ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XIX, 8 SECTIO A 1965

Z Katedry Geometrii Wydziału Mat. Fiz. Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Konstanty Radziszewski

MARIA MAKSYM

Relations entre les plans osculateurs orientés de 15 types

Zależności między zorientowanymi płaszczyznami ściśle stycznymi 15 typów

Зависимости между соприкасающимися плоскостями 15 типов

En rapport avec les recherches qui font l'objet du travail [2] il s'est avéré nécessaire d'introduire de nouveaux types de plans osculateurs dans la classification donnée par E. J. van der Waag dans le travail [6].

Dans ce travail je vais défineir quelques nouveaux types de plans osculateurs orientés au moyen de vecteurs, paratingents ou contingents, de la courbe et de vecteurs détérminés par deux points de cette courbe. J'étudie aussi les relations entre ces types et ceux qu'a introduits van der Waag.

Des recherches de se type ont été faites par van der Waag en 1951 et par K. Radziszewski dans les années 1963-65.

Notations et définitions

On appelle courbe $\langle A, B\rangle$ l'ensemble des points de l'espace euclidien à trois dimensions homéomorphe à l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$; il est donné par les équations $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\chi(t)$, où le paramètre t parcourt l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$ les fonctions φ, ψ, χ sont continues et, si $t_1, t_2 \in\langle 0, 1\rangle$, $t_1 \neq t_2$, on a

$$\big(\varphi(t_1), \psi(t_1), \chi(t_1)\big) \neq \big(\varphi(t_2), \psi(t_2), \chi(t_2)\big).$$

Soient P et Q les points de la courbe $\langle A, B\rangle$ qui correspondent aux valeurs t_1 et t_2 du paramétre telles que $t_1, t_2 \in \langle 0, 1\rangle$.

Nous noterons:

$$P \dashv Q \quad \text{si} \quad t_p < t_q.$$

$$P \,\underline{\dashv}\, Q \quad \text{si} \quad t_p \leqslant t_q.$$

$\langle P, Q\rangle$ l'ensemble des points de la courbe homéomorphe à l'intervalle $\langle t_p, t_q\rangle$.

(P, Q) l'ensemble des points de la courbe homéomorphe à l'intervalle (t_p, t_q).

$[PQ]$ le verseur du vecteur PQ, c'est-à-dire $[PQ] = PQ/|PQ|$.

(M, u, v) le plan passant par le point M de la courbe $\langle A, B\rangle$ et parallèle aux vecteurs linéairement indépendants u et v.

On appelle vecteur paratingent de la courbe $\langle A, B\rangle$ au point M tout vecteur non nul w tel qu'il existe deux suites de points $\{P_v\}$, $\{Q_v\}$ appartenant à la courbe et

1°. $\lim\limits_{v\to\infty} P_v = \lim\limits_{v\to\infty} Q_v = M$.

2°. $P_v \neq Q_v$.

3°. $w = \lim\limits_{v\to\infty}[P_vQ_v]$.

Le vecteur paratingent sera dit contingent dans la cas particulier où pour tout $v = 1, 2, \ldots$ l'un des points P_v ou Q_v se confond avec le point M.

Il résulte de ces définitions que l'ensemble des vecteurs contingents au point M, appelé contingent de la courbe $\langle A, B\rangle$ au point M, est contenu dans l'ensemble correspondant des vecteurs paratingents, appelé paratingent de la courbe $\langle A, B\rangle$ au point M.

Nous noterons encore:

$p(M)$ un vecteur paratingent de la courbe $\langle A, B\rangle$ au point M.

$c(M)$ un vecteur contingent de la courbe $\langle A, B\rangle$ au point M.

$P(M)$ le paratingent de la courbe $\langle A, B\rangle$ au point M, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $p(M)$.

$C(M)$ le contingent de la courbe $\langle A, B\rangle$ au point M, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $c(M)$.

V un espace vectoriel.

