
Z Katedry Statystyki Matematycznej Wydziału Mat. Fiz. Chem. UMCS
Kurator: prof. dr Jan Krzyż

DOMINIK SZYNAL

Certaines inégalités pour les sommes de variables aléatoires et leur application dans l'étude de la convergence de séries et de suites aléatoires

Pewne nierówności dla sum zmiennych losowych i ich zastosowanie w badaniu zbieżności szeregów i ciągów losowych

Некоторые неравенства для сум случайных величин и их приложение к исследованию сходимости случайных рядов и последовательностей.

1. Introduction. Une des tâches fondamentales dans le domaine des problèmes-limites du calcul des probabilités consiste à formuler des conditions nécessaires et suffisantes (soit les unes soit les autres) pour la convergence en probabilité (P.) ou presque sûre (p. s.) de séries ou de suites aléatoires, et — ce qui en est étroitement solidaire — la recherche des conditions telles que la loi faible ou forte des grands nombres soit satisfaite. Il est évident que la réussite dans ces recherches (et non seulement dans ces recherches) dépend de la "force" des instruments dont nous disposons. Il est notoire que dans l'étude de la convergence en probabilité d'une série aléatoire, de la loi faible des grands nombres (l. faible g. n.), de la concordance des estimateurs — ainsi que dans la formulation d'autres théorèmes appartenant à ce qu'on considère comme loi limites faibles du calcul des probabilités, un rôle décisif revient à l'inégalité de P. Thebycheff ([10], p. 158) et à sa généralisation qu'est l'inégalité de A. Markoff ([10], p. 158); par contre, l'inégalité de Kolmogoroff ([10], p. 238) et de P. Lévy ([8], p. 138, cf. également [10], p. 247), constituent l'instrument fondamental dans les démonstrations de théorèmes appartenant à ce qu'on appelle lois limites fortes du calcul des probabilités, donc dans les démonstrations de la convergence presque sûre de séries et de suites aléatoires, de la loi forte des grands nombres (l. forte g. n.), de la loi itérative du logarithme et autres.

Les améliorations ou les modifications des inégalités en question peuvent contribuer à un renforcement notable des théorèmes connus

ou à la formulation des résultats nouveaux dans ce domaine. Il suffit de rappeler que les résultats de Ju. Prochoroff [13], concernant la convergence essentielle de séries et de suites aléatoires ainsi que la l. forte g. n., résultats qui actuellement sont des corollaires allant le plus loin dans ce domaine, ont été donnés à partir d'une modification de l'inégalité de P. Lévy introduite par A. Kolmogoroff [13]. Ce qui plus est, ces améliorations ou modifications non seulement permettent de formuler les conditions de la convergence en probabilité ou presque sûre de séries ou de suites aléatoires, mais encore elles sont susceptibles de fournir une certaine information, intéressant le statisticien, quant à la rapidité de la convergence [2].

Dans cette étude nous donnons certaines modifications des inégalités mentionnées plus haut, qui ont permis de renforcer ou de généraliser des théorèmes classiques soit connus de la littérature, qui concernent la convergence en probabilité ou presque sûre de séries et de suites aléatoires, et ce dans le cas de variables aléatoires (v. a.) indépendantes aussi bien dans le cas de v. a. dépendantes. Les inégalités citées ont pour caractéristique ce qu'on n'y fait aucune hypothèse relativement à l'existence de la variance des v. a., ni même à l'existence de l'espérance mathématique. Si dans certains cas on pose l'existence de l'espérance mathématique, ce n'est que pour pouvoir formuler les conditions de la l. faible g. n. ou bien de la l. forte g. n., ou pour comparer les résultats obtenus avec les résultats connus. Les inégalités données fournissent également une information plus précise quant à la rapidité de la convergence considérée que les inégalités classiques.

Une partie de ces résultats constituent une généralisation ou un renforcement des théorèmes annoncés dans les travaux [14], [15], [16], [17], [18], [19].

2. Notations et définitions.

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) une probabilité espace; c'est-à-dire Ω est un ensemble abstrait d'éléments ω sur lequel est fixé un σ corps de sous-ensembles de Ω et P est la mesure de la probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) . $\{X_n\}$ désigne une suite des v. a. à valeurs réelles, EX_n l'espérance mathématique de X_n , $\sigma^2 X_n$ la variance de X_n , et $\text{Cov}(X_j, X_k)$ covariances entre les v. a. X_j et X_k . Nous désignerons par $E'_k(X_{j+k})$ l'espérance mathématique de la variable X_{j+k} lorsqu'on connaît les valeurs des variables X_1, X_2, \dots, X_k , c'est-à-dire

$$E'_k(X_{j+k}) = E(X_{j+k} | X_k = x_k, X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_1 = x_1),$$

et par $\sup |E'_k(X_{j+k}) - EX_{j+k}|$, pour j fixe, la borne supérieure de $|E'_k(X_{j+k}) - EX_{j+k}|$ lorsque les valeurs que prennent les variables X_1, X_2, \dots, X_k varient dans l'ensemble des valeurs admises.

Soient X_k et X'_k ($k = 1, 2, \dots, n$) de v. a. telles que tout X'_k possède la même répartition que X_k et soit $X_k^{*s} = X_k - X'_k$ (la v. a. X_k^{*s} est dite symétrisée). Posons $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$,

$$S_k^s = \sum_{k=1}^n X_k^s \text{ et } S_k^0 = \sum_{k=1}^n X_k^0, \text{ où } X_k^0 = X_k - EX_k.$$

Dans l'étude nous aurons également besoin des v.a. tronquées que nous obtenons en tronquant X_k ou X_k^0 ($k = 1, 2, \dots, n$) en points $\varepsilon, k\varepsilon, n\varepsilon$ (ε — désigne un nombre positif quelconque) ainsi que des v.a. queues leur correspondant. Nous noterons les unes et les autres à l'aide de l'indicateur.

Soit I_A désigne l'indicateur de l'événement A , c'est-à-dire une v.a. telle que $I_A = 1$ ou 0 suivant que A est réalisé ou non.

Désignons

$$U_k = X_k I_{[|X_k| < \varepsilon]}, V_k = X_k I_{[|X_k| \geq \varepsilon]}, S_n = \sum_{k=1}^n U_k, S_n^* = \sum_{k=1}^n V_k;$$

$$U_k^* = X_k^0 I_{[|X_k^0| < \varepsilon]}, V_k^* = X_k^0 I_{[|X_k^0| \geq \varepsilon]}, S_n^* = \sum_{k=1}^n U_k^*, S_n^{**} = \sum_{k=1}^n V_k^*;$$

$$T_k = X_k I_{[|X_k| < k\varepsilon]}, W_k = X_k I_{[|X_k| \geq k\varepsilon]}, \hat{S}_n = \sum_{k=1}^n T_k/k,$$

$$\hat{S}_n^* = \sum_{k=1}^n W_k/k, \hat{S}_n^0 = \sum_{k=1}^n X_k/k, \hat{S}_n^* = \sum_{k=1}^n T_k, \hat{S}_n^{**} = \sum_{k=1}^n W_k;$$

$$T_k^* = X_k^0 I_{[|X_k^0| < k\varepsilon]}, W_k^* = X_k^0 I_{[|X_k^0| \geq k\varepsilon]}, \hat{S}_n^* = \sum_{k=1}^n T_k^*/k,$$

$$\hat{S}_n^{**} = \sum_{k=1}^n W_k^*/k, \hat{S}_n^0 = \sum_{k=1}^n X_k^0/k, \hat{S}_n^* = \sum_{k=1}^n T_k^*, \hat{S}_n^{**} = \sum_{k=1}^n W_k^*;$$

$$Y_k = X_k I_{[|X_k| < n\varepsilon]}, Z_k = X_k I_{[|X_k| \geq n\varepsilon]}, \tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n Y_k, \tilde{S}_n^* = \sum_{k=1}^n Z_k;$$

$$Y_k^* = X_k^0 I_{[|X_k^0| < n\varepsilon]}, Z_k^* = X_k^0 I_{[|X_k^0| \geq n\varepsilon]}, \tilde{S}_n^* = \sum_{k=1}^n Y_k^*, \tilde{S}_n^{**} = \sum_{k=1}^n Z_k^*.$$

Pour une plus grande clarté et simplicité des résultats formulés et pour éviter de nombreuses répétitions de certaines formules nous posons:

$$a_k(r) = E[|X_k|^r / (\varepsilon^r + |X_k|^r)], a_k^0(r) = E[|X_k^0|^r / (\varepsilon^r + |X_k^0|^r)],$$

$$b_k = E^2 U_k / \varepsilon^2, b_k^* = E^2 U_k^* / \varepsilon^2,$$

$$c_k(r) = E[|X_k|^r / (k^r \varepsilon^r + |X_k|^r)], c_k^0(r) = E[|X_k^0|^r / (k^r \varepsilon^r + |X_k^0|^r)],$$

$$d_k = E^2 T_k / k^2 \varepsilon^2, d_k^* = E^2 T_k^* / k^2 \varepsilon^2,$$

$$e_k(r) = E[|X_k|^r / (n^r \varepsilon^r + |X_k|^r)], e_k^0(r) = E[|X_k^0|^r / (n^r \varepsilon^r + |X_k^0|^r)],$$

$$f_k = E^2 Y_k / n^2 \varepsilon^2, f_k^* = E^2 Y_k^* / n^2 \varepsilon^2,$$

$$h_k(r) = E[|X_k^s|^r / (\varepsilon^r + |X_k^s|^r)], s_k(r) = E[|X_k^s|^r / (k^r \varepsilon^r + |X_k^s|^r)],$$

$$t_k(r) = E[|X_k^s|^r / (n^r \varepsilon^r + |X_k^s|^r)], u_k(2r) = n^{r-1} E[|X_k|^{2r} / ((n\varepsilon)^{2r} + |X_k|^{2r})],$$

$$u_k^0(2r) = n^{r-1} E[|X_k^0|^{2r} / ((n\varepsilon)^{2r} + |X_k^0|^{2r})],$$

où r est un nombre tel que $0 < r \leq 2$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Nous nous servirons des définitions suivantes.

Soit $\{X_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) une suite des v.a. Nous disons que la série $\sum X_n$ est convergence essentielle, s'il existe une suite de constants $\{c_n\}$ telle que la série $\sum (X_n - c_n)$ est convergente presque sûre. La suite $\{X_n\}$ est stable en probabilité ou presque sûrement, si $X_n - c_n \xrightarrow{P} 0$, $n \rightarrow \infty$, ou $X_n - c_n \xrightarrow{p.s.} 0$, respectivement. En étudiant la stabilité en probabilité ou presque sûre de S_n/n ou S_n^0/n , nous désignerons

$$(i) \quad S_n/n - E\tilde{S}_n/n \xrightarrow{P} 0, \text{ ou } (i^0) \quad S_n^0/n - E\tilde{S}_n^0/n \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty,$$

$$(j) \quad S_n/n - E\hat{S}_n/n \xrightarrow{p.s.} 0, \text{ ou } (j^0) \quad S_n^0/n - E\hat{S}_n^0/n \xrightarrow{p.s.} 0, n \rightarrow \infty.$$

Nous disons que la suite $\{X_n\}$ obéit à la loi faible ou forte des grands nombres, si

$$(k) \quad S_n/n \xrightarrow{P} 0, \text{ ou } (l) \quad S_n^0/n \xrightarrow{p.s.} 0, n \rightarrow \infty,$$

respectivement.

Nous disons que la répartition de v. a. Y conditionnée par v. a. X est symétrique (par rapport à zéro), si pour tout $a \geq 0$ $P[Y > a|x] = P[Y < -a|x]$ p. s. [1].

3. Inégalités pour les variables aléatoires queues.

Nous donnons d'abord les inégalités que nous utiliserons pour démontrer toutes les autres inégalités.

Lemme 1. Si les $X_k (k = 1, 2, \dots, n)$ sont des v.a. quelconques, on a pour tout $\varepsilon > 0$ et $r > 0$

$$(A) \quad P[|S_n^{**}| \geq \varepsilon] \leq P[\max_{k \leq n} |S_k^{**}| \geq \varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[|V_k|^r / (\varepsilon^r + |V_k|^r)],$$

$$(B) \quad P[|\hat{S}_n^{**}| \geq \varepsilon] \leq P[\max_{k \leq n} |\hat{S}_k^{**}| \geq \varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[|W_k|^r / (\varepsilon^r k^r + |W_k|^r)],$$

$$(C) \quad P[|\tilde{S}_n^{**}| \geq n\varepsilon] \leq P[\max_{k \leq n} |\tilde{S}_k^{**}| \geq n\varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[|Z_k|^r / (\varepsilon^r n^r + |Z_k|^r)],$$

et dans le cas de l'existence de l'espérance mathématique finie EX_k

$$(D) \quad P[|S_n^{**}| \geq \varepsilon] \leq P[\max_{k \leq n} |S_k^{**}| \geq \varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[|V_k^*|^r / (\varepsilon^r + |V_k^*|^r)],$$

$$(E) \quad P[|\hat{S}_n^{**}| \geq \varepsilon] \leq P[\max_{k \leq n} |\hat{S}_k^{**}| \geq \varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[|W_k^*|^r / (\varepsilon^r k^r + |W_k^*|^r)],$$

$$(F) \quad P[|\tilde{S}_n^{**}| \geq n\varepsilon] \leq P[\max_{k \leq n} |\tilde{S}_k^{**}| \geq n\varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[|Z_k^*|^r / (\varepsilon^r n^r + |Z_k^*|^r)].$$

Démonstration. Il suffit de démontrer l'inégalité (A). Soit $A_k^{**} = \bigcap_{j=1}^k [|S_j^{**}| \leq \varepsilon]$, $B_k^{**} = A_{k-1}^{**} \cap [|S_{k-1}^{**}| \geq \varepsilon]$.

En observant que

$$[|S_k^{**}| \geq \varepsilon] \subset [[|S_{k-1}^{**}| \geq \varepsilon] \cup [V_k \neq 0]]$$

$$(\text{puisque } [|X+Y| \geq \varepsilon] \cap [Y = 0] \subset [|X| \geq \varepsilon]$$

$$\text{et } [|X+Y| \geq \varepsilon] \cap [Y \neq 0] \subset [Y \neq 0]),$$

nous avons

$$B_k^{**} \subset \{ A_{k-1}^{**} \cap [[|S_{k-1}^{**}| \geq \varepsilon] \cup [V_k \neq 0]] \} = A_{k-1}^{**} \cap [V_k \neq 0] \\ \subset [V_k \neq 0],$$

donc

$$P[\max_{k \leq n} |S_k^{**}| \geq \varepsilon] = P(\bigcup_{k=1}^n [|S_k^{**}| \geq \varepsilon]) = P[\sum_{k=1}^n B_k^{**}] = \sum_{k=1}^n P[|X_k| \geq \varepsilon] \\ = \sum_{k=1}^n EI_{[|X_k| \geq \varepsilon]} \leq 2 \sum_{k=1}^n E[|X_k|^r / (\varepsilon^r + |X_k|^r)] I_{[|X_k| \geq \varepsilon]},$$

ce qui termine la démonstration. Les autres inégalités sont démontrées d'une façon analogue par la mise en oeuvre des notations appropriés de 2. La formulation explicite de toutes ces inégalités est donnée pour faciliter les développements ultérieurs. La convergence en probabilité de séries et de suites aléatoires.

