ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XX, 2 SECTIO A 1966

Z Katedry Matematyki Wydziału Ekonomicznego UMCS
Kierownik: doc. dr habil. Zdzisław Lewandowski

FRANCISZEK BOGOWSKI, FILIP FRANCISZEK JABŁOŃSKI,
JAN STANKIEWICZ

Subordination en domaine et inégalités des modules pour certaines classes de fonctions holomorphes dans le cercle unité

Podporządkowania obszarowe a nierówności modułów dla pewnych klas funkcji holomorficznych w kole jednostkowym

Областные подчинения и неравенства модулей для некоторых классов голоморфных функций в единичном круге

I.

Soit K_ϱ l'ensemble des nombres complexes $z, \{z: |z| < \varrho\}, \varrho > 0$ Désignons par S la classe des fonctions de la forme

$$F(z) = z + A_2 z^2 + \ldots, \tag{1}$$

holomorphes et univalentes dans le cercle K_1.

Soit $S_{[\omega]}$ la classe des fonctions de la forme (1) holomorphes dans le cercle K_1 et telles que

$$\left|\arg \frac{zF'(z)}{F(z)}\right| \leqslant \omega(r) \text{ pour } |z| \leqslant r < 1, \tag{2}$$

où $\omega(t)$ désigne une fonction réelle définie pour $t \in \langle 0, 1)$, non négative et non décroissante, continue inférieurement et pas nécessairement finie, satisfaisant à la condition $\omega(0) = 0$.

Par H_n désignons la classe des fonctions

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots, a_n \neq 0 \tag{3}$$

holomorphes dans le cercle K_1.

Désignons ensuite par $S_a^*(a\in\langle 0,1))$ et par S_c les classes partielles de la classe S des fonctions qui satisfont respectivement aux conditions:

$$\operatorname{Re}\frac{zF'(z)}{F(z)} > a \text{ pour } z\in K_1, \tag{4}$$

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right\} > 0 \text{ pour } z\in K_1. \tag{5}$$

Dans le travail [1] p. 68 se trouve démontré le théoréme suivant:

Théorème. *Supposons $F(z)\in S_{[\omega]}$ et soit $f(z) = a_n z^n + a_{n+1}z^{n+1}+\ldots$, $a_n > 0$ une fonction holomorphe dans K_1 telle que $f(z)\neq 0$ pour $z\neq 0$, $z\in K_1$ et $f(z) \prec_1 F(z)$.*

Dans ces conditions on a

$$|f(z)| \leqslant F(z^n)| \text{ pour } |z| \leqslant r(\omega) < 1,$$

où $r(\omega) = \inf\left\{x;\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ \omega(x)+2\operatorname{arctg}x \geqslant \frac{\pi}{2}\right\}$.

La subordination en domaine $f(z) \prec_\varrho F(z)$ signifie qu'il existe une fonction $g(z)$, holomorphe dans K_ϱ, $|g(z)| < \varrho$. $g(0) = 0$ telle que

$$f(z) = F(g(z)) \quad z\in K_\varrho.$$

Dans le cas où la majorante $F(z)$ est une fonction univalente, la relation $f(z) \prec_\varrho F(z)$ signifie que $f(K_\varrho)\subset F(K_\varrho)$.

Remarque 1. Ce théorème reste en vigueur si l'on remplace $r(\omega)$ par le nombre $r_n(\omega) = \inf\left\{x;\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ \omega(x^n)+2\operatorname{arctg}x \geqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ que l'on obtient de $r(\omega)$ en remplaçant $\omega(x)$ par la fonction $\omega(x^n)$. Cela résulte du fait que la limitation établie dans la démonstration de ce théoreme peut être améliorée, pour $n\geqslant 2$, en utilisant la limitation intermédiaire $|\gamma(z,t)|\leqslant |z|^n$ au lieu de $|\gamma(z,t)|\leqslant |z|$, limitation qui a ét déduite dans [1] de l'inégalité (21).

Dans ce travail nous nous occupons de problèmes étroitement liés au travail [1], c'est — dire des relations entre la subordination en domaine et en module des fonctions $f(z)$ et $F(z)$ dans différentes classes de fonctions; nous y généralisons, d'une part, les résultats du travail [1] et, de l'autre, nous y donnons des applications à certaines classes partielles de fonctions de la classe S.

II.