Il existe trois types fondamentaux de définitions des plans osculateurs:

I $$\lim_{v\to\infty}(M, P_vQ_v, A_vB_v)$$

II $$\lim_{v\to\infty}(M, p(H_v), A_vB_v)$$

III $$\lim_{v\to\infty}\big(M, p(H_v), p(J_v)\big).$$

où $M, P_v, Q_v, A_v, B_v, H_v, J_v \in \langle A, B\rangle$ et

$$\lim_{v\to\infty} P_v = \lim_{v\to\infty} Q_v = \lim_{v\to\infty} A_v = \lim_{v\to\infty} B_v = \lim_{v\to\infty} H_v = \lim_{v\to\infty} J_v = M.$$

Considérons quelques cas particuliers des définitions I, II, III.

I_1: $P_v = M$, $Q_v = A_v$ et la condition suivante est vérifiée:
$A_v \dashv M \dashv B_v$ ou $B_v \dashv M \dashv A_v$. (2)

I_2: $P_v = M$, $Q_v = A_v$ (4)

I_3: $P_v = M$ et la condition suivante est vérifiée:
$M \dashv Q_v \dashv A_v \dashv B_v$ ou $A_v \dashv B_v \dashv M \dashv Q_v$
ou
$Q_v \dashv M \dashv A_v \dashv B_v$ ou $A_v \dashv B_v \dashv Q_v \dashv M$. (10)

I_4: $Q_v = A_v$ (6)

I_5: P_v, Q_v, A_v, B_v vérifient la condition:
$P_v \dashv Q_v \dashv A_v \dashv B_v$ ou $P_v \dashv A_v \dashv Q_v \dashv B_v$. (12)

II_1: $M = A_v = H_v$. (1)

II_2: $M = A_v$, $B_v = H_v$. (5)

II_3: $M = H_v$ et la condition suivante est vérifiée:
$M \dashv A_v \dashv B_v$ ou $A_v \dashv B_v \dashv M$. (9)

II_4: $M = A_v$ et la condition suivante est vérifiée:
$M \dashv B_v \dashv H_v$ ou $H_v \dashv M \dashv B_v$
ou
$B_v \dashv M \dashv H_v$ ou $H_v \dashv B_v \dashv M$. (11)

II_6: H_v, A_v, B_v vérifient la condition:
$H_v \dashv A_v \dashv B_v$ ou $A_v \dashv B_v \dashv H_v$. (13)

III_1: $M = H_v = J_v$. (14)

III_2: $H_v = J_v$. (15)

III_3: H_v, J_v quelconques. (8)

La numération $i = (1), (2), \ldots, (15)$ est conformée à celle qu'a introduite van der Waag.

Les plans munis des numéros $j = 1, 2, \ldots, 8$ se confondent avec les plans correspondant définis par van der Waag dans le travail [6].

Les plans ainsi détérminés ont été définis au moyen du vecteur paratingent.

Si dans les définitions des types II et III on remplace les vecteurs paratingents par vecteurs contingents, on obtient 15 types de plans osculateurs définis au moyen du vecteur contingent.

D'après la définition introduite dans le travail [4] par K. Radziszewski on appellera plan osculateur orienté du type i le plan π_i muni d'un vecteur normal n_i univoquement déterminé et défini par les formules suivantes:

$$n_1^p = \lim_{v\to\infty}[p(M)\times MP_v].$$

$$n_2^p = \lim_{v\to\infty}[A_v M \times MB_v] \qquad A_v \dashv M \dashv B_v.$$

$$n_3^p = \begin{cases} \lim\limits_{v\to\infty}[p(M)\times p(A_v)] & \text{si} \quad M \dashv A_v \\ \lim\limits_{v\to\infty}[p(A_v)\times p(M)] & \text{si} \quad A_v \dashv M. \end{cases}$$

$$n_4^p = \begin{cases} \lim\limits_{v\to\infty}[MA_v \times A_v B_v] & \text{si} \quad M \dashv A_v \dashv B_v \\ & \text{ou} \quad A_v \dashv B_v \dashv M \\ \lim\limits_{v\to\infty}[A_v B_v \times MA_v] & \text{si} \quad A_v \dashv M \dashv B_v . \end{cases}$$

$$n_5^p = \lim_{v\to\infty}[MP_v \times p(P_v)].$$

$$n_6^p = \lim_{v\to\infty}[P_v Q_v \times Q_v A_v] \qquad P_v \dashv Q_v \dashv A_v .$$

