l'ensemble $D \subset R_k$ la figuratrice est uniformement étoilée, si*

a) *pour chaque t, chaque point $(x_1, \ldots, x_k) \in D$ et chaque k-uple $e_1, \ldots, e_k$ vérifiant la condition*

$$\sum_{i=1}^{k} e_i^2 = 1 \tag{10,2}$$

il existe un $A = A(t; x_1, \ldots, x_k; e_1, \ldots, e_k)$ tel que

$$f(t; x_1, \ldots, x_k; Ae_1, \ldots, Ae_k) = 0, \tag{10,3}$$

b) *il n'existe qu'un tel nombre A,*

c) *il existe une fonction $B = B(x_1, \ldots, x_k)$*

définie et continue dans D et telle que pour chaque t, chaque point $(x_1, \ldots, x_k) \in D$ *et chaque k-uple vérifiant* (10,2) *on a*

$$A(t; x_1, \ldots, x_k; e_1, \ldots, e_k) \geqslant B(x_1, \ldots, x_k) > 0, \tag{10,4}$$

d) *pour chaque t, chaque point* $(x_1, \ldots, x_k) \in D$ *et chaque k-uple* $e_1, \ldots, e_k$ *verifiant* (10,2) *on a*

$$\sum_{i=1}^{k} e_i \frac{\partial}{\partial y_i} f(t; x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_k)\Big|_{y_j = e_j A(t; x_1, \ldots, x_k; e_1, \ldots, e_k)} \neq 0 \tag{10,5}$$

C'est-à-dire que la figuratrice est uniformement étoilée, si elle forme une hypersurface ayant commun un point exactement avec chaque demi-droite $y_i = e_i u$ (où $u \geqslant 0$). Ces demi-droites ne sont pas tangentes à la

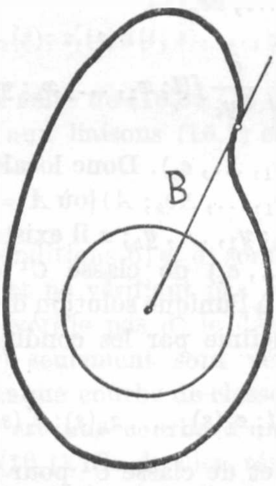

Fig. 2

figuratrice, c'est-à-dire à la situation de la fig. 2 (ou $k = 2$) est exclue. Enfin cette hypersurface contient dans son intérieur une sphère

$$\sum_{i=1}^{k} y_i^2 \leqslant [B(x_1^0, \ldots, x_k^0)]^2.$$

(et — même — elle est homéomorphe avec une sphère de k dimension).

Nous avons

Théorème 1. *Si la figuratrice des liaisons* (10,1) *est dans un domaine D de l'espace* R_k *uniformement étoilée, alors chaque courbe de classe* C^2, *de longueur finie et contenue dans D est une courbe d'un mouvement de classe* C^2 *et conforme aux liaisons* (10,1).

Démonstration. Nous devons montrer que si

(10,6) $$x_i = z_i(s)$$

où $s \in \langle 0, S\rangle$, $z_i \in C^2$ et $\sum_{i=1}^{k} [z_i'(t)]^2 = 1$ est une courbe contenue dans D, alors il existe une fonction $s = s(t)$ définie dans un intervalle $\langle 0, T\rangle$ (où $s \in C^2$, $\dot{s}(t) > 0$ et $s(0) = 0$, $s(T) = S$) tel que

(10,7) $$x_i = x_i(t) = z_i\big(s(t)\big)$$

est un mouvement qui pour $t \in \langle 0, T\rangle$ est conforme aux liaisons (10,1). Évidemment c'est un mouvement de classe C^2 et à (10,6) comme courbe de mouvement.