La convergence en probabilité de séries et de suites aléatoires

4. Inégalités utiles dans l'étude de la convergence en probabilité de séries et suites de v.a. indépendantes.

Lemme 2. Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. indépendantes, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$(I) \quad P[|S_n - ES_n| \geq 2\varepsilon \geq 2 \sum_{k=1}^n E[X_k^2/(\varepsilon^2 + X_k^2)] - \sum_{k=1}^n E^2 U_k/\varepsilon^2,$$

ou (en supposant l'existence de l'espérance mathématique EX_k)

$$(I^0) \quad P[|S_n - ES_n^*| \geq 2\varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[X_k^{02}/(\varepsilon^2 + X_k^{02})] - \sum_{k=1}^n E^2 U_k^*/\varepsilon^2.$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité élémentaire, $P(|X + Y| \geq 2\varepsilon) \leq P[|X| \geq \varepsilon] + P[|Y| \geq \varepsilon]$, on a

$$(1) \quad P[|S_n - ES_n| \geq 2\varepsilon] \leq P[|S_n' - ES_n'| \geq \varepsilon] + P[|S_n''| \geq \varepsilon].$$

Par l'inégalité de Tchebycheff, nous avons

$$P[|S_n' - ES_n'| \geq \varepsilon] \leq \sigma^2 S_n'/\varepsilon^2.$$

En remarquant maintenant que

$$\begin{aligned} \sigma^2 S_n'/\varepsilon^2 &= \sum_{k=1}^n E \frac{X_k^2}{\varepsilon^2} I_{[|X_k| < \varepsilon]} - \sum_{k=1}^n E^2 \frac{X_k}{\varepsilon} I_{[|X_k| < \varepsilon]} \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^n E[X_k^2/(\varepsilon^2 + X_k^2)] I_{[|X_k| < \varepsilon]} - \sum_{k=1}^n E^2 U_k/\varepsilon^2, \end{aligned}$$

on a

$$(2) \quad P[|S_n' - ES_n'| \geq \varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[U_k^2/(\varepsilon^2 + U_k^2)] - \sum_{k=1}^n E^2 U_k/\varepsilon^2.$$

En ajoutant (2) et (A) par (1), nous avons (I).

Les inégalités (I) et (I⁰) seront utilisées pour l'étude de la convergence en probabilité des séries ΣX_n ou ΣX_n^0 respectivement. Pour obtenir une inégalité utile dans l'étude de la stabilité en probabilité S_n/n , il faut substituer, dans l'inégalité (I) X_k/n à X_k et \bar{S}_n/n à S_n . Pour donner les conditions faisant que la suite X_n obéisse à la l. faible g. n., il sera fait appel à l'inégalité (I⁰) où à X_k^0 on a substitué X_k^0/n et à S_n^* on a substitué \bar{S}_n^*/n . Les démonstrations de ces inégalités transformées sont effectuées de manière analogue après avoir utilisé des notations appropriées de 2.

Comme dans certaines considérations nous avons affaire à des cas spéciaux de variables aléatoires indépendantes (p. ex. v. a. symétriques), il est intéressant d'en analyser de plus près certaines. Pour ces classes de v. a. les inégalités du lemme 2 revêtiront une forme plus "élégante".

Lemme 2': Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. indépendantes, telles que $EU_k = 0$ ou $EU_k^* = 0$, et $EY_k = 0$ ou $EY_k^* = 0$ pour tout k (p. ex. si X_k sont symétriques par rapport à l'origine ou symétriques par rapport à l'espérance mathématique EX_k), on a

$$(I_1) \quad P[|S_n| \geq 2\varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[X^2 / (\varepsilon_k^2 + X_k^2)],$$

et

$$(I_1^0) \quad P[|S_n^0| \geq 2\varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[X_k^{02} / (\varepsilon^2 + X_k^{02})]$$

respectivement.

Ces inégalités, comme il est aisé de l'observer, constituent dans le cas considéré un renforcement de l'inégalité de Tchebycheff.

Dans l'étude de la convergence en probabilité, presque sûre et essentielle de la série de v. a. indépendantes un rôle important est joué par la méthode de la symétrisation des v. a. C'est pourquoi l'inégalité pour les v. a. symétrisées est fort opportue. C'est une telle inégalité que donne

Lemme 3. Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont de v.a. indépendantes, et X_k^s les v. a. symétrisées correspondant aux X_k , on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$(II) \quad P[|S_n^s| \geq 2\varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[(X_k^s)^2 / \varepsilon^2 + (X_k^s)^2],$$

et en particulier

$$(II') \quad P[|S_n^s| \geq 2n\varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[(X_k^s)^2 / (n^2 \varepsilon^2 + (X_k^s)^2)].$$

La démonstration des ces inégalités s'effectue de la même façon que celle du lemme 2.

L'inégalité faible de la symétrisation et l'inégalité des lemmes précédents permettent d'obtenir des inégalités bornant la probabilité de la déviation de la somme des v. a. de sa médiane. Cette borne est donnée dans les termes des moments de certaines fonctions des grandeurs X_k de cette somme.

Lemme 4. Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont de v.a. indépendantes, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} P[|S_n - m(S_n)| \geq 4\varepsilon] \\ P[|S_n^s| \geq 4\varepsilon] \end{array} \right\} \leq 4 \sum_{k=1}^n E[(X_k^s)^2 / ((2\varepsilon)^2 + (X_k^s)^2)],$$

$$(III') \quad \left\{ \begin{array}{l} P[|S_n - m(S_n)| \geq 4\varepsilon] \\ P[|S_n^s| \geq 4\varepsilon] \\ P[|S_n - ES_n| \geq 2\varepsilon] \end{array} \right\} \leq 4 \left\{ 2 \sum_{k=1}^n E[X_k^2 / (\varepsilon^2 + X_k^2)] - \sum_{k=1}^n E^2 U_k / \varepsilon^2 \right\},$$

où $m(X)$ désigne une médiane de X .

Démonstration. Utilisant l'inégalité faible de la symétrisation

$$(3) \quad P[|X - m(X)| \geq 4\varepsilon] \leq 2P[|X^s| \geq 4\varepsilon] \\ \leq 4P[|X - a| \geq 2\varepsilon] \quad ([10], \text{ p. 245}),$$

vraie pour tout $\varepsilon > 0$ et $a > 0$, et du lemme 2, 2', et 3, posant $X = S_n$, $X^s = S_n^s$ et substituant ES_n^s à a , nous obtenons les inégalités requises.

On peut donner des inégalités analogues pour les v. a. centrées sur l'espérance mathématique.

Considérons maintenant certaines généralisations des inégalités mentionnées, consistant à remplacer la seconde puissance des v. a. ($r = 2$) par une puissance telle que $r \geq 1$.

D'abord nous prendrons en considération le cas $1 \leq r \leq 2$. Dans l'étude de ce cas un rôle important revient à l'inégalité de Bengt von Bahr et Carl - Gustav Essen [1].

Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v. a. indépendantes avec $EX_k = 0$, alors $E|S_n|^r \leq [1 - D(r)]^{-1} \sum_{k=1}^n E|X_k|^r$, où r obéit aux inégalités suivantes

$$(4) \quad D(r) = [13,52/(\pi 2,6)^r] \Gamma(r) \sin \pi r / 2 < 1$$

et

$$1 \leq r \leq 2;$$

ou

$$E|S_n|^r \leq (2 - n^{-1}) \sum_{k=1}^n E|X_k|^r.$$

Donc nous pouvons appliquer l'inégalité

$$(5) \quad E|S_n|^r \leq M(r, n) \sum_{k=1}^n E|X_k|^r,$$

où $M(r, n) = \min\{2 - n^{-1}, [1 - D(r)]^{-1}\}$ si (4) est satisfait et $M(r, n) = 2 - n^{-1}$ au cas contraire.

Lemme 5. Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v. a. indépendantes, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$(IV) \quad P[|S_n - ES_n| \geq 2\varepsilon] \leq 4c_r M(r, n) \sum_{k=1}^n E[|X_k|^r / (\varepsilon^r + |X_k|^r)],$$

ou (en supposant l'existence de l'espérance mathématique EX_k)

$$(IV^0) \quad P[|S_n^0 - E\tilde{S}_n^*| \geq 2\varepsilon] \leq 4c_r M(r, n) \sum_{k=1}^n E[|X_k^0|^r / (\varepsilon^r + |X_k^0|^r)],$$

où $1 \leq r \leq 2$ et $c_r = 2^{r-1}$.

Démonstration. Il suffit de démontrer (IV). En utilisant l'inégalité de A. Markoff, nous obtenons

$$P[|S'_n - ES'_n| \geq \varepsilon] \leq E|S'_n - ES'_n|^r / \varepsilon^r.$$

L'inégalité (5) permet d'écrire

$$E|S'_n - ES'_n|^r / \varepsilon^r \leq M(r, n) \sum_{k=1}^n E|U_k - EU_k|^r / \varepsilon^r.$$

En utilisant maintenant l'inégalité où $c_r = 2^{r-1}$ pour $r \geq 1$ ([10], p. 155), et $E|X| \leq (E|X|^r)^{1/r}$, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-r} E|U_k - EU_k|^r &\leq \varepsilon^{-r} c_r (E(|U_k|^r + E^r|U_k|) \leq 2c_r \varepsilon^{-r} E|U_k|^r \\ &\leq 4c_r E[|U_k|^r / (\varepsilon^r + |U_k|^r)]. \end{aligned}$$

Et donc

$$(6) \quad P[|S'_n - ES'_n| \geq \varepsilon] \leq 4c_r M(r, n) \sum_{k=1}^n E[|U_k|^r / (\varepsilon^r + |U_k|^r)].$$

En ajoutant (6) et (A) par (1), nous avons (IV).

Pour les v. a. considérées dans le lemme 2 nous obtenons

Lemme 5'. Dans les conditions du lemme 2', on a

$$(IV_1) \quad P[|S_n| \geq 2\varepsilon] \leq 2c_r M(r, n) \sum_{k=1}^n E[|X_k|^r / (\varepsilon^r + |X_k|^r)],$$

ou

$$(IV_1^0) \quad P[|S_n^0| \geq 2\varepsilon] \leq 2c_r M(r, n) \sum_{k=1}^n E[|X_k^0|^r / (\varepsilon^r + |X_k^0|^r)].$$

Les inégalités (IV₁) et (IV₁⁰) dans le cas étudié renforcent l'inégalité de Markoff. Pour les v. a. symétrisées, nous avons

Lemme 6. Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v. a. indépendantes, et X_k^s les v. a. symétrisées correspondant aux X_k , on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$(V) \quad P[|S_n^s| \geq 2\varepsilon] \leq 2c_r M(r, n) \sum_{k=1}^n E[|X_k^s|^r / (\varepsilon^r + |X_k^s|^r)],$$

et en particulier

$$(V') \quad P[|S_n^s| \geq 2n\varepsilon] \leq 2c_r M(r, n) \sum_{k=1}^n E[|X_k^s|^r / (n^r \varepsilon^r + |X_k^s|^r)].$$

On peut transformer de manière analogue le lemme 4.

Lemme 7. Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v. a. indépendantes, on a pour tout $\varepsilon > 0$.

$$(VI) \quad \left\{ \begin{array}{l} P[|S_n - m(S_n)| \geq 4\varepsilon] \\ P[|S_n^s| \geq 4\varepsilon] \end{array} \right\} \leq 4c_r M(r, n) \sum_{k=1}^n E[|X_k^s|^r / ((2\varepsilon)^r + |X_k^s|^r)],$$

$$(VI') \quad \left\{ \begin{array}{l} P[|S_n - m(S_n)| \geq 4\varepsilon] \\ P[|S_n^s| \geq 4\varepsilon] \\ P[|S_n - ES_n| \geq 2\varepsilon] \end{array} \right\} \leq 16c_r M(r, n) \sum_{k=1}^n E[|X_k|^r / (\varepsilon^r + |X_k|^r)].$$

Considérons à présent le cas où $r > 2$. Dans ces considérations un rôle important reviendra à l'inégalité de Marcinkiewicz et Zygmund [11].

Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v. a. indépendantes avec $EX_k = 0$, on a

$$(7) \quad E|S_n|^{2r} \leq c'_r n^{r-1} \sum_{k=1}^n E|X_k|^{2r}$$

où $r \geq 1$, et c'_r est une constante dépendante de r .

Grâce à (7) nous pouvons démontrer

Lemme 8. *Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v. a. indépendantes, on a pour tout $\varepsilon > 0$*

$$(VII) \quad P[|S_n - ES_n| \geq 2\varepsilon] \leq 4c'_r n^{r-1} \sum_{k=1}^n E[|X_k|^{2r}/(\varepsilon^{2r} + |X_k|^{2r})],$$

ou (en supposant l'existence de l'espérance mathématique EX_k)

$$(VII^0) \quad P[|S_n^0 - ES_n^*| \geq 2\varepsilon] \leq 4c'_r n^{r-1} \sum_{k=1}^n E[|X_k^0|^{2r}/(\varepsilon^{2r} + |X_k^0|^{2r})],$$

où $r \geq 1$ et $c'_r \geq 1$.

La démonstration de ce lemme est en principe la même que les démonstrations des lemmes précédents si l'on utilise l'inégalité de Marcinkiewicz et Zygmund pour les v. a. tronquées.

Des transformations analogues se laissent effectuer dans le lemme 3. En écrivant cependant ici les inégalités pour les moyennes, par l'inégalité (7) nous obtenons

Lemme 9. *Si les X ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v. a. indépendantes, on a pour tout $\varepsilon > 0$*

$$(VIII) \quad \left\{ \begin{array}{l} P[|S_n/n - m(S_n/n)| \geq 4\varepsilon] \\ P[|S_n^g| \geq 4n\varepsilon] \end{array} \right\} \leq 4c'_r n^{r-1} \sum_{k=1}^n E[|X_k^g|^{2r}/((2n\varepsilon)^{2r} + |X_k^g|^{2r})],$$

$$(VIII') \quad \left\{ \begin{array}{l} P[|S_n/n - m(S_n/n)| \geq 4\varepsilon] \\ P[|S_n^g| \geq 4n\varepsilon] \\ P[|S_n - ES_n| \geq 2n\varepsilon] \end{array} \right\} \leq 4c'_r n^{r-1} \sum_{k=1}^n E[|X_k|^{2r}/((n\varepsilon)^{2r} + |X_k|^{2r})]$$

où $r \geq 1$.

Prenons finalement en considération les v. a. indépendantes à la même répartition. Dans ce cas nous aurons besoin seulement d'inégalités pour les moyennes. Nous pouvons démontrer.