$$n_7^p = \begin{cases} \lim\limits_{v\to\infty}[P_v Q_v \times p(Q_v)] & \text{si} \quad P_v \dashv Q_v \\ \lim\limits_{v\to\infty}[p(Q_v) \times P_v Q_v] & \text{si} \quad Q_v \dashv P_v . \end{cases}$$

$$n_8^p = \Big|\lim_{v\to\infty}[p(P_v) \times p(Q_v)] \qquad P_v \dashv Q_v .$$

$$n_9^p = \begin{cases} \lim\limits_{v\to\infty}[p(M) \times P_v Q_v] & \text{si} \quad M \dashv P_v \dashv Q_v \\ \lim\limits_{v\to\infty}[P_v Q_v \times p(M)] & \text{si} \quad P_v \dashv Q_v \dashv M . \end{cases}$$

$$n_{10}^p = \begin{cases} \lim\limits_{v\to\infty}[MP_v \times A_v B_v] & \text{si} \quad P_v \dashv M \dashv A_v \dashv B_v \\ & \text{ou} \quad P_v \dashv A_v \dashv M \dashv B_v \\ & \text{ou} \quad M \dashv P_v \dashv A_v \dashv B_v \\ & \text{ou} \quad M \dashv A_v \dashv P_v \dashv B_v \\ \lim\limits_{v\to\infty}[A_v B_v \times MP_v] & \text{si} \quad A_v \dashv B_v \dashv P_v \dashv M \\ & \text{ou} \quad A_v \dashv P_v \dashv B_v \dashv M \\ & \text{ou} \quad M \dashv P_v \dashv A_v \dashv B_v \\ & \text{ou} \quad A_v \dashv M \dashv B_v \dashv P_v . \end{cases}$$

$$n_{11}^p = \begin{cases} \lim\limits_{v\to\infty}[MP_v \times p(A_v)] & \text{si} \quad M \dashv P_v \dashv A_v \\ & \text{ou} \quad A_v \dashv P_v \dashv M \\ \lim\limits_{v\to\infty}[p(A_v) \times MP_v] & \text{si} \quad A_v \dashv M \dashv P_v \\ & \text{ou} \quad P_v \dashv M \dashv A_v . \end{cases}$$

$$n_{12}^p = \Big|\lim_{v\to\infty}[P_v Q_v \times A_v B_v] \quad \begin{array}{ll} \text{si} & P_v \dashv A_v \dashv Q_v \dashv B_v \\ \text{ou} & P_v \dashv Q_v \dashv A_v \dashv B_v . \end{array}$$

$$n_{13}^p = \begin{cases} \lim\limits_{v\to\infty}[P_v Q_v \times p(A_v)] & \text{si} \quad P_v \dashv Q_v \dashv A_v \\ \lim\limits_{v\to\infty}[p(A_v) \times P_v Q_v] & \text{si} \quad A_v \dashv P_v \dashv Q_v . \end{cases}$$

Si dans les définitions des vecteurs $n_i^p i = 1, 2, \dots, 13$ on remplace les vecteurs paratingents par les vecteurs contingents correspondants, on obtient treize définitions des vecteurs normaux des plans osculateurs défini au moyen des vecteur contingents.

Nous désignerons par $n_i^c, i = 1, 2, \dots, 13$ les vecteurs normaux ainsi définis, par a_i^p le plan osculateurs orienté π_i^p, par a_i^c le plan osculateur orienté π_i^c. Nous utiliserons encore les notations suivantes: $a_i = a_j$ — si l'existence du plan osculateur orienté a_i implique celle du plan osculateur orienté a_j et inversement, c'est-à-dire si ces plans se confondent. $a_i \to a_j$ — si l'existence du plan osculateur orienté a_i implique celle du plan osculateur orienté a_j. [Relations entre les plans osculateurs orientés. $a_i^p, a_j^p, i, j = 1, 2, 3, \dots, 13.$]

Lemme 1: $a_{12}^p = a_k^p$ $k = 6, 7, 8$.

Démonstration: $a_{12}^p \Rightarrow a_6^p$, puisque dans la définition $\pi_{12}^p = \lim\limits_{v\to\infty} (M, P_v Q_v, A_v B_v)$ il suffit $Q_v = A_v$. Nous allons encore prouver $a_6^p \to a_{12}^p$.

Supposons que la courbe $\langle A, B\rangle$ admet au point M un plan osculateur orienté a_6^p.