Vu d), nous avons

$$\frac{\partial}{\partial a} f(t; x_1, \ldots, x_k; ae_1, \ldots, ae_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial y_i} f(t; x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_k)\Big|_{y_j = ae_j} \cdot e_i \neq 0$$

pour $a = A(t; x_1, \ldots, x_k; e_1, \ldots, e_k)$. Donc localement, dans les entourages des points $(t; x_1, \ldots, x_k; Ae_1, \ldots, Ae_k; A)$ $\big($où $A = A(t; x_1, \ldots, x_k; e_1, \ldots, e_k)\big)$ de l'espace des $t; x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_k; a$ il existe une solution exactement $A = A^*(t; x_1, \ldots, x_k; e_1, \ldots, e_k)$ de classe C^1 de l'équation (10,3) Évidemment elle est identique à l'unique solution de (10,3) $A = A(t; x_1, \ldots x_k; e_1, \ldots, e_k)$ intégralement définie par les conditions a) et b).

Posons

(10,8) $$a(t, s) = A\big(t; z_1(s), \ldots, z_k(s); z_1'(s), \ldots, z_k'(s)\big).$$

C'est une fonction définie et de classe C^1 pour $t \in R_1$ et $s \in \langle 0, S\rangle$. Posons aussi

$$b(s) = B\big(z_1(s). \ldots, z_k(s)\big).$$

C'est une fonction définie et continue pour $s \in \langle 0, S\rangle$. Vu (10,4)

$$a(t, s) \geqslant b(s) > 0$$

pour $t \in R_1$ et $s \in \langle 0, S\rangle$.

Étant donné que $b(s) > 0$ pour $s \in \langle 0, S\rangle$ il existe un $b_0 > 0$ tel que $b(s) \geqslant b_0 > 0$ pour $s \in \langle 0, S\rangle$. Il s'ensuit que

(10,9) $$a(t, s) \geqslant b_0 > 0 \text{ pour } s \in \langle 0, S\rangle \text{ et } t \in R_1.$$

Considérons la solution $s = s(t)$ de l'équation différentielle

(10,10) $$\frac{ds}{dt} = a(t, s)$$

vérifiant la condition initiale

$$s(0) = 0 .$$

Étant donné que $a \in C^1$ cette solution $s = s(t)$ sera de classe C^2. Vu (10,9) elle sera fortement croissante et nous aurons

$$s(t) \geqslant b_0 t \quad \text{pour } t \geqslant 0 . \tag{10,11}$$

Il existe donc un T unique, tel que

$$s(T) = S .$$

Étant donné que $\dot{x}_i(t) = z_i'(s(t)) \cdot \dot{s}(t)$ nous aurons

$$\begin{aligned} & f(t; x_1(t), \ldots, x_k(t); \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_k(t)) = \\ & = f\big(t; z_1(s(t)), \ldots, z_k(s(t)); z_1'(s(t))\dot{s}(t), \ldots, z_k'(s(t))\dot{s}(t)\big) = \\ & = f\big(t; z_1(s), \ldots, z_k(s); z_1'(s)a(t, s), \ldots, z_k'(s)a(t, s)\big)\Big|_{s=s(t)} = 0 \end{aligned}$$

La dérnière égalité est une suite de (10,3), (10,8) et de (10,10). Le mouvement (10,7) est conforme aux liaisons (10,1) et pour $t \in \langle 0, T \rangle$ il formera le mouvement cherché.

c.q.f.d.

11. Remarques. Les conditions b) et d) sont indépendantes. L'exemple d'une spirale vérifiant d) et ne vérifiant pas b) et de la figuratrice de la fig. 2 qui vérifie b) et ne vérifie pas d) le démontre. En supposant que les conditions a), b) et c) seulement sont vérifiées, nous pouvons démontrer facilement que chaque courbe de classe C^k (où $k \geqslant 1$) de longueur finie et contenue dans D est une courbe d'un mouvement de classe C^1 et conforme aux liaisons (10,1). Ce dernier résultat est trop faible pour les applications mécaniques et il est facile de trouver des exemples des liaisons (10,1) vérifiant les condition a), b) et c) tels que le long de certaines courbes qui peuvent être même de classe D^∞ les mouvements conformes au liaisons ne peuvent pas être de classe C^2.

