ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XVIII, 11 SECTIO A 1964

Z Katedry Geometrii Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik Katedry: doc. dr Konstanty Radziszewski

ANNA ŻMUREK

Sur les hyperplans osculateurs orientés d'une courbe dans l'espace euclidien à n dimensions

O zorientowanych hiperpłaszczyznach ściśle stycznych krzywej w przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej

О соприкасающихся ориентированных гиперплоскостях кривой в n-мерном евклидовом пространстве

Introduction

Dans ce travail nous avons introduit les définitions des hyperplans osculateurs orientés à $(n-1)$ dimensions des types VI et VIII pour une courbe plongée dans l'espace euclidien à n dimensions, généralisant ainsi les types correspondants des plans osculateurs dans la classification de Van der Waag [3], et nous y avons établi l'équivalence de ces hyperplans.

Le présent travail est en rapport avec le problème des courbures des courbes dans l'espace euclidien à n dimensions étudié dans le travail [1] de K. Radziszewski. Nous admettrons que les courbes considérées sont régulières de classe C^1.

Notations et définitions

Dans l'espace euclidien à n dimensions E^n le symbole $\langle A * B\rangle$ désignera un arc de courbe fermé d'extrémités A et B. Nous supposons que la courbe $\langle A * B\rangle$ admet en tout point un vecteur tangent continu.

Nous appellerons hyperplan osculateur à $(n-1)$ dimensions du type VI de la courbe $\langle A * B\rangle$ au point $M \in \langle A * B\rangle$ la limite des hyperplans à $(n-1)$ dimensions qui passent par les n points différents $P_1, P_2, \ldots, P_n \in (A * B)$ lorsque ces points tendent vers M de la manière quelconque et sont rangés dans l'ordre qui correspond à des valeurs croissantes du paramètre sur la courbe $\langle A * B\rangle$, c'est-à-dire $P_i \in (P_{i-1} * P_{i+1})$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$. L'hyperplan osculateur à $(n-1)$ dimensions du type VI au point $M \in \langle A*B \rangle$ sera noté:

$$\pi_{\mathrm{VI}}(M) = \lim_{P_1, P_2, \ldots, P_n \to M} \pi(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

Nous appellerons hyperplan osculateur à $(n-1)$ dimensions du type VIII au point M de la courbe $\langle A*B \rangle$ la limite des hyperplans à $(n-1)$ dimensions qui passent par le point M et sont parallèles à $(n-1)$ vecteurs tangents $t(P_1), t(P_2), \ldots, t(P_{n-1})$ de la courbe $\langle A*B \rangle$ lorsque les points $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ tendent vers M et $P_i \in (P_{i-1}*P_{i+1})$, $i = 2, 3, \ldots, n-2$. L'hyperplan osculateur à $(n-1)$ dimensions du type VIII au point $M \in \langle A*B \rangle$ sera noté:

$$\pi_{\mathrm{VIII}}(M) = \lim_{P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \to M} \pi\big(t(P_1), t(P_2), \ldots, t(P_{n-1})\big)$$

On appelle produit vectoriel généralisé des vecteurs $P_1P_2, P_2P_3, \ldots$ $\ldots, P_{n-1}P_n$, tels que les composantes du vecteur P_iP_{i+1} sont $(x_{i+1}^1 - x_i^1, x_{i+1}^2 - x_i^2, \ldots, x_{i+1}^n - x_i^n)$ le vecteur dont les composantes scalaires (coordonnées) sont les valeurs des déterminants obtenus de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} x_2^1 - x_1^1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^n - x_1^n \\ x_3^1 - x_2^1 & x_3^2 - x_2^2 & \ldots & x_3^n - x_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 - x_{n-1}^1 & x_n^2 - x_{n-1}^2 & \ldots & x_n^n - x_{n-1}^n \end{matrix} \right\|$$

en supprimant successivement les colonnes et munis d'un signe convenable. Le produit vectoriel généralisé de la suite des vecteurs $P_1P_2, P_2P_3, \ldots$ $\ldots, P_{n-1}P_n$ sera désigné par $[P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n]$.