Considérons quatre suites de points de la courbe $\langle A, B\rangle$ $\{P_v\}$, $\{Q_v\}$, $\{A_v\}$, $\{B_v\}$ tels que pour tout v on ait $P_v \dashv Q_v \dashv A_v \dashv B_v$ et $P_v Q_v \neq \varkappa A_v B_v$.

Si pour tout v on a $A_v = Q_v$, on voit immédiatement que $a_{12}^p = a_6^p$.

Si $A_v \neq Q_v$ trois cas se présentent:

1°. $P_v Q_v \neq \lambda Q_v A_v$ et $Q_v A_v \neq \mu A_v B_v$ pour une suite infinie d'indices. Eu vertu de la définition on a donc $\lim\limits_{v\to\infty}[P_v Q_v \times Q_v A_v] = \lim\limits_{v\to\infty}[Q_v A_v \times \times A_v B_v] = n_6^p$.

Considérons sur la sphère les points qui sont les images sphériques des vecteurs $P_v Q_v$, $Q_v A_v$, $A_v B_v$.

Ils forment triangle sphérique dans lequel l'angle au sommet qui est l'image sphérique du vecteur $Q_v A_v$ tend vers π, donc $\lim\limits_{v\to\infty}[P_v Q_v \times \times A_v B_v] = n_6^p$.

2°. $P_v Q_v = \lambda Q_v A_v$, $Q_v A_v \neq \mu A_v B_v$ et $\lambda > 0$. Alors $\lim\limits_{v\to\infty}[P_v Q_v \times A_v B_v] = \lim\limits_{v\to\infty}[Q_v A_v \times A_v B_v] = n_6^p$.

3°. $P_v Q_v \neq \lambda Q_v A_v$, $Q_v A_v = \mu A_v B_v$ et $\mu > 0$. Alors $\lim\limits_{v\to\infty}[P_v Q_v \times A_v B_v] = \lim\limits_{v\to\infty}[P_v Q_v \times Q_v A_v] = n_6^p$.

Le cas où $P_v Q_v = \lambda Q_v A_v$ pour $\lambda < 0$, et $Q_v A_v = \mu A_v B_v$ pour $\mu < 0$ est impossible puisque, par hypothèse, le plan a_6^p est orienté.

En effet, supposons que l'on ait $P_v Q_v = \lambda Q_v A_v$ pour $\lambda < 0$, les points P_v, Q_v, A_v sont en lique droite. Choisissons sur la courbe un point C_v tel que $Q_v \dashv A_v \dashv C_v$ et que C_v n'appartient pas à la droite déterminée par les points A_v, Q_v. Alors $[P_v A_v \times A_v C_v] = -[Q_v A_v \times A_v C_v]$, ce qui est en contradition avec le fait que le plan α_6^p est orienté.

On a donc dans chaque cas $\alpha_{12}^p = \alpha_6^p$.

D'autre part, dans le travail [4] il a été démontré que $\alpha_6^p = \alpha_7^p = \alpha_8^p$, par conséquent $\alpha_6^p = \alpha_7^p = \alpha_8^p = \alpha_{12}^p$.

Lemme 2: $\alpha_{13}^p = \alpha_k^p k = 6, 7, 8$.

Lemme 3: $\alpha_{10}^p = \alpha_4^p$.

La démonstration le ces deux lemmes est analogue à celle du lemme 1.

Lemme 4: $\alpha_9^p = \alpha_3^p$.

Démonstration: $\alpha_9^p \to \alpha_3^p$, puisque dans la définition $\pi_9^p = \lim\limits_{v\to\infty} (M, p(M), P_v Q_v)$ il suffit de poser $P_v Q_v = p(A_v)$, Je vais encore prouver que $\alpha_3^p \to \alpha_9^p$.

Supposons que la courbe $\langle A, B\rangle$ admet au point M un plan osculateur orienté α_3^p.

Choisissons arbitrairement un vecteur $p(M) \epsilon P(M)$ et deux suites de points de la courbe $\langle A, B\rangle : \{P_v\}, \{Q_v\}$ tels que pour tout v on ait $M \dashv P_v \dashv Q_v$ et $p(M) \neq \lambda P_v Q_v$. Pour tout v il existe un point $S_v \epsilon \langle P_v, Q_v\rangle$ tel que $p(S_v)$ soit un vecteur parallèle au plan $(M, p(M), P_v Q_v)$.