Il est facile à voir qu'il ne suffit pas de supposer qu'on a

$$A(t; x_1, \ldots, x_k; e_1, \ldots, e_k) > 0 \tag{11,1}$$

à la place de (10,4). Alors la courbe (10,6) pourrait ne pas être parcourue dans un temps fini.

Cependant, si les liaisons étaient scléronomes (c'est-à-dire si $\partial f / \partial t = 0$), alors la condition (11,1) pourrait être substituée à la place de (10,4). En effet, alors $a(s) = a(t, s)$ serait indépendant de t et il serait $a(s) > 0$ pour $s \in \langle 0, S \rangle$, donc aussi il existerait un b_0 tel que $a(s) \geqslant b_0$ et l'inégalite (10,11) aura lieu.

Nous dirons que *la figuratrice est admissible dans D si pour chaque t et pour chaque point $(x_1, \ldots, x_k) \in D$ elle est homéotope à une sphère $\sum_{i=1}^{k} w_i^2 = 1$ et contient dans son intérieur la sphère $\sum_{i=1}^{k} y_i^2 \leqslant b_0^2$* (où b_0 est un nombre positive fixe).

Si la figuratrice est admissible, alors pour chaque t, chaque point $(x_1, \ldots, x_k) \in D$ et chaque k-tuple $e_1, \ldots, e_k$ verifiant (10,2) (mais les conditions b) et d) peuvent ne pas être verifiées) il existe au moins une solution de l'équation (10,3) (mais il peut exister plus d'une solution) et la condition (10,4) sera vérifiée (il suffit de poser $B(x_1, \ldots, x_k) \stackrel{\mathrm{df}}{=} b_0$), Cependant, il ne suffirait pas dans le Théorème 1 de supposer que la figuratrice est admissible (à la place de la supposition qu'elle est uniformement étoilée).

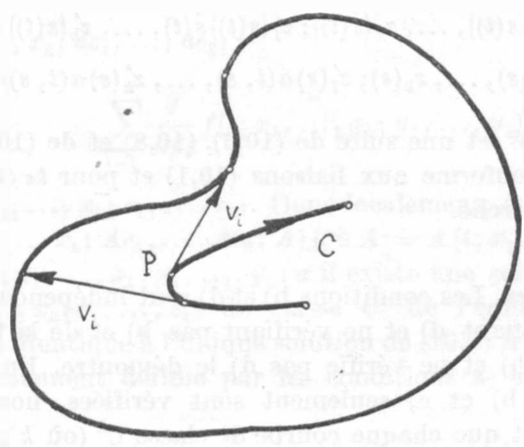

Fig. 3

La fig. 3 (pour $k = 2$, elle n'a d'ailleurs qu'on caractère symbolique), le montre clairement — les mouvements conformes aux liaisons (10,1) ne peuvent pas être prolongées le long de C au-dela du point P.

Du Théorème 1 il s'ensuit immédiatement

Corrolaire. *Si la figuratrice est dans un domaine D de l'espace R_k uniformement étoilée, alors chaque couple de points de D peut être joint dans D par un mouvement C^2 conforme aux liaisons* (10,1),

Mais il n'est pas vrai que chaque couple des points du temps-espace $R_1 \times D$ peut être joint par un mouvement conforme aux liaisons (10,1) — même si les liaisons sont scléronomes (comme c'est le cas pour les mouvements conformes aux liaisons holonomes).

Remarquons enfin que si la figuratrice est uniformement étoilée (et même si elle n'est qu'admissible) alors les liaisons (10,1) son non holonomes, car alors le système assujetti à eux n'aura que $k-1$ dégré de liberté infinitésimale, et du Théorème 1 il s'ensuit qu'il aura k dégré de liberté intégrale, ce qui est impossible pour les liaisons holonomes.