Lemme 10. *Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v. a. indépendantes à la même répartition, on a pour tout $\varepsilon > 0$*

$$(IX) \quad P[|S_n - ES_n| \geq 2n\varepsilon] \leq 2nc_r M(r, n) E[|X|^r]/((n\varepsilon)^r + |X|^r)$$

pour $1 \leq r < 2$,

$$(IX') \quad P[|S_n - ES_n| \geq 2n\varepsilon] \leq 4c'_r n^r E[|X|^{2r}/((n\varepsilon)^{2r} + |X|^{2r})] \quad \text{pour } r \geq 1;$$

ou (en supposant l'existence de l'espérance mathématique EX_k)

$$(IX^0) \quad P[|S_n^{\circ} - ES_n^{\circ}| \geq 2n\varepsilon] \leq 2nc_r M(r, n) E[|X^{\circ}|^r / ((n\varepsilon)^r + |X^{\circ}|^r)]$$

pour $1 \leq r \leq 2$,

$$(IX^{0'}) \quad P[|S_n^{\circ} - ES_n^{\circ}| \geq 2n\varepsilon] \leq 4c'_r n^r E[|X^{\circ}|^{2r} / ((n\varepsilon)^{2r} + |X^{\circ}|^{2r})] \text{ pour } r \geq 1,$$

où c_r , c'_r et $M(r, n)$ désignent des grandeurs introduites précédemment.

La démonstration est conforme au raisonnement des démonstrations des lemmes précédents.

Remarque. Observons que, en supposant l'existence de l'espérance mathématique $EX_k = \mu$, $ES_n^{\circ}/n \rightarrow \mu$, et $ES_n^{\circ}/n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Donc, des n suffisamment grands ($n > N$), les inégalités (IX), (IX'), (IX⁰), (IX^{0'}) donnent une borne de $P[|S_n^{\circ}| \geq 2n\varepsilon]$. Les inégalités ainsi transformées donnent une borne plus précise de la probabilité de $P[|S_n^{\circ}| \geq 2n\varepsilon]$ que les inégalités de Brillinger [2], qui estiment la rapidité de la convergence S_n/n vers μ . En outre, ces inégalités comportent seulement des quantités explicites et ainsi les inégalités données dans [2] constituent des cas particuliers des inégalités du lemme 10.

5. Les conditions de la convergence en probabilité de la série de variables aléatoires indépendantes.

Théorème 1. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes, telles que $\Sigma(2a_n(2) - b_n) < \infty$, ou dans le cas de l'existence de l'espérance mathématique finie EX_n , $\Sigma(2a_n^{\circ}(2) - b_n^{\circ}) < \infty$, on a $\Sigma(X_n - EU_n) < \infty$, ou $\Sigma(X_n^{\circ} - EU_n^{\circ}) < \infty$ en probabilité respectivement.

Démonstration. La démonstration de ce théorème résulte aussitôt de l'inégalité (I) notée sous forme de

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} P[|(S_{n+k} - ES_{n+k}) - (S_k - ES_k)| \geq 2\varepsilon] \leq \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=k+1}^{n+k} (2a_i(2) - b_i) = 0,$$

et l'inégalité (I⁰) notée sous une forme analogue.

Les inégalités (I₁) et (I₁⁰) permettent de formuler des théorèmes analogues (plus effectifs) pour la classe de v. a. considérées du lemme 2'.

Remarque. Comme la convergence en probabilité de la série de v.a. indépendantes équivaut à la convergence presque sûre de cette série ([10], p. 249), donc les conditions de théorème 1 sont également des conditions de la convergence presque sûre des séries données considérées.

Lemme 5 permet de démontrer

Théorème 1'. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes telles que $\Sigma a_n(r) < \infty$, ou dans le cas de l'existence de l'espérance mathématique EX_n ,

$\Sigma a_n^\circ(r) < \infty$, où $1 \leq r \leq 2$, on a $\Sigma(X_n - EU_n) < \infty$, ou $\Sigma(X_n^\circ - EU_n^*) < \infty$ en probabilité respectivement.

Dans le cas particulier, lorsque $r = 1$, nous pouvons obtenir un résultat plus fort. Notamment.

Corollaire 1. *Dans les conditions du théorème 1', la convergence des séries $\Sigma a_n(1)$, $\Sigma a_n^\circ(1)$ sont des conditions suffisantes pour la convergence en probabilité des séries ΣX_n et ΣX_n° respectivement.*

Démonstration. Il suffit d'observer que la convergence de la série $\Sigma a_n(1)$ implique la convergence de la série ΣEU_n . Il résulte de l'inégalité

$$|EU_n| \leq 2E[|U_n|/(\varepsilon + |U_n|)] \leq 2E[|X_n|/(\varepsilon + |X_n|)] = 2a_n(1).$$

Remarquons que pour certaines classes particulières des v. a. on peut donner les conditions nécessaires et suffisantes de la convergence en probabilité de la série ΣX_n . Pour ex. on peut démontrer.

Théorème 2. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que $EU_n = 0$ pour tout n , alors la convergence de la série $\Sigma a_n(2)$ est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence en probabilité de la série ΣX_n .*

Démonstration. La suffisance résulte du théorème 1'. Etant donné que la convergence en probabilité de la série de v. a. indépendantes équivaut à la convergence presque sûre de cette série, il suffit de démontrer, à partir du critère des trois séries de Kolmogoroff, que:

$$\Sigma EU_n < \infty, \Sigma P[|X_n| \geq \varepsilon] < \infty \text{ et } \Sigma \sigma^2 U_n < \infty \text{ ([10], p. 237)}.$$

L'observation que dans la condition $EU_n = 0$, la convergence des séries $\Sigma P[|X_n| \geq \varepsilon]$ et ΣEU_n^2 équivaut à la convergence de la série $\Sigma a_n(2)$, termine la démonstration. La dernière équivalence résulte de l'inégalité.

$$E[V_n^2/(\varepsilon^2 + V_n^2)] \leq P[|X_n| \geq \varepsilon] \leq 2E[V_n^2/(\varepsilon^2 + V_n^2)], \text{ et} \\ E[U_n^2/(\varepsilon^2 + U_n^2)] \leq EU_n^2/\varepsilon^2 \leq 2E[U_n^2/(\varepsilon^2 + U_n^2)].$$

Il importe de signaler un cas particulier de ce théorème, qui concerne les v. a. symétrisées. L'inégalité (II) permet d'obtenir.

Théorème 3. *Si $\{X_n\}$ est une suite des v.a. indépendantes et si $\{X_n^s\}$ est la suite des v. a. symétrisées correspondant aux X_n , alors la convergence de la série $\Sigma h_n(2)$ est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence en probabilité de la série ΣX_n^s .*

En substituant, dans les théorèmes 2 et 3, aux conditions $\Sigma a_n(2) < \infty$, $\Sigma h_n(2) < \infty$ les conditions $\Sigma a_n(r) < \infty$, $\Sigma h_n(r) < \infty$, nous pouvons seulement démontrer

Théorème 2'. *Dans les conditions du théorème 2, la convergence de la série $\Sigma a_n(r) < \infty$ ($1 \leq r \leq 2$), est une condition suffisante pour la convergence en probabilité de la série ΣX_n .*

La démonstration résulte de l'inégalité (IV).

Théorème 3'. *Dans les conditions du théorème 3, la convergence de la série $\Sigma h_n(r)$ ($1 \leq r \leq 2$) est une condition suffisante pour la convergence en probabilité de la série ΣX_n^0 .*

La démonstration résulte de l'inégalité (V).

Des théorèmes analogues se laissent formuler pour les v. a. centrées sur l'espérance mathématique.

Nous remarquons maintenant que les inégalités (III) et (VI) permettent de donner les conditions suffisantes de la convergence en probabilité des séries symétrisées de v. a., exprimées par des v. a. auxquelles on a appliqué la symétrisation.

Théorème 4. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que $\Sigma(2a_n(2) - b_n) < \infty$, ou $\Sigma a_n(r) < \infty$, où $1 \leq r \leq 2$, alors la série ΣX_n^0 est convergente en probabilité.*

Evidemment, le théorème 4 est aussi une conséquence directe des théorèmes 1 et 1', grâce à l'équivalence essentielle de la convergence p. s. des séries de v. a. symétrisées, mais comme ce théorème a été obtenu par des inégalités, il fournit une certaine information sur la rapidité de la convergence de la série de v. a. symétrisées. Cette information est exprimée en des termes primitifs des v. a.. Ceci concerne également les théorèmes précédents qui fournissent une certaine information sur la rapidité de la convergence en probabilité de la série $\Sigma X_n, \Sigma(X_n - EU_n)$; ou $\Sigma X_n^0, \Sigma(X_n^0 - EU_n^0)$.

Du théorème 4 nous obtenons

Corollaire 2. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que $\Sigma(2a_n(2) - b_n) < \infty$, alors $\Sigma h_n(2) < \infty$.*

6. Stabilité de S_n/n et la loi faible des grands nombres.

Les inégalités (I), (IV), (VII) transformées convenablement permettent de démontrer.

Théorème 5. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes telles que: $\sum_{k=1}^n (2e_k(2) - f_k) \rightarrow 0$, ou $\sum_{k=1}^n e_k(r) \rightarrow 0$, où $1 \leq r \leq 2$, ou $\sum_{k=1}^n u_k(2r) \rightarrow 0$, où $r \geq 1, n \rightarrow \infty$, alors on a (i).*

Dans le cas de l'existence de l'espérance mathématique finie, on peut donner les conditions de la stabilité en probabilité de S_n^0/n . Nous nous bornerons seulement à donner les conditions de la satisfaction de la 1. faible g. n., c'est-à-dire pour que $S_n^0/n \xrightarrow{P} 0$. Nous observons cependant d'abord que le lemme 7 permet de démontrer

Théorème 6. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes telles que

$$\sum_{k=1}^n t_k(r) \rightarrow 0, \quad 1 \leq r \leq 2, \quad n \rightarrow \infty,$$

alors $S_n/n - m(S_n/n) \xrightarrow{P.} 0$, et $S_n^s/n \xrightarrow{P.} 0$, $n \rightarrow \infty$.

Théorème 7. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes telles que

$$\sum_{k=1}^n (2e_k(2) - f_k) \rightarrow 0, \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^n e_k(r) \rightarrow 0,$$

$$\text{où } 1 \leq r \leq 2, \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^n u_k(2r) \rightarrow 0, \quad r \geq 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

alors $S_n/n - m(S_n/n) \xrightarrow{P.} 0$, $S_n^s/n \xrightarrow{P.} 0$, et $S_n/n - ES_n^s/n \xrightarrow{P.} 0$, $n \rightarrow \infty$.

Remarque. Observons que le théorème 6 donne les conditions pour la convergence en probabilité vers zéro $S_n/n - m(S_n/n)$ et S_n^s/n qui sont exprimées en termes de v. a. symétrisées. A cause de la symétrisation, la vérification de la satisfaction de ces conditions n'est pas toujours facile dans la pratique. C'est pourquoi il convient d'avoir (pour des raisons pratiques) ces conditions exprimées en termes de v. a. de la suite initiale. Ces conditions données le théorème 7.

Des théorèmes analogues, formulés pour des v. a. X_n^0 peuvent s'avérer utiles dans la formulations des conditions de la satisfaction de la l. faible des g. n. Observons qu'entre autres on peut démontrer.

Théorème 8. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes telles qu'il existe l'espérance mathématique EX_k ,

$$\sum_{k=1}^n u_k(2r) \rightarrow 0, \quad \text{où } r \geq 1, \quad \text{et} \quad m(S_n^0/n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

alors la suite $\{X_n\}$ obéit à la loi faible des grands nombres.

Nous formulerons a present quelques autres theoremes concernant la l. faible g. n.

Théorème 9. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que $\sum_{k=1}^n (2e_k^0(2) - f_k^*) \rightarrow 0$ et $ES_n^*/n \rightarrow 0$, ou $\sum_{k=1}^n e_k^0(r) \rightarrow 0$ et $ES_n^*/n \rightarrow 0$, où $1 \leq r \leq 2$, ou $\sum_{k=1}^n u_k^0(2r) \rightarrow 0$ et $ES_k^*/n \rightarrow 0$, où $r \geq 1$, $n \rightarrow \infty$, alors la suite $\{X_n\}$ obéit à la loi faible des grands nombres.

La démonstration résulte aussitôt des inégalités (I⁰), (IV⁰), (VII⁰), convenablement modifiées.

Dans le cas $r = 1$, nous pouvons obtenir un résultat plus fort.

Corollaire 3. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes telles que $\sum_{k=1}^n e_k^0(1) \rightarrow 0$, alors la suite $\{X_n\}$ obéit à la l. faible g. n.

Démonstration. Il suffit d'observer que la convergence de $\sum_{k=1}^n e_k^\circ(1)$ vers zéro implique la convergence de $E\tilde{S}_n^*/n$ vers zéro. Cela résulte de l'inégalité

$$|EY_k^*/n\varepsilon| \leq 2E[Y_k^*/(n\varepsilon + Y_k^*)] \leq 2E[X_k^\circ/(n\varepsilon + X_k^\circ)]$$

et du théorème 9.

Dans les conditions du lemme (2'), nous obtenons le critère pour la l. faible g. n.

Théorème 10. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes telles que $EY_k^* = 0$ pour tout k ($k = 1, 2, \dots, n$ et $n = 1, 2, \dots$), alors la convergence de $\sum_{k=1}^n E[X_k^{\circ 2}/(n^2 + X_k^{\circ 2})]$ vers zéro, est une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\{X_n\}$ obéisse à la l. faible g. n.

Démonstration. La suffisance résulte de l'inégalité modifiée (I°). La nécessité par contre résulte du critère de la convergence dégénérée de Kolmogoroff ([10], p. 278). Notamment les conditions

$$\sum_{k=1}^n P[|X_k^\circ| \geq n\varepsilon] \rightarrow 0, E\tilde{S}_n^*/n \rightarrow 0, \sigma^2 \tilde{S}_n^*/n^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

prenant dans l'hypothèse $EY_k = 0$ la forme

$$\sum_{k=1}^n P[|X_k^\circ| \geq n\varepsilon] \rightarrow 0, \sum_{k=1}^n EY_k^{*2}/n^2\varepsilon^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

équivalent à la condition $\sum_{k=1}^n E[X_k^{\circ 2}/(n^2\varepsilon^2 + X_k^{\circ 2})] \rightarrow 0$.

En effet, vu que

$$E[Z_k^{*2}/(n^2\varepsilon^2 + Z_k^{*2})] \leq P[|X_k^\circ| \geq n\varepsilon] \leq 2E[Z_k^{*2}/(n^2\varepsilon^2 + Z_k^{*2})],$$

et

$$E[Y_k^{*2}/(n^2\varepsilon^2 + Y_k^{*2})] \leq EY_k^{*2}/n^2\varepsilon^2 \leq 2E[Y_k^{*2}/(n^2\varepsilon^2 + Y_k^{*2})].$$

En ajoutant les deux dernières inégalités, nous obtenons l'équivalence requise.

Ce théorème non seulement donne, dans le cas considéré, le critère de de la loi faible des grands nombres, mais encore, grâce à l'inégalité modifiées (II°), il informe de la rapidité de la convergence en probabilité de S_n°/n vers zéro.

Etant donné que les v. a. symétrisées satisfont la condition $E X_k^\circ I_{[|X_k^\circ| < n\varepsilon]} = 0$, nous pouvons formuler pour elles un critère de la stabilité de la convergence en probabilité.

Théorème 11. Si $\{X_n\}$ est une suite de v. a. symétriques, alors la convergence de $\sum_{k=1}^n t_k(2)$ vers zéro, est une condition nécessaire et suffisante pour $S_n^*/n \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty$.