Si $p(M) \neq \lambda p(S_v)$, on a pour tout v

$$\big(M, p(M), P_v Q_v\big) \| \big(M, p(M), p(S_v)\big), \text{ donc } \lim_{v\to\infty}\big(M, p(M), p(S_v)\big) = \pi_3^p.$$

Si $p(M) = \lambda p(S_v)$, les cas suivants peuvent se présenter pour tout v.

1°. $\langle P_v, Q_v\rangle$ est un arc de courbe plane contenu dans le plan $\big(P_v, p(M), P_v Q_v\big)$, pour tout v il existe donc un point $T_v, T_v \epsilon \langle P_v, Q_v\rangle$ tel que $p(T_v) \| P_v Q_v$.

Par consequent $\big(M, P_v Q_v, p(M)\big) \| \big(M, p(T_v), p(M)\big)$ c'est-à-dire $\lim\limits_{v\to\infty}\big(M, p(M), P_v Q_v\big) = \pi_3^p$.

2°. $\langle P_v, Q_v\rangle$ n'est pas entiérement contenu dans le plan $\big(P_v, p(M), P_v Q_v\big)$ pour une suite infinie d'indices v. Il existe donc des points $U_v, V_v \epsilon \langle P_v, Q_v\rangle$ tels que pour tout v les vecteurs $p(U_v), p(V_v)$ sont dirigés vers les deux demi-espace ouverts déterminés dans E_3, par le plan $\big(P_v, p(M), P_v Q_v\big)$ (v. [5], p. 48).

Alors $p(M) \neq \lambda p(U_v)$ et $p(M) \neq \mu p(V_v)$, c'est-à-dire que le plans $\big(P_v, p(M), p(U_v)\big)$ et $\big(P_v, p(M), p(V_v)\big)$, sont univoquement déterminés.

Considérons sur une sphère les points A, B, C, D, qui sont respectivement les images des vecteurs: $p(M); P_v Q_v, p(V_v), p(V_v)$.

Dans le triangle ACD l'angle au sommet C tend vers zéro, puisque $\lim\limits_{v\to\infty}[p(M)\times p(U_v)] = \lim\limits_{v\to\infty}[p(M)\times p(V_v)]$.

Les points C et D appartiennent à deux demisphères différents déterminés par le grand cercle $\widehat{AB}$ sur la sphère.

Donc $\lim\limits_{v\to\infty}\big(M, p(M), P_vQ_v\big) = \lim\limits_{v\to\infty}\big(M, p(U_v), p(M)\big) = \lim\limits_{v\to\infty}\big(M, p(M), p(V_v)\big) = \pi_3^p$.

Je vais encore montrer que le plan limite est orienté. Désignons par Σ_v le plan $\big(P_v, p(M), n_3^p\big)$.

Comme le vecteur n_3^p est univoquement déterminé, il en résulte immédiatement qu'il existe un entourage $\langle L, N\rangle$ $(L \dashv M \dashv N)$ du point M tel que pour tout point $P \in \langle L, N\rangle$ le vecteur $p(P)$ est toujours dirigé vers le demi-espace défini par Σ_v dans E_3 et déterminé par le vecteur $n_3^p \times p(M)$. Désignons ce demi-espace par E_Σ^+. Je vais prouver que pour tout v les vecteurs P_vQ_v, où $L \dashv P_v \dashv Q_v \dashv N$, sont dirigés vers E_Σ^+.

Supposons que les équations de l'arc $\langle P_v, Q_v\rangle$ de la courbe soient: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$ dans un système de coordonnées xyz, où $P_v = \big(f(\alpha), g(\alpha), h(\alpha)\big)$ est l'origine et les verseurs des axes x, y sont contenus dans le plan Σ_v, tandis que le verseur de l'axe z est dirigé vers Σ_Σ^+. Tous les vecteurs $f'(t), g'(t), h'(t)$ pour $t \in (\alpha, \beta)$ sont dirigés vers E_Σ^+, $f'(t)$, $g'(t)$, $h'(t)$ étant les nombres dérivés. En vertu d'un théorème connu (Natanson, Reele Funktionen) pour tout $t, t+h \in (\alpha, \beta)$ et $h > 0$ on a $z(t+h) > z(t)$. C'est-à-dire que pour tout v le vecteur P_vQ_v est aussi dirigé vers Σ_Σ^+. Par conséquent $\lim\limits_{v\to\infty}[p(M) \times P_vQ_v] = n_3^p$.