Le Théorème 1 ne contient aucun cas particulier auquel on pourrait appliquer l'interprétation mécanique du Théorème Fondamental de la thermodynamique de Carathéodory (cité au § 9), car dans ces cas la figuratrice ne forme qu'un hyperplan et la non-intégrabilité (ou intégrabilité) des liaisons dépend des changements dans les directions de ce hyperplan en fonction des $t; x_1, \ldots, x_k$.

Nous n'avons considéré qu'une condition non holonome (10,1). Dans le cas de plusieurs conditions non holonomes la situation est beaucoup plus difficile (voir les exemples 4,4). En général on ne peut pas joindre deux points par une courbe de mouvement, les directions des vitesses (c'est-à-dire aussi les directions de tangentes à la courbe de mouvement) n'étant pas n'importe quelles (comme dans le cas d'une condition non holonome (10,1)) mais peuvent être regardées comme exceptionnelles. L'étude peut être facilitée par l'introduction aussi ici de la notion de la figuratrice.

Remarquons enfin que si la condition ou les conditions non holonomes sont scléronomes et indépendantes du point $(x_1, \ldots, x_k)$, c'est-à-dire de forme

$$g_j(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k) = 0, \quad j = 1, \ldots, N < k, \tag{11.2}$$

alors le hodographe de Hamilton de n'importe quel mouvement est contenu dans la figuratrice.

12. Un problème. Revenons au cas d'une condition (10,1). Il est intéressant de noter que vraisemblablement le résultat du corrolaire peut être obtenu sous des suppositions beaucoup plus faibles (sous lesquelles — comme nous avons déjà remarqué au § 11 — le Théorème 1 ne serait plus vrai). A savoir c'est le théorème suivant qui est vraissemblablement vrai:

"*Si la figuratrice est admissible dans D, alors chaque couple de points du domaine D peut être joint par une courbe de mouvement de classe* C^2 *conforme aux liaisons et contenue dans D*".

L'idée générale de la démonstration serait la suivante (ou plus tôt le raisonnement reproduit ci-dessous montre que ce théorème est plausible):

Joignons nos deux points de D par n'importe quelle courbe de classe C^2 et contenue dans D. Si nous avons une situation ressamblant à celle de la fig. 4 où aucun mouvement C de classe C^2 (et même de classe C^1) conforme au liaisons ne peut pas être prolongée au-délà du point P, (car alors un "saut" de la vitesse serait nécéssaire au point P), alors il faut dévier la courbe par une boucle.

Il est facile à voir, que pour $k = 2$ et pour les liaisons de forme (11,2) c'est-à-dire pour les liaisons

$$f(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = 0 \tag{12,1}$$

(c'est-à-dire si nous considérons les mouvements plans et si la figuratrice est indépendante du temps et de la position du point $(x_1^0, x_2^0) \epsilon D$) et si pour chaque couple e_1, e_2 tel que

$$e_1^2 + e_2^2 = 1$$

l'équation (c'est l'équation (10,3) pour nos liaisons (12,1))

$$f(Ae_1, Ae_2) = 0$$

n'a qu'un nombre fini de solutions positives, $A = A(e_1, e_2)$, alors cette déviation peut être faite de telle manière que le long de cette déviation un mouvement conforme aux liaisons (12,1) peut être de classe C^2.

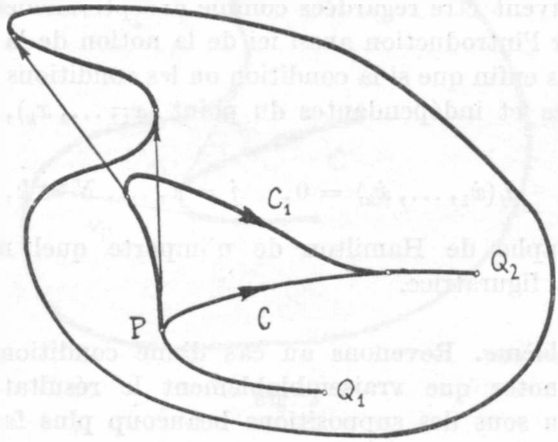

Fig. 4

Dans le cas général nous aurons non seulement des difficultés liées à la nécéssité d'employer un nombre infini des boucles et une situation nettement topologiquement plus compliquée pour $k > 2$, mais il faudra envisager aussi la chose la plus difficile, à savoir les changements de la figuratrice en fonction des points envisagés et du temps.