Remarque. Les théorèmes donnés ici, entre autres, renforceront la l. faible g. n. de Tchebycheff et de Markoff. En effet, de la condition de Tchebycheff $\sum_{k=1}^n \sigma^2 S_n/n^2 \rightarrow 0$ pour la l. faible g. n. il résulte que

$$\sum_{k=1}^n [2e_k^0(2) - f_k^*] \leq 2 \sum_{k=1}^n e_k^0(2) \leq 2 \sum_{k=1}^n \sigma^2 X_k/n^2 \varepsilon^2 \rightarrow 0,$$

et

$$|ES_n^*/n| = |ES_n^{**}/n| \leq \sum_{k=1}^n E|Z_k^*|/n \leq \sum_{k=1}^n \sigma^2 X_k/n^2 \varepsilon^2 \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire les conditions du théorème 9. Et quoiqu'elle ne soient pas toujours équivalentes du critère de Kolmogoroff de la convergence dégénérée, grâce aux inégalités appropriées elles fournissent une certaine information sur la rapidité de la convergence en probabilité de S_n^0/n .

Il importe encore d'attirer l'attention sur les conditions de la l. faible g. n. qui se laisse formuler grâce aux inégalités (III') et (VI') convenablement modifiées.

Théorème 12. Si $\{X_n\}$ est une suite de v. a. indépendantes telles qu'il existe l'espérance mathématique EX_n , et:

$$\sum_{k=1}^n [2e_k^0(2) - f_k^*] \rightarrow 0 \text{ et } m(S_n^0/n) \rightarrow 0, \text{ ou}$$

$$\sum_{k=1}^n e_k^0(r) \rightarrow 0 \text{ et } m(S_n^0/n) \rightarrow 0, \text{ où } 1 \leq r \leq 2, n \rightarrow \infty,$$

alors la suite $\{X_n\}$ obéit à la l. faible g. n.

Le dernier théorème peut s'avérer maniable dans l'étude de la l. faible g. n. pour ces classes de v. a. indépendantes pour lesquelles il est facile de vérifier si $m(S_n^0/n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Considérons maintenant la suite de v. a. indépendantes à la même répartition. Le théorème connu de Khintchine constate que l'existence de l'espérance mathématique est une condition suffisante pour que la suite $\{X_n\}$ obéisse à la l. faible g. n. Nous pouvons démontrer ici.

Théorème 13. Si $\{X_n\}$ est une suite de déterminations indépendantes d'une v. a. X , et s'il existe l'espérance mathématique finie $EX_k = \mu$, alors les suites:

(8)

$$\{nE[X^2/(n^2 + X^2)]I_{\{|X|>n\}}\}, \{nE[X^2/(n^2 + X^2)]I_{\{|X|<n\}}\}, \{nE[X^2/(n^2 + X^2)]\},$$

sont convergentes vers zéro et la suite $\{X_n\}$ obéit à la l. faible g. n.

Démonstration. Puisque l'existence de l'espérance mathématique EX_k implique la convergence simultanée des séries:

$$\sum E[X^2/(n^2 + X^2)]I_{[|X| \geq n]}, \sum E[X^2/(n^2 + X^2)]I_{[|X| < n]}, \sum E[X^2/(n^2 + X^2)] [17],$$

donc par là la convergence des suites (8) vers zéro. L'application de l'inégalité (IX) termine la démonstration.

A la fin des considérations concernant les v. a. indépendantes à la même répartition, observons que l'inégalité (IX) améliorée permet de démontrer d'une manière simple [3] le théorème de P. L. Hsu et H. Robbins [5] relatif à la convergence presque complète de la suite $\{S_n/n\}$.

Théorème 14. Si $\{X_n\}$ est une suite de déterminations indépendantes d'une même v. a. X , et s'il existe $EX_n^2 = EX^2$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|S_n - n\mu| \geq n\varepsilon] < \infty.$$

Démonstration. Remarquons que

$$\begin{aligned} P[|S_n - E\tilde{S}_n| \geq 2n\varepsilon] &\leq E[(\tilde{S}_n - E\tilde{S}_n)^4/n^4\varepsilon^4] + \sum_{k=1}^n P[|X_k| \geq n\varepsilon] \\ &\leq E[Y_k - EY_k]^4/n^3\varepsilon^4 + \frac{3(n-1)}{n^3\varepsilon^4} [E(Y_k - EY_k)^2]^2 + nP[|X_k| \geq n\varepsilon] \\ &\leq \frac{16}{n^3\varepsilon^4} EY_k^4 + \frac{3(n-1)}{n^3\varepsilon^4} E^2 Y_k^2 + nP[|X| \geq n\varepsilon]. \end{aligned}$$

Puisque l'existence du deuxième moment implique la convergence des séries: $\sum (E|X|^4 I_{[|X| < n\varepsilon]}/n^3)$, $\sum nP[|X| \geq n\varepsilon]$ et

$$\sum (E^2 X^2 I_{[|X| < n\varepsilon]}/n^2), \text{ ([3], p. 56, 57),}$$

at aussi celle des séries

$$\sum nE[X^4/(n^4\varepsilon^4 + X^4)]I_{[|X| < n\varepsilon]}, \sum nE[X^4/(n^4\varepsilon^4 + X^4)]I_{[|X| \geq n\varepsilon]}.$$

D'où

(9)

$$P[|S_n - E\tilde{S}_n| \geq 2n\varepsilon] \leq 32nE[X^4/(n^4\varepsilon^4 + X^4)] + \frac{3(n-1)}{n^3\varepsilon^4} E^2 X^2 I_{[|X| < n\varepsilon]}.$$

Et comme les expressions de droite sont des expressions d'une série convergente, $\sum P[|S_n - E\tilde{S}_n| \geq 2n\varepsilon] < \infty$. Mais $E\tilde{S}_n/n \rightarrow \mu$, donc $\sum P[|S_n - n\mu| \geq n\varepsilon] < \infty$, ce qui prouve la convergence presque complète de S_n/n .

Nous sommes en état de démontrer le théorème plus fort.

Théorème 15. Si $\{X_n\}$ est une suite de déterminations indépendantes d'une même v. a. X , alors les séries:

(10)

$$\sum nE[X^4/(n^4 + X^4)]I_{[|X| < n]}, \sum nE[X^4/(n^4 + X^4)]I_{[|X| \geq n]}, \sum nE[X^4/(n^4 + X^4)],$$

sont équivalentes deux à deux en convergence, et la convergence de chacune d'elles est une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait $EX^2 < \infty$; par suite, elle est une condition nécessaire et suffisante pour que $\Sigma P[|S_n - n\mu| \geq n\varepsilon] < \infty$.

Démonstration. La vérité du théorème résulte de ce que la convergence des séries:

$$\Sigma nE[X^4/(n^4 + X^4)]I_{\{|X| < n\}}, \Sigma nE[X^4/(n^4 + X^4)]I_{\{|X| \geq n\}},$$

est équivalente de la convergence des séries: $\Sigma(EX^4 I_{\{|X| < n\}}/n^3) \Sigma nP[|X| \geq n]$; et la convergence de chacune des deux dernières séries est équivalente pour qu'on ait EX^2 ([3], p. 56, 57).

Ainsi donc la convergence des séries (10) constitue une condition nécessaire et suffisante de la convergence presque complète de S_n/n . Ce qui plus est, grâce à l'inégalité (9), nous avons la possibilité d'estimer la rapidité de cette convergence et ceci peut servir dans des considérations statistiques.

Les inégalités données dans 4. se laissent étendre, avec certaines modifications, sur les variables aléatoires dépendantes.

7. Inégalités utiles dans l'étude de la convergence en probabilité de séries et suites de v.a. dépendantes.

Lemme 11. Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. quelconques, alors on a pour tout $\varepsilon > 0$

(X)

$$P[|S_n - ES_n| \geq 2\varepsilon] \leq 2 \left\{ \sum_{k=1}^n E[X_k^2/(\varepsilon^2 + X_k^2)] + \varepsilon^{-2} \sum_{1 < j < k < n} \text{Cov}(U_j, U_k) \right\} - \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^n E^2 U_k,$$

ou (en supposant l'existence de l'espérance mathématique EX_k)

$$(X^0) \quad P[|S_n^0 - ES_n^0| \geq 2\varepsilon] \leq 2 \left\{ \sum_{k=1}^n E[X_k^{02}/(\varepsilon^2 + X_k^{02})] + \varepsilon^{-2} \sum_{1 < j < k < n} \text{Cov}(U_j^*, U_k^*) \right\} - \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^n E^2 U_k^*.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer (X). En utilisant l'inégalité de Tchebycheff, on a

$$(11) \quad \begin{aligned} P[|S_n - ES_n| \geq \varepsilon] &\leq \varepsilon^{-2} \sigma^2 S_n = \varepsilon^{-2} \left(\sum_{k=1}^n \sigma^2 U_k + 2 \sum_{1 < j < k < n} \text{Cov}(U_j, U_k) \right) \\ &= \varepsilon^{-2} \left(\sum_{k=1}^n E U_k^2 + 2 \sum_{1 < j < k < n} \text{Cov}(U_j, U_k) - \sum_{k=1}^n E^2 U_k \right) \\ &\leq 2 \left\{ \sum_{k=1}^n E[U_k^2/(\varepsilon^2 + U_k^2)] + \varepsilon^{-2} \sum_{1 < j < k < n} \text{Cov}(U_j, U_k) \right\} - \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^n E^2 U_k. \end{aligned}$$

En ajoutant l'inégalité (11) à l'inégalité (A), par (1), nous obtenons l'inégalité (X).

Nous obtiendrons des inégalités beaucoup plus faibles si nous utilisons les inégalités de Markoff et

$$E|S_n|^r \leq n^{r-1} \sum_{k=1}^n E|X_k|^r, r \geq 1.$$

Lemme 12. *Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. quelconques, on a pour tout $\varepsilon > 0$ et $r \geq 1$*

$$(XI) \quad P[|S_n - ES_n| \geq 2\varepsilon] \leq 4c_r n^{r-1} \sum_{k=1}^n a_k(r),$$

ou (en supposant l'existence de l'espérance mathématique EX_k)

$$(XI^0) \quad P[|S_n^0 - ES_n^0| \geq 2\varepsilon] \leq 4c_r n^{r-1} \sum_{k=1}^n a_k^0(r).$$

Pour certaines classes particulières de v. a. dépendantes, on peut obtenir des inégalités qui permettront d'étendre certains résultats obtenus dans les 4. et 5. pour les v. a. indépendantes sur certaines classes de v. a. dépendantes.

Lemme 13. *Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. telles que $\text{Cov}(U_j, U_k) \leq 0$, ou $\text{Cov}(U_j^*, U_k^*) \leq 0$, on a (I), ou (I⁰) respectivement.*

Si les sommes de v. a. tronquées forment une martingale, nous obtiendront des inégalités étendant (I₁) ou (I⁰).

Lemme 14. *Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. telles que les $EU_1 = 0, EU_k|U_1, U_2, \dots, U_{k-1} = 0$ p. s., ou $EU_1^* = 0, EU_k^*|U_1^*, U_2^*, \dots, U_{k-1}^* = 0$ p. s. ($k = 2, 3, \dots, n$), on a (I₁) et (I₁⁰) respectivement.*

Démonstration. Dans les conditions du lemme 14, par l'inégalité de Tchebycheff, nous obtenons

$$P[|S_n^*| \geq \varepsilon] \leq \sum_{k=1}^n EU_k^2/\varepsilon^2 \leq 2 \sum_{k=1}^n E[U_k^2/(\varepsilon^2 + U_k^2)].$$

En ajoutant cette inégalité à (A) par (1), on a (I₁).

Prenons maintenant en considérations les v. a. conditionnellement symétriques.

Lemme 15. *Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. telles que la répartition de tout U_{m+1} conditionné par S_m , ou de tout U_{m+1}^* conditionné par S_m^* sont symétriques $1 \leq m \leq n-1$, on a*

$$(XII) \quad P[|S_n| \geq 2\varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[|X_k|^r/(\varepsilon^r + |X_k|^r)],$$

et

$$(XII^0) \quad P[|S_n^0| \geq 2\varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[|X_k^0|^r/(\varepsilon^r + |X_k^0|^r)]$$

respectivement.

Démonstration. Etant donné que pour les v.a. obéissant aux conditions du lemme 15

$$E|S'_n|^r \leq \sum_{k=1}^n E|U_k|^r, \text{ pour } 1 \leq r \leq 2 \quad [1],$$

faisant un raisonnement analogue à ceux des démonstrations des lemmes précédents, nous obtenons (XII).

Mettant à profit l'étude [1] nous sommes encore état de démontrer

Lemme 16. Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. telles que $E(U_i | R_{mi}) = 0$ p. s. $1 \leq i \leq m+1 \leq n$, où $R_{mi} = \sum_{k=1, k \neq i}^{m+1} U_k$ ou $E(U_i^* | R_{mi}^*) = 0$ p. s. $1 \leq i \leq m+1 \leq n$, où $R_{mi}^* = \sum_{k=1, k \neq i}^{m+1} U_k^*$, on a

$$(XIII) \quad P[|S_n| \geq 2\varepsilon] \leq 2(2-n^{-1}) \sum_{k=1}^n E[|X_k|^r / (\varepsilon^r + |X_k|^r)],$$

et

$$(XIII^0) \quad P[|S_n^0| \geq 2\varepsilon] \leq 2(2-n^{-1}) \sum_{k=1}^n E[|X_k^0|^r / (\varepsilon^r + |X_k^0|^r)]$$

respectivement.

La démonstration du lemme 16 s'appuie sur l'inégalité

$$E|S'_n|^r \leq (2-n^{-1}) \sum_{k=1}^n E|X_k|^r \quad \text{pour } 1 \leq r \leq 2 \quad [1].$$

Lemme 17. Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. telles que $E(U_{m+1} | S'_m) = 0$ p. s. ou $E(U_{m+1}^* | S_m^*) = 0$ p. s., on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$(XIV) \quad P[|S_n| \geq 2\varepsilon] \leq 4 \sum_{k=1}^n E[|X_k|^r / (\varepsilon^r + |X_k|^r)],$$

et

$$(XIV^0) \quad P[|S_n^0| \geq 2\varepsilon] \leq 4 \sum_{k=1}^n E[|X_k^0|^r / (\varepsilon^r + |X_k^0|^r)]$$

respectivement.

La démonstration s'appuie sur l'inégalité

$$E|S'_n|^r \leq 2 \sum_{k=1}^n E|U_k|^r \text{ pour } 1 \leq r \leq 2 \quad [1],$$

qui est vraie dans les conditions du lemme 17.

8. La convergence en probabilité de certaines séries de variables aléatoires dépendantes.

Le lemme 11 permet de démontrer:

Théorème 16. Si les $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que v.a. $U_n^* - EU_n^*$, ou dans le cas de l'existence de l'espérance mathématique EX_n , v. a. $U_n - EU_n$

sont deux à deux orthogonaux, alors la convergence de la série $\Sigma(2a_n(2) - b_n)$ ou de la série $\Sigma(2a_n^{\circ}(2) - b_n^*)$ est une condition suffisante pour la convergence en probabilité $\Sigma(X_n - EU_n)$ et de $\Sigma(X_n^{\circ} - EU_n)$ respectivement.