Lemme 5: $a_3^c = a_9^c$.

Lemme 6: $a_4^c = a_{11}^c$.

Les démonstrations de ces deux lemmes sont analogues à celle du lemme 4.

Lemme 7: $a_4^p = a_{11}^p$.

Démonstration: Je vais d'abord prouver que $a_4^p \to a_{11}^p$. En vertu du lemme 3 on a $a_4^p \to a_{10}^p$, puisque dans la définition $\pi_{10}^p = \lim\limits_{v\to\infty}(M, MP_vA_vB_v)$ il suffit de poser $A_vB_v = p(Q_v)$, donc $a_4^p \to a_{11}^p$.

Je vais encore montrer que $a_{11}^p \to a_4^p$.

Comme on a, en vertu du lemme 6, $a_{11}^c \to a_c^4 = a_4^p$ et de plus $a_{11}^p \to a_{11}^c$, il s'ensuit que $a_{11}^p \to a_4^p$.

Lemme 8: $a_{13}^c = a_{12}^c$.

Démonstration: Pour prouver que $a_{12}^c \to a_{13}^c$ il suffit de poser dans la définition $\pi_{12}^c = \pi_{12}^p = \lim\limits_{v\to\infty}(M, A_vB_v, P_vQ_v)$, $A_vB_v = c(A_v)$.

Je vais encore montrer que $a_{13}^c \to a_{12}^c$.

En vertu des égalités établies dans le travail [1] on a $a_6^c = a_7^c = a_8^c$, d'autre part on a, en vertu du lemme 1 $a_6^p = a_{12}^p = a_{13}^c$ et $a_{13}^c \to a_7^c$, car il suffit de poser $Q_v = A_v$, dans le definition $\pi^c_{13} = \lim(M, P_vQ_v, c(A_v))$. Par conséquent $a^c_{13} \to a^c_7 \to a^c_6 = a^p_6 = a^p_{12} = a^c_{12}$ donc $a^c_{13} \to a^c_{12}$.

En récapitulant les résultats et en se basant sur les travaux [2] et [4] on peut ènoncer le théorème suivant:

Théorème: *Entre les plans osculateurs orientés des types définis ci-dessus on a les reletions suivantes*:

$$a^p_{12} = a^c_{12} = a^p_{13} = a^c_{13} = a^p_6 = a^c_6 = a^p_7 = a^c_7 = a^p_8 = a^c_8 \Rightarrow a^p_j \Rightarrow a^c_j,$$

$j = 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11.$

$$a^p_4 = a^c_4 = a^p_{10} = a^c_{10} = a^p_{11} = a^c_{11} = a^p_3 = a^p_9 \Rightarrow a^c_3 \Rightarrow a^c_9.$$

Les autres relations qui existent entre les plans ont été établies dans les travaux [1] et [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] **Bouligand, G**; *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Paris 1952.

[2] **Maksym, M**; *Sur les relations entre les plans osculateurs orientés*, Ann. Univ, M. Curie-Skłodowska 17, (1963). p. 115-122.

[3] **Pauc, C**; *Les méthodes directes en géométrie différentialle*, Paris 1941.

[4] **Radziszewski, K**, *Sur les relations entre les plans osculateurs orientés*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, XVII, 1963. p. 85-93.

[5] **Radziszewski, K**; *Sur les plans osculateurs orientés*, Ann. Pol. Math., 12, (1962). p. 160-169.

Streszczenie

W pracy tej określiłam kilka nowych typów płaszczyzn ściśle stycznych definiowanych przy pomocy wektorów paratyngensowych bądź kontyngensowych.

Zajmuję się również badaniem zależności między nimi i między płaszczyznami ściśle stycznymi typów określonych przez Van der Waaga.

Резюме

При помощи паратингенсовых или контингенсовых векторов определяются несколько новых соприкасающихся плоскостей. Исследуются зависимости между ними и соприкасающимися плоскостями типов, определенных Ван дер Вааге.