Les résultats des § 9–12 — il nous semble — peuvent aider à élucider quelques problèmes relatifs à la non équivalence (M) des liaisons holonomes et non holonomes.

13. Liaisons paramétriques. L'introduction des liaisons paramétriques de la facon ordinaire, par exemple comme nous l'avons fait dans le travail [6], ne nécéssite aucun changement de principe dans nos définitions.

On peut cependant introduire les paramètres des systèmes holonomes (holonomes (A) ou (M)) d'une autre façon, par exemple employer comme un des paramètres l'aire décrite par le rayon-vecteur, (voir par exemple [1], p. 9). Ces paramètres (paramètres non holonomes) s'il sont employés ne parmettent pas de ramener la forme des liaisons d'un systeme holonome (holonome dans le sens d'Appell — voir [1], p. 5 et l'exemple 4,4C) à la forme $x_i = \varphi_i(t; q_1, \ldots, q_k)$.

Une définition des liaisons non holonomes (aholonomes) analogues aux liaisons holonomes régulières (à k dégrés de liberté) basée — par exemple — sur les variables de Maggi présenterait peut-être un intérêt pour la théorie de systèmes non holonomes.

14. Conclusions cinématiques. Dans les appliquations on rencontre le plus souvent un système physique donné (par exemple une pendule, une toupie, un cerceau, etc.) et on construit leurs liaisons analytiques de forme (2,1). Elles peuvent avoir plusieurs formes: si la mise en équations est correcte, elles sont équivalentes (M). C'est — nous le croyons — la cause profonde de peu d'intérêt porté jusqu'à present à l'analyse de l'équivalence des liaisons. Cependant cette analyse est nécessaire pour la construction d'une mécanique correcte (comprise comme un système déductif correct). À commencer par une definition rigoreuse et générale de l'équavalence (A) et par la démonstration de l'équivalence des notions de l'équivalence (A) et (M).

Relativement faciles sont les considérations sur l'équivalence (A) de deux liaisons d'un systeme holonome scléronome (ce ne sont que des considérations purement géometriques). Bien plus difficiles à résoudre est le problème de l'équivalence des conditions holonomes dépendant du temps. Il n'est résolu que pour les liaisons linéaires (voir [11]). S'il s'agit des liaisons aholonomes (c'est-à-dire des liaisons de type (2,1)) l'équivalence mutuelle et l'équivalence aux liaisons holonomes ou non holonomes (voir les exemples 4,4) aussi n'est résolu que pour les liaisons linéaires en $\dot{x}_i$ (voir — par exemple [4], p. 311 et [2], p. 126). Des résultats semblables pour les liaisons non linéaires n'existent pas (sauf les conclusions du Théorème 1 du présent travail). De même il n'existe aucune théorie permettant de calculer le nombre minimum dans chaque membre de l'alternative (2,1) qui ne contienne pas les $\dot{x}_i$ (l'ordre du système dans le sens d'Appell — voir [1] p. 5 et l'exemple 4,4B).

15. Dynamique. Jusqu'à present nous n'avons pas employé la notion de la force pour souligner que la théorie des liaisons à sa place à la cinématique (ou bien à la gèometrie) et non à la dynamique (où on la trouve ordinairement). C'est vrai que nous avons mentionné deux fois les forces au § 6 (qui d'ailleurs n'est pas consacré au sujet principal de ce travail), mais ce n'etait qu'en vue des applications ultérieures que nous l'avons fait en citant d'autres ouvrages.