Démonstration. Puisque les v.a. $U_n - EU_n$ sont deux à deux orthogonaux, donc $\text{Cov}(U_j, U_k) = 0$. Cette observation termine la démonstration grâce à l'inégalité (X). La deuxième partie de la démonstration résulte de la même façon de l'inégalité (X⁰).

Attirons maintenant l'attention sur certaines classes particulières de v. a. dépendantes. Les théorèmes donnant les conditions suffisantes pour la convergence en probabilité de la série de ces v. a. étendent les théorèmes analogues concernant la série de v. a. indépendantes.

Théorème 17. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que $\text{Cov}(U_j, U_k) \leq 0$, $\Sigma EU_n < \infty$ et $\Sigma(2a_n(2) - b_n) < \infty$, ou (en supposant l'existence mathématique EX_n) $\text{Cov}(U_j^*, U_k^*) \leq 0$, $\Sigma EU_n^* < \infty$ et $\Sigma(2a_n^{\circ}(2) - b_n^*) < \infty$, alors les séries ΣX_n , ou ΣX_n° sont convergentes en probabilité respectivement.

Corollaire 4. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que $\text{Cov}(U_j^*, U_k^*) \leq 0$, alors la convergence de la série $\Sigma \sigma^2 X_n$ est une condition suffisante pour la convergence en probabilité de la série ΣX_n° .

La vérité de ce corollaire résulte du théorème 18, si l'on observe que la convergence de la série $\Sigma \sigma^2 X_n$ implique la convergence de la série ΣEU_n^* .

Lemme 12 permet de formuler les conditions suffisantes de la convergence en probabilité de la série de v. a. quelconques. Ces conditions sont pourtant très exigeantes. En particulier, on peut démontrer.

Théorème 18. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. quelconques, alors la convergence de la série $\Sigma a_n(1)$ est une condition suffisante pour la convergence en probabilité de la série ΣX_n .

Pour les v. a. constituant dans leurs parties tronquées une martingale, nous pouvons démontrer des théorèmes voisins de ceux qui concernent la série de v. a. indépendantes.

A partir du lemme 14 nous avons

Théorème 19. Dans les conditions du lemme 14 la convergence des séries $\Sigma a_n(2)$ ou $\Sigma a_n^{\circ}(2)$ est une condition suffisante pour la convergence en probabilité des séries ΣX_n et ΣX_n° respectivement.

Pour des v. a. telles que la répartition de tout U_{m+1} conditionné par S_m , ou de tout U_{m+1}^* conditionné par S_m^* est symétrique, $1 \leq m \leq n-1$, alors nous pouvons obtenir.

Théorème 20. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que la répartition de tout U_{m+1} conditionné par S_m , ou tout U_{m+1}^* conditionné par S_m^* est symétrique, $1 \leq m \leq n-1$, alors la convergence des séries $\Sigma a_n(r)$ ou $\Sigma a_n^{\circ}(r)$, $1 \leq r \leq 2$, est une condition suffisante pour la convergence en probabilité des séries ΣX_n et ΣX_n° respectivement.

La démonstration de théorème résulte de lemme 15.

Lemmes 16 et 17 permettent encore de démontrer.

Théorème 21. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que $E(U_{m+1}|S_m) = 0$ p. s. et $\Sigma a_n(r) < \infty$, ou $E(U_{m+1}^*|S_m^*) = 0$ p. s. et $\Sigma a_n^0(r) < \infty$, $1 \leq r \leq 2$, alors les séries ΣX_n et ΣX_n^0 sont convergentes en probabilité.*

Théorème 22. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que $E(U_i|R_{mi}) = 0$ p. s. $1 \leq i \leq m+1 \leq n$ où $R_{mi} = \sum_{k=1, k \neq i}^{m+1} U_k$ et $\Sigma a_n(r) < \infty$, ou $E(U_i^*|R_{mi}^*) = 0$ p. s. $1 \leq i \leq m+1 \leq n$, où $R_{mi}^* = \sum_{k=1, k \neq i}^{m+1} U_k^*$ et $\Sigma a_n^0(r) < \infty$, $1 \leq r \leq 2$, alors les séries ΣX_n et ΣX_n^0 sont convergentes en probabilité.*

Remarque. Du lemme 11 il résulte que l'amélioration ultérieure des résultats considérés peut consister entre autres à imposer des hypothèses moins restrictives quant au degré de dépendance des v. a. tronquées.

9. La stabilité en probabilité de S_n/n et la lois faible des grands nombres dans le cas de variables aléatoires dépendantes.

Grâce aux inégalités données au 7. on peut formuler les conditions de la stabilité en probabilité de S_n/n ainsi que de la l. faible g. n. dans le cas de v. a. dépendantes. Ces résultats sont obtenus sans hypothèse quelconque relativement à la variance. Les résultats donnés ici généralisent entre autres les résultats de I. Koźniewska [7] qui étudiait les v. a. à variances également bornées.

Théorème 23. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que $\text{Cov}(Y_j, Y_k) \leq 0$ et $\sum_{k=1}^n (2e_k(2) - f_k) \rightarrow 0$, on a (i).*

La démonstration résulte de l'inégalité (X) convenablement transformée.

Théorème 24. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que*

$$(12) \quad \sigma^2 Y_k \leq L^2 \text{ pour tout } k, \text{ où } L \text{ est une constante positive,}$$

$$(13) \quad \sum_{k=1}^n (2e_k(2) - f_k) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

(14) *il existe pour tout $\eta > 0$ un entier positif m tel que*

$$\left| \frac{1}{n-m} \sum_{j=1}^m \text{Cov}(Y_k, Y_{k+j}) \right| < \eta/2,$$

pour tout $n > m$ et $k = 1, 2, \dots$, on a (i).

Démonstration. On a en vertu des conditions (12) et (14), pour tout $\delta > 0$, il existe tel N , que pour $n > N$

$$n^{-2} \left| \sum_{1 \leq j < k \leq n} \text{Cov}(Y_j, Y_k) \right| < \delta/2.$$

L'hypothèse (13) évidemment équivaut à l'inégalité

$$|\sum_{k=1}^n [2e_k(2) - f_k]| < \delta/2 \text{ pour } n > N.$$

En utilisant maintenant l'inégalité (X), convenablement modifiée, on a (i), que démontre le théorème 24.

Théorème 25. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que (13) est satisfait et

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{j=1}^n \sup_k |\text{Cov}(Y_k, Y_{j+k})| = 0$$

on a (i).

La démonstration de ce théorème résulte aussitôt de ce que (15) entraîne $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \text{Cov}(Y_j, Y_k) = 0$, donc avec (13) également (i).

Théorème 26. Dans les conditions (12) et (13) du théorème 25 et

$$(16) \quad n^{-1} \sum_{j=1}^n \sup |E'_j(Y_{j+k}) - EY_{j+k}| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

on a (i).

Démonstration. A partir du lemme A donné dans [9],

$$|\sum_{1 \leq j < k \leq n} \text{Cov}(Y_j, Y_k)| \leq \max_{j < k} E|\hat{S}'_{j-1}| \sum_{j=1}^n |E'_j(Y_{j+1}) - EY_{j+1}|.$$

Puisque par $\max_{j < k} E|\hat{S}'_{j-1}|/n$ est borné [9], donc (16) entraîne $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \times \sum_{1 \leq j < k \leq n} \text{Cov}(Y_j, Y_k) = 0$, et par cela avec (13), on a (i).

Comme il résulte de ces considérations, le renforcement des théorèmes mentionnés consiste à estimer plus précisément de $\sum_{1 \leq j < k \leq n} \text{Cov}(Y_j, Y_k)$.

Donnons encore les conditions de la stabilité en probabilité de S_n/n dans le cas de v. a. quelconques. L'inégalité (XI), convenablement modifiée, permet de formuler de telles conditions.

Théorème 27. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. quelconques et $n^{r-1} \sum_{k=1}^n e_k(r) \rightarrow 0$, $r \geq 1$, on a (i).

On peut donner des théorèmes analogues pour des v.a. ayant des espérances mathématiques finies. Sans répéter les formulations, en principe identiques, arrêtons — nous à la formulation de quelques théorèmes concernant la l. faible g.n.

Théorème 28. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que

$$(17) \quad \sigma^2 Y_k^* \leq L^2 \text{ pour tout } k, \text{ où } L \text{ est une constante positive,}$$

$$(18) \quad \sum_{k=1}^n [2e_k^0(2) - f_k] \rightarrow 0,$$

(19) il existe pour tout $\eta > 0$ un entier positif m tel que

$$\left| \frac{1}{n-m} \sum_{j=m}^n \text{Cov}(Y_k, Y_{k+j}) \right| < \eta/2$$

pour tout $n > m$ et $k = 1, 2, \dots$ et $ES_n^*/n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, on a (k).

La démonstration résulte de l'inégalité (XI), convenablement modifiée, et du raisonnement analogue fait dans la démonstration du théorème 24.

Corollaire 5. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que $\rho_{jk}(Y_j^*, Y_k^*) \leq 0$, ou $\rho_{jk}(Y_j^*, Y_k^*) \rightarrow 0$ uniforme, lorsque $|k-j| \rightarrow \infty$ (ρ_{jk} — coefficient de corrélation entre les v. a. Y_j^* et Y_k^*), alors la condition (18) est suffisante pour (k).

Le corollaire est une extension du problème ([4], p. 246).

On peut démontrer de façon analogue.

Théorème 29. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que (18) est satisfait,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{j=1}^n \sup_k |\text{Cov}(Y_k^*, Y_{j+k}^*)| = 0,$$

et $ES_n^*/n \rightarrow 0$, on a (k).

Théorème 30. Dans les conditions (17) et (18) du théorème 28 et si

$$n^{-1} \sum_{j=1}^n \sup_k |E_j(Y_{j+k}^*) - EY_{j+k}^*| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

et $ES_n^*/n \rightarrow 0$, on a (k).

Formulons encore les conditions suffisantes pour la l. faible g. n. qui concerneront des v. a. quelconques.

Théorème 31. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. quelconques que telles que $n^{r-1} \sum_{k=1}^n e_k^o(r) \rightarrow 0, r \geq 1, ES_n^*/n \rightarrow 0$, alors on a (k).

La démonstration résulte de l'inégalité (XI) convenablement modifiée.

Pour certaines classes particulières de v. a. dépendantes on peut formuler des théorèmes qui seront une extension des théorèmes analogues connus pour des v. a. indépendantes.

Pour les v. a. dont les sommes de v. a. tronquées forment une martingale, on peut démontrer.

Théorème 32. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que $EU_1^* = 0, EU_k^* | U_1^*, U_2^*, \dots, U_{k-1}^* = 0, p. s.$ et $\sum_{k=1}^n e_k^o(2) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, on a (k).

La démonstration résulte du lemme 14.

Théorème 33. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que la répartition de tout Y_{m+1}^* conditionné par S_m^* est symétrique et $\sum_{k=1}^n e_k^o(r) \rightarrow 0, 1 \leq r \leq 2$, on a (k).

La démonstration résulte du lemme 17.

Remarque. Dans le cas des v.a. indépendantes le théorème 9 est un cas particulier du théorème 33.

Les lemmes 16 et 17 permettent de démontrer.

Théorème 34. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que $E(Y_{m+1}^* | S_m^*) = 0$ p. s. et $\sum_{k=1}^n e_k^o(r) \rightarrow 0$, où $1 \leq r \leq 2$, on a (k).

Théorème 35. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que $E(Y_i^* | \bar{R}_{mi}^*) = 0$ p. s. $1 \leq i \leq m+1 \leq n$, où $R_{mi}^* = \sum_{k=1, k \neq i}^{m+1} Y_k^*$ et $\sum_{k=1}^n e_k^o(r) \rightarrow 0, 1 \leq r \leq 2$, on a (k).

La convergence presque sûre de séries et de suites aléatoires.

10. Inégalités utiles dans l'étude de la convergence presque sûre de séries et de suites de v.a. indépendantes.

Dans l'étude de la convergence presque sûre de séries et de suites de v. a. indépendantes un rôle fondamental est joué par les inégalités de A. Kolmogoroff et de P. Lévy ainsi que leurs diverses modifications. Nous donnerons ici des inégalités d'un type analogue qui permettront d'obtenir certains résultats plus forts ou plus généraux que ceux qui résultent directement de ces inégalités classiques. En outre, ces inégalités fournissent certaines informations quant à la rapidité de la convergence presque sûre de séries ou de suites aléatoires.

Lemme 18. Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. indépendantes, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$(XV) \quad P[\max_{k < n} |S_k - ES_k| \geq 2\varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[X_k^2 / (\varepsilon^2 + X_k^2)] - \sum_{k=1}^n E^2 U_k / \varepsilon^2,$$

ou (en supposant l'existence de l'espérance mathématique EX_k)

$$(XV^0) \quad P[\max_{k < n} |S_k^o - ES_k^*| \geq 2\varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[X_k^{o2} / (\varepsilon^2 + X_k^{o2})] - \sum_{k=1}^n E^2 U_k^* / \varepsilon^2.$$

Démonstration. Par l'inégalité élémentaire, on a

$$(20) \quad P[\max_{k < n} |S_k - ES_k| \geq 2\varepsilon] \leq P[\max_{k < n} |S_k^* - ES_k^*| \geq \varepsilon] + P[\max_{k < n} |S_k^*| \geq \varepsilon].$$

L'inégalité de A. Kolmogoroff donne

$$(21) \quad P[\max_{k < n} |S_k^* - ES_k^*| \geq \varepsilon] \leq \sigma^2 S_n^* / \varepsilon^2.$$

Mais

$$(22) \quad \sigma^2 S_n / \varepsilon^2 \leq 2 \sum_{k=1}^n E[U_k^2 / (\varepsilon^2 + U_k^2)] - \sum_{k=1}^n E^2 U_k / \varepsilon^2,$$

donc

$$(23) \quad P[\max_{k \leq n} |S_k' - ES_k'| \geq \varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[U_k^2 / (\varepsilon^2 + U_k^2)] - \sum_{k=1}^n E^2 U_k / \varepsilon^2.$$

En ajoutant (23) et (A) (avec $r = 2$), par (20) et (22), on a (XV).

Dans les démonstrations des théorèmes, concernant la stabilité presque sûre de S_n/n et de la loi forte des grands nombres à partir des inégalités (XV) et (XV⁰), il faut substituer, dans ces dernières, \hat{S}_k à S_k , \hat{S}_k^0 à S_k^0 , \hat{S}_k^* à S_k^* , \hat{S}_k^{*0} à S_k^{*0} et X_k/k à X_k , X_k^0/k à X_k^0 respectivement.

Dans les considérations ultérieures nous avons besoin des cas particuliers de ces inégalités que donne

Lemme 18'. *Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. telles que $EU_k = 0$, ou $EU_k^* = 0$ pour tout k , alors on a respectivement pour tout $\varepsilon > 0$*

$$(XVI) \quad P[\max_{k \leq n} |S_k| \geq 2\varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[X_k^2 / (\varepsilon^2 + X_k^2)],$$

et

$$(XVI^0) \quad P[\max_{k \leq n} |S_k^0| \geq 2\varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[X_k^{02} / (\varepsilon^2 + X_k^{02})].$$

Dans les études concernant la convergence essentielle d'une série de v. a. indépendantes et la stabilité presque sûre d'une suite de v. a. indépendantes, un rôle important est joué par les v. a. symétrisées.