Théorème 1. *Si $F(z)\in S$, $n\geqslant 2$, on a*

$$|F(z^n\cdot e^{i\theta})| \leqslant |F(z)| \tag{7}$$

pour $|z| \leqslant r(n)$, où θ est un nombre réel quelconque et $r(n)$ est la racine positive unique de l'equation

(8) $$1-r^n-(1+r)r^{(n-1)/2} = 0.$$

Démonstration. On sait que si $F(z) \in S$, on a

(9) $$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqslant |F(z)| \leqslant \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \quad |z|<1.$$

Si z est un point quelconque fixé du cercle K_1, $\zeta = z^n \cdot e^{i\theta}$ varie sur la circonférence $|\zeta| = |z|^n$. On tire donc de (9)

(10) $$|F(\zeta)| \leqslant \frac{|z|^n}{(1-|z|^n)^2}.$$

Si $|z| \leqslant r(n)$, il résulte de (8) que

(11) $$\frac{|z|^n}{(1-|z|^n)^2} \leqslant \frac{|z|}{(1+|z|)^2}.$$

En vertu de (10), (11) et du premier membre de l'inégalité (9) on a: $|F(\zeta)| \leqslant |F(z)|$ pour $|z| \leqslant r(n)$, ce qui équivant à la condition (7).

Le nombre $r(n)$ ne peut être augmenté, puisque pour $F(z) = k(z) = \dfrac{z}{(1+z)^2}$, $z = r$, $\theta = \pi$ l'inégalité (7) prend la forme:

(12) $$|k(-r^n)| = \frac{r^n}{(1-r^n)^2} \leqslant \frac{r}{(1+r)^2} = |k(r)|.$$

Si $r > r(n)$, l'inégalité (12) cesse d'être vraie.

Théorème 2. *Soit $F(z) \in S$ et $f(z) \in H_n$, $n \geqslant 2$.*

Si

(13) $$f(z) \prec_1 F(z) \text{ on a}$$

(14) $$|f(z)| \leqslant |F(z)| \text{ pour } |z| \leqslant r(n),$$

où le rayon $r(n)$ est racine de l'équation (8).

Démonstration. Il résulte des hypothèses du théorème 2 qu'il existe une fonction $g(z)$, holomorphe dans K_1, $|g(z)| \leqslant 1$, $g(0) = 0$ telle que

(15) $$f(z) = F(g(z)).$$

Comme $F(z) \in S$, on peut admettre $g(z) = F^{-1}(f(z)) = a_n z^n + b_{n+1} z^{n+1} + \ldots$ La fonction $g(z)$ remplit les conditions du lemme de Schwarz précisé [Golusin p. 364, théor. 4], on a donc

(16) $$|g(z)| \leqslant |z|^n.$$

Par conséquent

$$(17) \qquad |f(z)| = |F(g(z))| \leqslant \max_{|\zeta|=|z|^n} |F(\zeta)|.$$

Le théoreme 1 et l'inégalité (17) entrainent donc

$$|f(z)| \leqslant |F(z)| \text{ pour } |z| \leqslant r(n).$$

Le nombre $r(n)$ ne peut être remplacé par un nombre plus grand. Pour $z \neq 0$ on obtient l'égalité dand (14) si l'on pose $F(z) = \frac{z}{(1+e^{-\pi i/(n-1)}z)^2}$, $g(z) = z^n$ et $z = r(n)e^{\pi i/(n-1)}$. L'exemple de ce couple de fonctions prouve en même temps que l'hypothèse supplémentaire $a_n > 0$ n'augmente pas le rayon de subordination en module.

Dans la seconde partie de notre travail nous allons étudier quelques problémes pour les classes partielles S_a^* de la classe S. Toute fonction $F(z)$ de la classe S_a^* peut être représentée par la formule

$$(18) \qquad F(z) = z\exp\left\{-2(1-a)\int_{-\pi}^{\pi} \log(1-e^{-i\theta}z)\,d\mu(\theta)\right\}$$

où $\mu(\theta)$ est une fonction réelle, non décroissante pour $\theta \in \langle -\pi, \pi\rangle$ telle que $\mu(\pi) - \mu(-\pi) = 1$.

Lemme. *Si* $F(z) \in S_a^*$ *on a*

$$(19) \qquad \frac{|z|}{(1+|z|)^{2(1-a)}} \leqslant |F(z)| \leqslant \frac{|z|}{(1-|z|)^{2(1-a)}}; \quad |z| < 1.$$

Démonstration. De (18) on obtient

$$|F(z)| = |z|\exp\left\{-2(1-a)\int_{-\pi}^{\pi} \log|1-e^{-i\theta}z|\,d\mu(\theta)\right\}$$

et, comme

$$\log(1-|z|) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \log|1-e^{-i\theta}z|\,d\mu(\theta) \leqslant \log(1+|z|),$$

il s'ensuit que

$$|z|\exp\{-2(1-a)\log(1+|z|)\} \leqslant |F(z)| \leqslant |z|\exp\{-2(1-a)\log(1-|z|)\}$$

d'où résulte (19) Ce lemme nous permettra de démontrer le théorème suivant:

Théorème 3. *Si* $F(z) \in S_a^*$; $n \geqslant 2$, *on a*

$$(20) \qquad |F(z^n e^{i\theta})| \leqslant |F(z)| \text{ pour } |z| \leqslant r(n, a),$$

où est un nombre réel quelconque et $r(n, a)$ est la racine positive unique de l'équation

$$1-r^n-(1+r)r^{(n-1)/2(1-a)} = 0. \tag{21}$$

La démonstration est analogue à celle du théorème 1, à cela près qu'on y utilise, au lieu de (9) la limitation (19).

Théorème 4. *Soit $F(z)\epsilon S_a^*$ et $f(z)\epsilon H_n$, $n \geqslant 2$.*
Si $f(z) \prec_1 F(z)$ on a

$$|f(z)| \leqslant |F(z)| \quad pour \quad |z| \leqslant r(n, a), \tag{22}$$

où $r(n, a)$ est le nombre défini dans le théorème 3.
Pour démontrer le théorème 4 il suffit de s'appuyer sur le théorème 3 et de répéter la démonstration du théorème 2.

Remarquons que si $h(z)\epsilon S_0^*$, on a

$$\varphi(z) = z\left[\frac{h(z)}{z}\right]^{1-a} \epsilon S_a^* \text{ et inversement.} \tag{23}$$

Dans les théorèmes 1 et 2 les fonctions extrémales sont des fonctions de la classe S_0^*, on obtiendra donc les fonctions extrémales dans les théorèmes 3 et 4 en transformant les précédentes par (23).
Ce seront les fonctions:

$$F(z) = \frac{z}{(1+ze^{-\pi i/(n-1)})^{2(1-a)}}, \quad f(z) = F(z^n). \tag{24}$$

Désignons par S_c la classe des fonctions convexes dans le cercle K_1. On sait que $S_c \subset S_{1/2}^*$. Les fonctions (24) étant convexes pour $a = \frac{1}{2}$ il en résulte immédiatement le.

Théorème 5. *Soit $F(z)\epsilon S_c$, $f(z)\epsilon H_n$, $n \geqslant 2$. Si $f(z) \prec_1 F(z)$ on a $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ pour $|z| \leqslant r(n, \frac{1}{2})$, où $r(n, \frac{1}{2})$ est la racine positive unique de l'equation*

$$1-r^n-(1+r)r^{n-1} = 0 \tag{25}$$

et ne peut etre remplacée par un nombre plus grand.

Remarque 2. Les racines des équations (8), (21) et (25) ont les propriétés suivantes:

(*a*) $r(n, a) < r(n+1, a)$

(*b*) $a_1 < a_2 \Rightarrow r(n, a_1) < r(n, a_2)$

(*c*) $\lim\limits_{n\to\infty} r(n, a) = 1, \lim\limits_{a\to 1} r(n, a) = 1$

(*d*) $r(n) = r(n, 0)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bielecki A. et Lewandowski Z., *Sur une généralisation de quelques théorèmes de M. Biernacki sur les fonctions analitiques*, Ann. Polon. Math. XII (1962).

[2] Голузин, Г. М., *Геометрическая теория функции комплексного переменного*, Москва—Ленинград, (1952).

Streszczenie

W pracy tej rozpatrujemy zagadnienia dotyczące relacji pomiędzy podporządkowaniem obszarowym i modułowym funkcji $f(z)$ i $F(z)$ gdzie $F(z)$ należy do klasy S, S_a^* względnie S_c, a $f(z) = a_n z^n + \ldots$, jest funkcją holomorficzną. Dowodzimy, że jeżeli $F(z) \epsilon S(S_a^*, S_c)$ i $f(z) = a_n z^n + \ldots$ jest holomorficzna i $f(z) \prec_1 F(z)$ to

$$|f(z)| \leqslant |F(z)| \text{ dla } |z| \leqslant r,$$

gdzie r dane jest odpowiednio przez równania (8), (21) i (25).

Резюме

В этой работе рассматриваются вопросы, относящиеся к соотношению между подчинением и неравенством модулей функций $f(z)$ и $F(z)$, где $F(z)$ принадлежит к классу S, S_a^* либо S_c, а $f(z) = a_n z^n + \ldots$ — голоморфная функция. Доказывается, что, если $F(z) \epsilon S\ (S_a^*, S_c)$, а $f(z) \prec_1 F(z)$, то $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ в круге $|z| \leqslant r$, где r определено соответственно по уравнениям (8), (21) и (25).