Évidemment certains énoncés seraient plus simples si nous avons employé la notion de la force (spécialement l'exemple 6,1) et il faut bien se rendre compte que la notion de la réalisation des liaisons appartient à la dynamique (nous l'introduisons en acceptant une propriété concrète des réactions des liaisons, qui de sont côté sont définies par un axiome employant la notion des forces — voir par exemple [6]). Aussi toutes les applications de la notion des liaisons appartiennent à la dynamique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Appell, P. *Sur une forme générale des équations de la dynamique.* Mem. Sc. Math. 1, Paris 1925.

[2] Carathéodory, C. *Variationsrechnung*, Leipzig 1935.

[3] —, *Untersuchungen uber die Grundlagen der Thermodynamik*, Gessammelte Mathematische Schriften, v. 2, München 1954, p. 131–166 (reimpression de Math. Ann 67 (1909), p. 355–386).

[4] Forsyth, A. R. *A treatise on differential equations*, London 1956.

[5] Lurie, A. I. *Аналитическая механика*, Москва 1961.

[6] Tatarkiewicz, K. *Une généralisation des équations de Maggi et d'Appell*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska (A) 10 (1956), 5–32.

[7] —, *Un example simple de mouvement non holonome*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska (A) 11 (1957), 5–16.

[8] —, *Sur la notion des liaisons*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska (A) 12 (1958), 59–66.

[9] —, *Sur le théorème fondamental de la thermodynamique de Carathéodory*, Ann. Pol. Math. — en impression.

[10] —, *Rachunek wariacyjny*, t. I, Warszawa 1969.

[11] Wundheiler, A. *Rheonome Geometrie. Absolute Mechanik*, Prace Mat.-Fiz. 40 (1932), 97–142.

STRESZCZENIE

Praca poświęcona jest sformułowaniu dwu definicji równoważności więzów:

Definicja 2. Mówimy, że więzy L dane przez wzory (2,1) oraz więzy $\bar{L}$ dane przez wzory (2,2) są *równoważne* (M) jeśli każdy ruch klasy C^2 zgodny z więzami L jest też zgodny z więzami $\bar{L}$ i naodwrót.

Definicja 4. Mówimy, że więzy L i $\bar{L}$ są *równoważne* (A) jeżeli możemy przejść od wzorów (2,1) do wzorów (2,2) i naodwrót przy pomocy a) operacji logicznych, b) operacji analitycznych oraz c) operacji D^1 (zdefiniowanej w mej pracy [6]) i jej odwrotnej.

Omawia się problemy związane z równoważnością pojęć: równoważności (A) więzów i równoważności (M) więzów. Podane są przykłady (§ 4), z których wynika, że stosowane obecnie nie bardzo precyzyjne sformułowania są niezadawalające.

Paragrafy 9 i 10 poświęcone są pewnej własności więzów anholonomicznych nie liniowych, która — być może — da się wykorzystać przy badaniu równoważności (A) więzów.

РЕЗЮМЕ

Работа посвящена формулировке 2 определений эквивалентности связей.

Определение 2. Говорится, что связи L, данные формулами (2,1), а также связи $\bar{L}$, данные формулами (2,2), эквивалентны (M), если каждое движение класса C^2 совместное со связями L является совместным со связями $\bar{L}$ и наоборот.

Определение 4. Говорится, что связи L и $\bar{L}$ эквивалентны (A), если можно перейти от формул (2,1) к формулам (2,2) и наоборот при помощи: а) логических операций; б) аналитических операций; в) операции D^1 (определенной в работе [6]) и ее обратной.

Рассматриваются проблемы, связанные с равнозначностью понятий: эквивалентности (A) связей и эквивалентности (M) связей. Даны примеры (§ 4), из которых следует, что применяемые в настоящее время формулировки не являются удовлетворительными.

Параграфы 9 и 10 посвящены некоторому свойству неголономичных нелинейных связей, которое — может быть — удастся использовать при исследовании эквивалентности (A) связей.