C'est pourquoi donner une inégalité pour ces v. a. faciliterait considérablement ce genre d'investigations. Une telle inégalité se trouve donnée dans [14].

Lemme 19. *Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. indépendantes, et X_k^s les v. a. symétrisées correspondant aux X_k , on a pour tout $\varepsilon > 0$*

$$(XVII) \quad P[\max_{k \leq n} |S_k^s| \geq 2\varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[(X_k^s)^2 / (\varepsilon^2 + (X_k^s)^2)],$$

et en particulier

$$(XVII') \quad P[\max_{k \leq n} |\hat{S}_k^s| \geq 2\varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[(X_k^s)^2 / (k^2 \varepsilon^2 + (X_k^s)^2)].$$

L'inégalité de la symétrisation ([10], p. 247) permet d'obtenir des relations entre les inégalités pour des sommes de v. a. symétrisées, les inégalités pour des sommes de v. a. centrées sur leurs médianes et sur l'espérance mathématique de v. a. tronquées. Dans la suite seront utilisées les inégalités pour les v. a. X_k/k soit X_k^s/k . Pour elles on peut démontrer:

Lemme 20. Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. indépendantes, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$(XVIII) \left\{ \begin{array}{l} P[\sup_{k \leq n} |\hat{S}_k - m(\hat{S}_k)| \geq 4\varepsilon] \\ P[\sup_{k \leq n} |\hat{S}_k^*| \geq 4\varepsilon] \end{array} \right\} \leq 4 \sum_{k=1}^n E[(X_k^*)^2 / (4k^2 \varepsilon^2 + (X_k^*)^2)],$$

et

$$(XVIII_1) \left\{ \begin{array}{l} P[\sup_{k \leq n} |\hat{S}_k - m(\hat{S}_k)| \geq 4\varepsilon] \\ P[\sup_{k \leq n} |\hat{S}_k^*| \geq 4\varepsilon] \\ P[\sup_{k \leq n} |\hat{S}_k - E\hat{S}_k| \geq 2\varepsilon] \end{array} \right\} \leq 4 \{ 2 \sum_{k=1}^n E[X_k^2 / (k^2 \varepsilon^2 + X_k^2)] - \sum_{k=1}^n E^2 T_k / k^2 \varepsilon^2 \}.$$

Démonstration. L'inégalité de la symétrisation établit que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour a_k quelconques, $k \leq n$,

$$P[\sup_{k \leq n} |X_k - m(X_k)| \geq 4\varepsilon] \leq 2P[\sup_{k \leq n} |X_k^*| \geq 4\varepsilon] \leq 4P[\sup_{k \leq n} |X_k - a_k| \geq 2\varepsilon].$$

En posant dans cette inégalité \hat{S}_k au lieu de X_k et \hat{S}_k^* au lieu de X_k ainsi que $E\hat{S}_k$ au lieu a_k , nous obtenons les inégalités requises par les lemmes 18 et 19.

Considérons maintenant la généralisation des inégalités citées.

Lemme 21. Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. indépendantes, alors on a pour tout $\varepsilon > 0$ et $1 \leq r \leq 2$

$$(XIX) P[\max_{k \leq n} |S_k - ES_k| \geq 2\varepsilon] \leq 4c_r M(r, n) \sum_{k=1}^n E[|X_k|^r / (\varepsilon^r + |X_k|^r)].$$

ou (en supposant l'existence de l'espérance mathématique EX_k)

$$(XIX^0) P[\max_{k \leq n} |S_k^0 - ES_k^0| \geq 2\varepsilon] \leq 4c_r M(r, n) \sum_{k=1}^n E[|X_k^0|^r / (\varepsilon^r + |X_k^0|^r)].$$

Démonstration. Utilisant l'inégalité généralisée de Kollmogoroff ([10], p. 263), on a

$$P[\max_{k \leq n} |S_k - ES_k| \geq \varepsilon] \leq E|S_k - ES_k|^r / \varepsilon^r.$$

En bornant de $E|S_k - ES_k|^r$ comme dans la démonstration du lemme 5, nous obtenons

$$P[\max_{k \leq n} |S_k - ES_k| \geq \varepsilon] \leq 4c_r M(r, n) \sum_{k=1}^n E[|U_k|^r / (\varepsilon^r + |U_k|^r)].$$

En ajoutant la dernière inégalité à l'inégalité (A), par (20), on a (XIX).

Pour les v. a. symétrisées nous obtiendrons.

Lemme 22. *Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. indépendantes, et X_k^* les v. a. symétrisées correspondant aux X_k , on a pour tout $\varepsilon > 0$*

$$(XX) \quad P[\max_{k \leq n} |S_k^g| \geq 2\varepsilon] \leq 4c_r M(r, n) \sum_{k=1}^n E[|X_k^g|^r / (\varepsilon^r + |X_k^g|^r)],$$

et en particulier

$$(XX') \quad P[\max_{k \leq n} |\hat{S}_k^g| \geq 2\varepsilon] \leq 4c_r M(r, n) \sum_{k=1}^n E[|X_k^g|^r / (k^r \varepsilon^r + |X_k^g|^r)].$$

L'inégalité de Marcinkiewicz et Zygmund [11] permet de démontrer.

Lemme 23. *Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. indépendantes, on a pour tout $\varepsilon > 0$ et $r \geq 1$.*

$$(XXI) \quad P[\max_{k \leq n} |S_k - ES_k| \geq 2\varepsilon] \leq 4c_r' n^{r-1} \sum_{k=1}^n E[|X_k|^{2r} / (\varepsilon^{2r} + |X_k|^{2r})],$$

ou (en supposant l'existence de l'espérance mathématique EX_k)

$$(XXI^0) \quad P[\max_{k \leq n} |S_k^0 - ES_k^0| \geq 2\varepsilon] \leq 4c_r' n^{r-1} \sum_{k=1}^n E[|X_k^0|^{2r} / (\varepsilon^{2r} + |X_k^0|^{2r})].$$

La démonstration base sur l'inégalité généralisée de Kolmogoroff et sur l'inégalité de Marcinkiewicz et Zygmund [11], et sur les estimations analogues à celles des lemmes précédents.

11. Convergence presque sûre de la série de variables aléatoires indépendantes.

Théorème 36. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes telles que $\Sigma(2a_n(2) - b_n) < \infty$, ou (en supposant l'existence de l'espérance mathématique EX_n) $\Sigma(2a_n^0(2) - b_n^0) < \infty$, alors $\Sigma(X_n - EU_n) < \infty$ p. s. et $\Sigma(X_n^0 - EU_n^0) < \infty$ p. s. respectivement.*

Démonstration. La vérité de la première thèse résulte de l'inégalité (XV) notée sous la forme de

$$P[\max_{m \leq k \leq m+n} |(S_{m+k} - S_m) - (ES_{m+k} - ES_m)| \geq 2\varepsilon] \leq \sum_{k=m+1}^{m+n} (2a_k(2) - b_k),$$

et la vérité de la deuxième thèse résulte de la forme analogue de l'inégalité (XV⁰).

Lemme 18' permet de démontrer un théorème beaucoup plus fort.

Théorème 37. *Dans les conditions du lemme 18', la convergence de la série $\Sigma a_n(2)$ est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence presque sûre de la série ΣX_n .*

Etant donné que la convergence presque sûre de la série de v. a. indépendantes est équivalente de la convergence en probabilité, on peut répéter ici la démonstration du théorème 2.

Ayant les inégalités pour les v. a. symétrisées, nous pouvons formuler le critère de la convergence essentielle de la série de v. a. indépendantes. Utilisant le théorème selon lequel la convergence essentielle de la série de v. a. indépendantes est équivalente de la convergence presque sûre de la série de v. a. symétrisées, nous pouvons démontrer.

Théorème 38. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes, alors la convergence de la série $\Sigma h_n(2)$ est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence essentielle de la série ΣX_n .*

Puisque les v. a. symétrisées obéissent aux conditions du théorème 37, la vérité du théorème 38 résulte du théorème 37. La démonstration détaillée a été donnée dans [14].

Remarque. Il résulte du théorème 38 que la convergence de la se série $\Sigma E[(X_n^s)^2/(1+(X_n^s)^2)]$ équivaut au critère de deux séries pour la convergence essentielle de la série ΣX_n : la convergence de la série $\Sigma P[|X_n - m(X_n)| \geq \varepsilon]$ et celle de la série $\Sigma \sigma^2\{[X_n - m(X_n)]I[|X_n - m(X_n)| < \varepsilon]\}$, où $m(X_n)$ est une médiane de X_n et $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Généralisant les théorèmes 36 et 37 nous pouvons démontrer.

Théorème 39. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes telles que $\Sigma a_n(r) < \infty$, ou (en supposant l'existence de l'espérance mathématique EX_n) $\Sigma a_n^o(r) < \infty$, alors $\Sigma(X_n - EU_n) < \infty$ p. s. et $\Sigma(X_n^o - EU_n^o) < \infty$ p. s., $1 \leq r \leq 2$, respectivement.*

Dans le cas de $r = 1$ nous obtenons un résultat plus fort.

Corollaire 6. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes telles que $\Sigma E[|X_n|/(\varepsilon + |X_n|)] < \infty$, ou (en supposant l'existence l'espérance mathématique EX_n) $\Sigma E[|X_n^o|/(\varepsilon + |X_n^o|)] < \infty$, alors $\Sigma X_n < \infty$ p. s et $\Sigma X_n^o < \infty$ p. s. respectivement.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que dans le cas considéré $\Sigma EU_n < \infty$. Ce fait résulte de l'inégalité.

$$|EU_n| \leq 2\varepsilon E[|U_n|/(\varepsilon + |U_n|)] \leq 2\varepsilon E[|X_n|/(\varepsilon + |X_n|)].$$

Théorème 40. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes telles que $\Sigma h_n(r) < \infty$, alors $\Sigma X_n^s < \infty$ p. s. $1 \leq r \leq 2$.*

Les démonstrations de ces théorèmes résultent des lemmes 21 et 22 respectivement.

Les théorèmes 38 et 40 donnaient des conditions nécessaires et suffisantes soit seulement suffisantes pour la convergence presque sûre de la série ΣX_n^s dans les termes de v. a. symétrisées. Dans la pratique

il serait souhaitable d'avoir de telles conditions exprimées dans les termes de v. a. auxquelles correspondent ces v. a. symétrisées. Le lemme 20 permet de formuler de telles conditions.

Théorème 41. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes telles que $\Sigma(2a_n(2) - b_n) < \infty$, ou $\Sigma a_n(r) < \infty$, où $1 \leq r \leq 2$ alors $\Sigma X_n^* < \infty$ p. s.*

Le dernier théorème permet de démontrer.

Théorème 42. *La convergence de la série $\Sigma(2a_n(2) - b_n)$, ou de la série $\Sigma a_n(r)$ $1 \leq r \leq 2$, implique la convergence de la série $\Sigma h_n(2)$.*

12. Stabilité presque sûre de S_n/n et la loi forte des grands nombres.

Les inégalités citées dans le 10 permettent aussi de donner les conditions pour une stabilité presque sûre de S_n/n et pour la l. forte g. n. Elles requièrent en général moins que les théorèmes classiques ou ceux connus de la littérature.

Les inégalités (XV) et (XV⁰) convenablement modifiées permettent de démontrer.

Théorème 43. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes telles que $\Sigma(2c_n(2) - d_n) < \infty$, ou $\Sigma c_n(r) < \infty$ $1 \leq r \leq 2$, on a (j).*

Démonstration. La convergence de la série $\Sigma(2c_n(2) - d_n)$ ou de $\Sigma c_n(r)$ implique la convergence p. s. de la série $\Sigma(X_k/k - ET_k/k)$. En appliquant à la dernière série le lemme de Kronecker ([6], p. 139), nous obtenons (j).

A partir du lemme 20 nous obtenons.

Théorème 44. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes telles que $\Sigma(2c_n(2) - d_n) < \infty$ ou $\Sigma c_n(r) < \infty$, $1 \leq r \leq 2$, alors $S_n^*/n \xrightarrow{p.s.} 0$, $n \rightarrow \infty$.*

Le dernier théorème donne les conditions de la stabilité presque sûre de S_n/n dans les termes des v. a. X_n . Les inégalités (XVII') et (XX') permettent de formuler les conditions de la stabilité presque sûre de S_n^*/n , exprimées dans les termes X_n^* .

Théorème 45. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes telles que $\Sigma s_k(r) < \infty$, $1 \leq r \leq 2$, alors $S_n^*/n \xrightarrow{p.s.} 0$, $n \rightarrow \infty$.*

La démonstration est analogue comme dans le théorème 43.

Des théorèmes analogues se laissent donner pour des v. a. centrées sur leur espérance mathématique. Sans répéter littéralement ces formulations, nous donnons les conditions par la l. forte g. n.

Théorème 46. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes telles que $\Sigma(2c_n^0(2) - d_n^*) < \infty$ et $ES_n^*/n \rightarrow 0$, ou $\Sigma c_n^0(r) < \infty$, $1 \leq r \leq 2$, et $ES_n^*/n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, alors la suite obéit à la loi forte des grands nombres.*

Démonstration. La convergence de la série $\Sigma(2c_n^o(2) - d_n^*)$, ou $\Sigma c_n^o(r)$ par l'inégalité (XV^o) convenablement modifiée et le lemme de Kronecker impliquent $S_n^o/n - ES_n^*/n \xrightarrow{p.s.} 0, n \rightarrow \infty$ Mais $ES_n^*/n \rightarrow 0$, donc on a (1).

Dans le cas de $r = 1$ nous obtenons un résultat plus fort.

Corollaire 7. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. indépendantes telles que $\Sigma E[|X_n^o|/(n + |X_n^o|)] < \infty$, alors la suite $\{X_n\}$ obéit à la l. forte g. n.

Pour la démonstration de cete corollaire, il suffit de remarquer que la convergence de la série $\Sigma E[|X_n^o|/(n + |X_n^o|)]$ implique la convergence vers zéro de ES_n^*/n .

Remarque. Observons que la condition de Kolmogoroff pour la l. forte des g. n., $\Sigma \sigma^2 X_n/n^2 < \infty$, implique les conditions du théorème 47. Ceci résulte de l'inégalité

$$2c_n^o(2) - d_n^* \leq 2E[X_n^{o2}/(n^2 \varepsilon^2 + X_n^{o2})] \leq 2\sigma^2 X_n/n^2 \varepsilon^2$$

et de

$$|ES_n^*| = |ES_n^{**}| \leq \sum_{k=1}^n \sigma^2 X_k/k\varepsilon.$$

Considérons maintenant le cas de v. a. indépendantes, à la même répartition. La loi forte des grands nombres de Kolmogoroff établit que la condition nécessaire et suffisante pour que la suite de v. a. à la même répartition obéisse à la l. forte g. n., est l'existence de l'espérance mathématique finie.

Nous pouvons démontrer.

Théorème 47. Si $\{X_n\}$ est une suite de déterminations indépendantes d'une même v. a. X , alors les séries

$$\Sigma E[T_n^2/(n^2 + T_n^2)], \Sigma E[W_n^2/(n^2 + W_n^2)], \Sigma E[X_n^2/(n^2 + X_n^2)],$$

où maintenant $T_n = X_n I_{[|X_n| < n]}$, $W_n = X_n I_{[|X_n| \geq n]}$, sont équivalentes deux à deux en convergence, et la convergence de chacune d'elles est une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait $E|X| < \infty$; par suite, elle est une condition nécessaire et suffisante pour la l. forte g. n.

La démonstration de ce théorème a été donnée dans [17].

Dans notre étude de la stabilité en probabilité et presque sûre de S_n/n ainsi que des lois faible et forte g. n., on peut introduire une généralisation consistant à donner les conditions de la stabilité en probabilité ou presque sûre de S_n/b_n , où b_n est une suite telle que $0 < b_n \rightarrow \infty$ ainsi que celles des l. faible et forte g. n. généralisées. Les théorèmes pour les v. a. indépendantes restent vraies si nous y substituons b_n à n .

Il en est de même s'il s'agit de la majorité des théorèmes formulés pour les v. a. dépendantes. Effectuant des transformations analogues

dans les inégalités, à partir desquelles on a obtenu ces théorèmes, il faut modifier convenablement les v. a. tronquées.

13. Inégalités pour les sommes de variables aléatoires dépendantes utiles dans l'étude de la convergence presque sûre.

Dans ce point nous considérons seulement des classes particulières de v. a. dépendantes. D'abord, nous prenons en considération les v. a. dont les v. a. tronquées forment une martingale. Dans ces considérations l'inégalité étendue de Kolmogoroff ([10], p. 386) est d'une grande utilité.

Lemme 24. *Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. telles que $E(U_k | U_1, U_2, \dots, U_{k-1}) = 0$ p. s. ($k = 2, 3, \dots, n$) $EU_1 = 0$, ou (en supposant l'espérance mathématique EX_k), $E(U_k^* | U_1^*, U_2^*, \dots, U_{k-1}^*) = 0$ p. s. ($k = 2, 3, \dots, n$) $EU_1^* = 0$, alors on a pour tout $\varepsilon > 0$*

$$(XXII) \quad P[\max_{k \leq n} |S_k| \geq 2\varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[X_k^2 / (\varepsilon^2 + X_k^2)],$$

et

$$(XXII^0) \quad P[\max_{k \leq 1} |S_k^0| \geq 2\varepsilon] \leq 2 \sum_{k=1}^n E[X_k^{02} / (\varepsilon^2 + X_k^{02})].$$

Démonstration. Etant donné qu'aux v.a. tronquées nous pouvons appliquer l'inégalité étendue de Kolmogoroff ([10], p. 386), le raisonnement analogue à celui donné dans la démonstration du lemme 2, permet d'obtenir les inégalités (XXII) et (XXII⁰).

Remarque. Observons que le lemme 24 entre autres renforce une certaine inégalité connue de la littérature [12]. A. Marschall a démontré que si X_1, X_2, \dots, X_n sont des v. a. telles que: $EX_1 = 0, EX_k | X_1, X_2, \dots, X_{k-1} = 0$ p. s. $k = 2, \dots, n$ et $EX_k^2 = \sigma_k^2 < \infty$ ($k = 1, 2, \dots, n$), alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$P[\max_{k \leq n} S_k \geq \varepsilon] \leq \frac{s_n}{\varepsilon^2 + s_n},$$

où $s_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$.

Considérons maintenant les v. a. qui dans leurs parties tronquées constituent une suite de v. a. orthogonales.

Lemme 25. *Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. telles que les U_k soient deux à deux orthogonales, ou que (en supposant l'existence de l'espérance mathématique EX_k) les U_k^* soient deux à deux orthogonales, on a pour tout $\varepsilon > 0$.*

$$(XXIII) \quad P[\max_{k \leq n} |S_k| \geq 2\varepsilon] \leq 2(\log 4n / \log 2)^2 \sum_{k=1}^n E[X_k^2 / (\varepsilon^2 + X_k^2)]$$

et

$$(XXIII^0) \quad P[\max_{k \leq n} |S_k^0| \geq 2\varepsilon] \leq 2(\log 4n/\log 2)^2 \sum_{k=1}^n E[X_k^{02}/\varepsilon^2 + X_k^{02}]$$

respectivement.

Démonstration. Puisque

$$P[\max_{k \leq n} |S_k| \geq 2\varepsilon] \leq P[\max_{k \leq n} |S_k^*| \geq \varepsilon] + P[\max_{k \leq n} |S_k^{**}| \geq \varepsilon],$$

donc il suffit de borner $P[\max_{k \leq n} |S_k^*| \geq \varepsilon]$, car la borne de $P[\max_{k \leq n} |S_k^{**}| \geq \varepsilon]$ donne l'inégalité (A).

Utilisant l'inégalité de Tchebycheff et de la borne

$$E(\max_{k \leq n} |S_k|)^2 \leq (\log 4n/\log 2)^2 \sum_{k=1}^n E X_k^2,$$

vraie pour les v. a. orthogonales ([10], p. 457), nous obtenons

$$P[\max_{k \leq n} |S_k^*| \geq \varepsilon] \leq (\log 4n/\log 2)^2 \sum_{k=1}^n E U_k^2 \leq 2(\log 4n/\log 2) \sum_{k=1}^n E[U_k^2/(\varepsilon^2 + U_k^2)].$$

En ajoutant l'inégalité dernière à l'inégalité (A) par (24), on a (XXIII).
Si l'on soumet les v. a. tronquées à l'additionnelle

$$m(S_k^* - S_n^* | S_1^*, S_2^*, \dots, S_k^*) = 0 \text{ p. s.},$$

on obtiendra une inégalité du type de l'inégalité étendue de P. Lévy ([10], p. 385).

Lemme 26. Si dans les conditions du lemme 25

$$m(S_k^* - S_n^* | S_1^*, S_2^*, \dots, S_k^*) = 0 \text{ p. s. ou}$$

$$m(S_k^{**} - S_n^{**} | S_1^{**}, S_2^{**}, \dots, S_k^{**}) = 0 \text{ p. s.},$$

on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$(XXIV) \quad P[\max_{k \leq n} |S_k| \geq 2\varepsilon] \leq 4 \sum_{k=1}^n E[X_k^2/(\varepsilon^2 + X_k^2)],$$

et

$$(XXIV^0) \quad P[\max_{k \leq n} |S_k^0| \geq 2\varepsilon] \leq 4 \sum_{k=1}^n E[X_k^{02}/(\varepsilon^2 + X_k^{02})]$$

respectivement.

Démonstration. En utilisant l'inégalité étendue de P. Lévy ([10], p. 386) pour les v. a. U_k , nous obtenons

$$P[\max_{k \leq n} |S_k^*| \geq \varepsilon] \leq 2P[|S_n^*| \geq \varepsilon].$$

Grâce à l'hypothèse du caractère orthogonal de U_k , à l'inégalité de Tchebycheff et au raisonnement analogue à celui de la démonstration des lemmes précédents, nous obtenons

$$P[\max_{k < n} |S_k| \geq \varepsilon] \leq 4 \sum_{k=1}^n E[U_k^2 / (\varepsilon^2 + U_k^2)].$$

En ajoutant cette inégalité à l'inégalité (A) par (20), on a (XXIV).

Considérons à présent une certaine extension de l'inégalité de [7], qui permettra d'obtenir des résultats analogues à ceux qu'on y a donnés, avec hypothèse moins restrictive.

Lemme 27. *Si les X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des v.a. telles que, lorsqu'il existe un a tel que $0 < a \leq 1$ et que l'on peut associer à tout $\delta > 0$ un entier positif N tel que*

$$\sum_{j=1}^n \sup |E'_k(Y_{j+k}) - EY_{j+k}| < n^a \delta,$$

ou (en supposant l'existence de l'espérance mathématique EX_k)

$$\sum_{j=1}^n \sup |E'_k(Y_{j+k}^*) - EY_{j+k}^*| < n^a \delta$$

pour tout $n > N$ et tout $k = 1, 2, \dots$, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \text{(XXV)} \quad P[\max_{k < n} |S_k - \check{S}_k| \geq 2n^a \varepsilon] &\leq 2M \left\{ \sum_{k=1}^n E[X_k^2 / (n^{2a} \varepsilon^2 + X_k^2)] + \right. \\ &\quad \left. + n^{-2a} \varepsilon \sum_{1 < j < k < n} \text{Cov}(Y_j, Y_k) \right\} - Mn^{-2a} \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^n E^2 Y_k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{(XXV}^0\text{)} \quad P[\max_{k < n} |S_k^0 - \check{S}_k^0| \geq 2n^a \varepsilon] &\leq 2M \left\{ \sum_{k=1}^n E[X_k^{02} / (n^{2a} \varepsilon^2 + X_k^{02})] + \right. \\ &\quad \left. + n^{-2a} \varepsilon^{-2} \sum_{1 < j < k < n} \text{Cov}(Y_j^*, Y_k^*) \right\} - Mn^{-2a} \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^n E^2 Y_k^* \end{aligned}$$

pour tout $n > N$ et tout $\varepsilon > 0$, où $M > 1$ est une constante et maintenant

$$\begin{aligned} Y_k &= X_k I_{[|X_k| < n^a \varepsilon]}, \quad Y_k^* = X_k^0 I_{[|X_k^0| < n^a \varepsilon]}, \quad Z_k = X_k I_{[|X_k| > n^a \varepsilon]}, \\ Z_k^* &= X_k^0 I_{[|X_k^0| > n^a \varepsilon]}, \quad \check{S}_k = \sum_{j=1}^k Y_j, \quad \check{S}_k^* = \sum_{j=1}^k Y_j^*, \quad \check{S}_k^{**} \\ &= \sum_{j=1}^k Z_j, \quad \check{S}_k^{**} = \sum_{j=1}^k Z_j^*. \end{aligned}$$

Démonstration. Puisque les v.a. Y_k satisfont aux conditions du "lemme généralisé de Kolmogoroff" donné dans [7], on a

$$P[\max_{k < n} |\check{S}_k - E\check{S}_k| \geq n^a \varepsilon] \leq Mn^{-2a} \varepsilon^{-2} \sigma^2 \check{S}_n$$

Mais

$$n^{-2\alpha} \varepsilon^{-2} \sigma^2 \check{S}_n^* \leq 2 \left\{ \sum_{k=1}^n E[Y_k^2 / (n^{2\alpha} \varepsilon^2 + Y_k^2)] + \right. \\ \left. + n^{-2\alpha} \varepsilon^{-2} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \text{Cov}(Y_j, Y_k) \right\} - n^{-2\alpha} \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^n E^2 Y_k.$$

Ainsi donc

$$P[\max_{k \leq n} |\check{S}_k^* - E\check{S}_k^*| \geq n^\alpha \varepsilon] \leq 2M \left\{ \sum_{k=1}^n E[Y_k^2 / (n^{2\alpha} \varepsilon^2 + Y_k^2)] + \right. \\ \left. + n^{-2\alpha} \varepsilon^{-2} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \text{Cov}(Y_j, Y_k) \right\} - Mn^{-2\alpha} \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^n E^2 Y_k.$$

En remarquant que

$$P[\max_{k \leq n} |S_k^{**}| \geq n^\alpha \varepsilon] \leq 2M \sum_{k=1}^n E[Z_k^2 / (n^{2\alpha} \varepsilon^2 + Z_k^2)],$$

nous obtenons (XXV). La démonstration (XXV⁰) est analogue.

14. Convergence presque sûre des séries de variables aléatoires dépendantes.

Le lemme 24 permet de démontrer.

Théorème 48. *Dans les conditions du lemme 24 la convergence des séries $\Sigma a_n(2)$, ou $\Sigma a_n^0(2)$, est une condition suffisante de la convergence p. s. des séries ΣX_n et ΣX_n^0 respectivement.*

Pour les v. a. dont les parties tronquées constituent une suite de v. a. deux à deux orthogonales, nous pouvons démontrer.

Théorème 49. *Dans les conditions du lemme 25, la convergence des séries $\Sigma (\log n)^2 a_n(2)$, ou $\Sigma (\log n)^2 a_n^0(2)$, est une condition suffisante de la convergence p. s. des séries ΣX_n et ΣX_n^0 respectivement.*

Démonstration. Il est évident que la convergence de la série $\Sigma (\log n)^2 E[X_n^2 / (\varepsilon^2 + X_n^2)]$ équivaut à la convergence des séries $\Sigma (\log n)^2 \times E[U_n^2 / (\varepsilon^2 + U_n^2)]$ et $\Sigma (\log n)^2 E[V_n^2 / (\varepsilon^2 + V_n^2)]$. Comme la convergence de la série $\Sigma (\log n)^2 E[U_n^2 / (\varepsilon^2 + U_n^2)]$, est à son tour équivalente de la convergence de la série $\Sigma (\log n)^2 E U_n^2$, donc à partir de la condition de la convergence presque sûre d'une série de v. a. orthogonales ([10], p. 458), nous obtenons la convergence de la série ΣU_n . Observons maintenant que la convergence de la série $\Sigma (\log n)^2 E[V_n^2 / (\varepsilon^2 + V_n^2)]$ implique la convergence presque sûre de la série ΣV_n , donc finalement nous sommes amenés à conclure que la série $\Sigma X_n = \Sigma (U_n + V_n)$ est convergente presque sûrement.

Théorème 50. *Dans les conditions du lemme 26 la convergence des séries $\Sigma a_n(2)$, ou $\Sigma a_n^0(2)$ est une condition suffisante de la convergence p. s. des séries ΣX_n et ΣX_n^0 respectivement.*

15. Stabilité presque sûre de S_n/n et de S_n/n^a et la loi forte des grands nombres.

Le lemme 24, convenablement modifié permet de démontrer,

Théorème 51. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que $ET_1 = 0$, $ET_k | T_1, T_2, \dots, T_{k-1} = 0$ p. s., ou $ET_1 = 0$, $ET_k | T_1, T_2, \dots, T_{k-1} = 0$ p. s., alors la convergence des séries $\Sigma c_n(2)$ et $\Sigma c_n^0(2)$ est une condition suffisante de la convergence p. s. de S_n/n et de la l. forte g. n. respectivement.*

Grâce au lemme 25, raisonnement de la démonstration du théorème 44 et au lemme de Kronecker, nous obtenons.

Théorème 52. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que les v.a. T_n , ou T_n^* sont deux à deux orthogonales, alors la convergence des séries $\Sigma (\log n)^2 c_n(2)$, ou $\Sigma (\log n)^2 c_n^0(2)$ est une condition suffisante de la convergence p. s. de S_n/n et de la l. forte g. n. respectivement.*

Si l'on pose le caractère orthogonal non pas de T_k^* mais de $T_k^* - ET_k^*$ l'inégalité (XXIII^o) convenablement transformée nous donne.

Corollaire 8. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que $T_k^* - ET_k^*$ sont deux à deux orthogonales, $\Sigma (\log n)^2 c_n^0(2) < \infty$ et $ES_n^*/n \rightarrow 0$, alors la suite $\{X_n\}$ obéit à la loi forte des grands nombres.*

Remarque. Le dernier corollaire renforce encore le théorème connu ([10], p. 458) donnant comme condition pour la l. forte g. n. une convergence de la série $\Sigma (\log n/n)^2 \sigma^2 X_n$, dans le cas de v. a. orthogonales. On peut vérifier que la dernière condition implique les conditions du corollaire 8.

Le lemme 26 permet de démontrer.

Théorème 55. *Dans les conditions du lemme 26 convenablement modifié, la convergence des séries $\Sigma c_n(2)$ ou $\Sigma c_n^0(2)$, est une condition suffisante de la convergence p. s. de S_n/n et de la l. forte g. n.*

Le lemme 27 permet de renforcer les résultats donnés dans [7]. Entre autres, on peut obtenir.

Théorème 54. *Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. qui satisfait aux conditions:*

$$(25) \quad 2 \sum_{k=1}^n E[X_k^2 / (n^{2a} + X_k^2)] - n^{-2a} \sum_{k=1}^n E^2 Y_k = 0 \quad (n^{1-2a}),$$

$$(26) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sup |E'_j(Y_{j+1}) - EY_{j+1}| < \infty, \quad \sigma^2 Y_k \leq L^2,$$

$$\text{où, ici, } Y_k = X_j I_{\{|X_k| < n^a\}},$$

alors $(S_n - ES_n)/n^a \xrightarrow{p.s.} 0$, pour $a > \frac{1}{2}$.

Démonstration. On a en vertu des hypothèses (25) et (26) et de l'inégalité (XXV), nous avons

$$P[\max_{k \leq n} |S_k - ES_k| \geq 2\epsilon n^\alpha] \leq cn^{1-2\alpha},$$

où $c > 0$ est une constante. L'inégalité dernière permet de démontrer que $(S_n - ES_n)/n^\alpha \xrightarrow{p.s.} 0, n \rightarrow \infty$. (voir [7] — la démonstration du théorème 4).

Théorème 55. Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. telles que

$$(27) \quad 2 \sum_{k=1}^n E[X_k^{\alpha^2}/n^2 + X_k^{\alpha^2}] - n^{-2} \sum_{k=1}^n E^2 Y_k^* = 0 \quad (n^{\alpha-1}),$$

pour tout $\delta > 0$

$$(28) \quad \sum_{j=1}^n \sup |E'_k(Y_{j+k}) - E Y_{j+k}^*| < n^\alpha \delta, \quad \sigma^2 Y_k^* \leq L^2, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

pour tout $n > N$ et $k = 1, 2, \dots$, et

$$(29) \quad ES_n^*/n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{où, ici, } Y_k^* = X_k^\alpha I[|X_k^\alpha| < n\epsilon],$$

alors la suite $\{X_n\}$ obéit à la l. forte g. n.

La démonstration de ce théorème est analogue au théorème 55 si nous remarquons que dans le cas considéré

$$P[\max_{k \leq n} |S_k^\alpha - ES_k^*| \geq 2n\epsilon] \leq Cn^{\alpha-1} \quad (\frac{1}{2} < \alpha < 1),$$

où $C > 0$, et si nous appliquons le raisonnement utilisé dans la démonstration du théorème 5 de [7].

Remarque. Remarquons que pour les v.a. dépendantes à variances également bornées ($\sigma^2 X_n \leq L^2$), qu'a considérées I. Koźniewska [7] sont satisfaites les conditions (27) et (29), tandis que la condition (28) concerne ici seulement les v. a. tronquées, par contre dans [7] cette condition est imposée aux v. a. entières. Pour les classes particulières de v. a. dépendantes le lemme 27 permet de formuler des théorèmes analogues avec des conditions moins restrictives.

En marge des considérations ici présentées, nous rappelos que la loi faible des grands nombres de Khintchine, concernant les v. a. indépendantes à la même répartition, ainsi que le critère de Kolmogoroff pour la l. faible g. n. aux répartitions différentes, confirment le fait que pour cette classe de v. a., dans le cas de théorèmes relatifs à la l. faible g. n., il est superflu de poser une hypothèse quelconque en ce qui concerne la variance de ce v. a. La question est de savoir si ceci vaut également pour les v. a. dépendantes. La plupart des théorèmes donnant les con-

ditions de la convergence d'une série en probabilité ou celles de la l. faible g. n. comprennent des hypothèses concernant le comportement de variances. Grâce au lemme 2 que l'on peut utiliser dans l'étude de n'importe quelle v. a., nous pouvons formuler des théorèmes limites de cette sorte où point n'est besoin de faire une hypothèse quelconque pour ce qui est des variances. Ainsi p. ex. de l'inégalité

$$P[|\hat{S}_n^0 - ES_n^*| \geq 2n\varepsilon] \leq (n\varepsilon)^{-2} \sum_{k=1}^n \sigma^2 Y_k^* + \sum_{k=1}^n P[|X_k^0| \geq n\varepsilon] + 2n^{-2}\varepsilon^{-2} \times \\ \times \sum_{1 \leq j < k \leq n} \text{Cov}(Y_j^*, Y_k^*),$$

il résulte qu'en formulant les conditions dans lesquelles la l. faible g. n. est remplie dans le cas des v. a. dépendantes, il suffit de joindre — aux conditions du critère de Kolmogoroff:

$$\sum_{k=1}^n \sigma^2 Y_k^*/n^2 \rightarrow 0, ES_n^*/n \rightarrow 0, \sum_{k=1}^n P[|X_k^0| \geq n\varepsilon] \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

une condition bornant le degré de dépendance des v. a. tronquées (par ex. pour la $\text{Cov}(Y_j^*, Y_k^*)$). Dans l'étude, en donnant les inégalités convenables, nous avons essayé de mettre en relief l'importance des v. a. tronquées dans la formulation de certaines lois limites du calcul des probabilités.

S'il s'agit des extensions supplémentaires des inégalités ici signalées et de leurs conséquences, dans le cas des v. a. indépendantes, elles peuvent entre autres se concentrer sur des éléments aléatoires indépendants de l'espace de Hilbert et de certains types de l'espace de Banach. En ce qui concerne les v. a. dépendantes, il importerait d'étudier en détail, de ce point de vue (sans poser l'existence de variances) une classe fondamentale de v. a. dépendantes qu'est celle des v. a. liées dans la chaîne de Markoff. Des recherches détaillées sur ces possibilités d'investigations sont en cours.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bahr, B., Essen, C. G., *Inequalities for the r th absolute moment of a sum random variables*, Ann. Math. Stat., 36, (1965), p. 299-303.
- [2] Brillinger, D., *A note on the rate of convergence of mean*, Biometrika, 49, (1962), p. 574-576.
- [3] Dugué, D., *Traité de statistique théorique et appliquée*, Paris (1958).
- [4] Feller, W., *An introduction to probability theory and its application*, vol. I, New York (1957).
- [5] Hsu, P. L., Robbins, H., *Complete convergence and law of large numbers*, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., 33, (1947), p. 25-34.
- [6] Knopp, K., *Szeregi nieskończone*, Warszawa (1956).

- [7] Koźniewska, I., *Sur les lois des grands nombres pour les variables aléatoires dépendantes à variances également bornées*, Coll. Math., 10, (1963), p. 289-304.
- [8] Lévy, P., *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris (1937).
- [9] Loève, M., *Etude asymptotique des sommes de variables aléatoires liées*, Jour. math. pures et appl., 24, (1945), p. 249-318.
- [10] Loève, M., *Theory probability*, New York (1960).
- [11] Marcinkiewicz, J., Zygmund, A., *Sur les fonctions indépendantes* Fund. Math., 29, (1937), p. 60-90.
- [12] Marschall, A., *A one - sided analog of Kolmogorov's inequality*, Ann. Math. Stat., 31, (1960), p. 383-487.
- [13] Prochoroff, Ju. W., *Об усиленном законе больших чисел*, Изв. Акад. Наук. С С С Р., 14, (1950), p. 523-536.
- [14] Szyrnał, D., *Certaines inégalités utiles dans l'étude de la convergence essentielle des séries aléatoires*, C. R. Acad. Sc. Paris, 263, (1966), p. 734-737.
- [15] Szyrnał, D., *Certaines inégalités concernant les sommes et la convergence presque sûre des séries aléatoires*, C. R. Acad. Sc. Paris, 263, (1966), p. 923-926.
- [16] Szyrnał, D., *Inégalités et conditions suffisantes de la convergence presque sûre de certaines séries aléatoires*, C. R. Acad. Sci. Paris, 264 (1967), p. 636-638.
- [17] Szyrnał, D., *Certaines inégalités du type de P. Lévy et leurs applications*, C. R. Acad. Sci. Paris, 264 (1967), p. 955-958.
- [18] Szyrnał, D., *La convergence en probabilité et la convergence presque sûre de certaines suites de variables aléatoires dépendantes*, Bull. Acad. Polon. Sci., en presse.
- [19] Szyrnał, D., *La convergence en probabilité et la convergence presque sûre de certaines suites de variables aléatoires dépendantes*, Colloq. Math., en presse.

Streszczenie

W pracy tej podano nierówności dla sum zmiennych losowych, stanowiące modyfikacje, uogólnienia lub ulepszenia znanych nierówności Czebyszewa, Markowa, Kolmogorowa, Levy'ego. Dzięki tym nierównościom dowiedziono szereg twierdzeń dotyczących zbieżności według prawdopodobieństwa lub prawie pewnej szeregów i ciągów losowych, a w szczególności — słabego i mocnego prawa wielkich liczb.

Otrzymane wyniki stanowią uogólnienie lub wzmocnienie analogicznych twierdzeń klasycznych bądź znanych z literatury, zarówno w przypadku niezależnych jak i zależnych zmiennych losowych.

Резюме

Приведены неравенства для сум случайных величин, являющиеся модификацией, обобщением или улучшением известных неравенств Чебышева, Маркова, Колмогорова и Леви. С помощью этих неравенств доказан ряд теорем, касающихся сходимости случайных рядов и последовательностей по вероятности или почти наверное, а особенно слабого и усиленного закона больших чисел.

Полученные результаты являются обобщением или усилением аналогичных классических теорем и теорем, известных из литературы, как в случае независимых, так и зависимых случайных величин.

UNIwersytet Marii
Curie-Skłodowskiej

*

Nakład 700 egz. Ark. wyd. 9,5.
Ark. druk. 8. Papier druk. sat.
kl. III 80 g. Oddano do składania
25. IV. 1969 r. Podpisano do
druku 26. III. 1970 r. Druk ukoń-
czono w kwietniu 1970 r.
Zam. nr 132/69 - OC-5

*

WROCLAWSKA
DRUKARNIA NAUKOWA

1. B. Krzyżowa: Equations au paratingent à argument retardé
Równania paratyngensowe z opóźniającym się argumentem.
2. B. Krzyżowa: Sur les familles de solutions des équations au paratingent à argument retardé.
O rodzinach rozwiązań równań paratyngensowych z opóźniającym się argumentem.
3. B. Krzyżowa: Sur une généralisation d'un théorème de H. Kneser.
O pewnym uogólnieniu twierdzenia H. Knesera.
4. Z. Lewandowski: On Circular Symmetrization of Starshaped Domains.
O symetryzacji kołowej obszarów gwiazdzystych.
5. Z. Lewandowski: On a Problem of M. Biernacki.
O pewnym problemie M. Biernackiego.
6. Z. Lewandowski: Some Remarks on a Paper of M. S. Robertson.
Kilka uwag o pewnej pracy M. S. Robertsona.
7. Z. Lewandowski i E. Złotkiewicz: Variational Formulae for Functions Meromorphic and Univalent in the Unit Disc.
Wzory wariacyjne dla funkcji meromorficznych i jednolistnych w kole jednostkowym.
8. J. Krzyż: On the Region of Variability of the Ratio $f(z_1)/f(z_2)$ within the Class S of Univalent Functions.
O obszarze zmienności stosunku $f(z_1)/f(z_2)$ w klasie S funkcji jednolistnych.
9. F. Kudelski: On the Univalence of Taylor Sums for a Class of Univalent Functions.
O jednolistności odcinków szeregów Taylora pewnej klasy funkcji jednolistnych.
10. B. Piłat: Sur une classe de fonctions normées univalentes dans le cercle unité.
O pewnej klasie funkcji jednolistnych z unormowaniem Montela.
11. Ś. Ząbek: Sur le minimum absolu de certaines fonctionnelles.
O minimum absolutnym pewnych funkcyjałów.
12. A. Żmurek: Deux remarques sur les plans osculateurs orientés.
Dwie uwagi o płaszczyznach ściśle stycznych zorientowanych.
13. K. Radziszewski: Sur les relations entre les plans osculateurs orientés.
O zależnościach między płaszczyznami ściśle stycznymi zorientowanymi.
14. K. Radziszewski: Sur la congruence des courbes.
O przystawianiu krzywych.
15. K. Radziszewski: Sur certaines propriétés des courbes admettant des plans osculateurs orientés.
O pewnych własnościach krzywych posiadających płaszczyzny ściśle styczne zorientowane.
16. M. Maksym: Sur les relations entre les plans osculateurs orientés d'une courbe.
O zależnościach między zorientowanymi płaszczyznami ściśle stycznymi krzywej.
17. A. Haimovici: Sur une généralisation du problème de Cauchy.
O pewnym uogólnieniu problemu Cauchy'ego.

41050 19

CZASOPISMA

1. D. Szynal: A Note on Qualitative Conditions Numbers.
Uwaga o jakościowych warunkach dla mocnego prawa wielkich liczb.
2. L. Izdebski: A Contribution to the Theory of Subordination.
Pewien przyczynek do teorii podporządkowania.
3. Z. Lewandowski: Some Results Concerning Univalent Majorants.
Kilka wyników dotyczących majorant jednolistnych.
4. Z. Lewandowski: Modular and Domain Majorants of Regular Functions.
Majoranty modułowe i obszarowe funkcji holomorficznych.
5. J. Ławrynowicz: On the Parametrization of Quasiconformal Mappings in an Annulus.
O parametryzacji odwzorowań quasi-konforemnych w pierścieniu.
6. B. Pilat: On Typically Real Functions with Montel's Normalization.
O pewnych podklasach funkcji typowo rzeczywistych z unormowaniem Montela.
7. E. Złotkiewicz: Sur les domaines des valeurs de certaines fonctionnelles dans la classe $U(p)$.
O obszarach zmienności pewnych funkcjonalów w klasie $U(p)$.
8. K. Radziszewski: Sur une propriété des transformations isométriques.
O pewnej własności przekształceń izometrycznych.
9. K. Radziszewski: Sur la coincidence des surfaces dans l'espace projectif.
O przystawianiu powierzchni w przestrzeni rzutowej.
10. K. Radziszewski, J. Sowiński: Quelques remarques sur les plans osculateurs orientés.
Kilka uwag o zorientowanych płaszczyznach ściśle stycznych.
11. A. Żmurek: Sur les hyperplans osculateurs orientés d'une courbe dans l'espace euclidien n -dimensions.
O zorientowanych hiperpłaszczyznach ściśle stycznych krzywej w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej.
12. E. Niedokos: On Mathematical Models of Split-Plot Design.
Modele matematyczne układów z rozszczepionymi jednostkami.

Adresse:

UNIWERSYTET MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ
BIURO WYDAWNICTWA
LUBLIN Plac Litewski 5 POLOGNE