L'hyperplan passant par les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$, $P_i \in (P_{i-1}*P_{i+1})$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$ et muni d'un vecteur normal convenable

$$\frac{[P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n]}{[P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n]}$$

sera désigné par $\pi^*(P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n)$.

L'hyperplan osculateur du type VI au point M de le courbe $\langle A*B \rangle$ sera dit orienté si les hyperplans $\pi^*(P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n)$ ont une limite lorsque les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ tendent vers M. L'hyperplan osculateur orienté du type VI au point $M \in \langle A*B \rangle$ sera noté $\pi_{\mathrm{VI}}^*(M)$. Le vecteur

$$N_{\mathrm{VI}}(M) = \lim_{P_1, P_2, \ldots, P_n \to M} \frac{[P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n]}{\|[P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n]\|}$$

sera appelé vecteur normal de l'hyperplan osculateur à $(n-1)$ dimensions du type VI au point $M \in \langle A*B \rangle$. Si l'hyperplan osculateur à $(n-1)$ dimensions du type VI au point $M \in \langle A*B \rangle$ existe et est orienté, le vecteur $N_{\mathrm{VI}}(M)$ existe, n'est pas nul et possède un sens fixe lorsque les points $P_1, P_2, \ldots, P_n \to M$.

On dèfiniera de la même manière l'hyperplan osculateur orienté à $(n-1)$ dimensions du type VIII $\pi^*_{\mathrm{VIII}}(M)$ et son vecteur normal

$$N_{\mathrm{VIII}}(M) = \lim_{P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \to M} \frac{[t(P_1), t(P_2), \ldots, t(P_{n-1})]}{|[t(P_1), t(P_2), \ldots, t(P_{n-1})]|}$$

Dans le cas où la courbe $\langle A*B \rangle$ contient des arcs situés dans un hyperplan à $(n-2)$ dimensions, on entendra par hyperplan osculateur à $(n-1)$ dimensions aux points intérieurs de ces arcs le plan qui conviendra le mieux à nos raisonnements, mais le même pour tous les points de l'arc donné et tel que la continuité soit respectée.

Equivalence des hyperplans osculateurs

Nous montrerons d'abord que l'existence d'un vecteur tangent cotinu et d'un hyperplan osculateur orienté à $(n-1)$ dimensions du type VI au point M de la courbe $\langle A*B \rangle$ entraîne l'existence en ce point d'hyperplan osculateur orienté à $(n-1)$ dimensions du type VIII.

Avant de démontrer ce théorème nous établirons le lemme suivant:

Lemme. Désignons par le symbole $(a, b_1, b_2, \ldots, b_k, c, b_{k+1}, \ldots, b_{n-2})$ l'ensemble ordonné de n vecteurs de l'espace E^n de même origine 0 et de longueur 1. Si les hyperplans $\pi^*_1(a, b_1 b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{n-2})$ et $\pi^*_2(b_1, b_2, \ldots, b_k, c, b_{k+1}, \ldots, b_{n-2})$ tendent vers le même hyperplan orienté limite $\pi^*(e)$, lorsque les vecteurs $a, b_1, b_2, \ldots, b_k, c, b_{k+1}, \ldots, b_{n-2}$ tendent vers le vecteur e, $|e| = 1$, les hyperplans $\pi^*(a, b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, c, b_{k+1}, \ldots, b_{n-2})$, admettent une limite lorsque les vecteurs $a, b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, c, b_{k+1}, \ldots, b_{n-2}$ tendent vers e et cette limite est $\pi^*(e)$.

Remarque 1. Si les vecteurs $a, b_1, b_2, \ldots, b_k, c, b_{k+1}, \ldots, b_{n-2}$ sont les valeurs d'une même fonction vectorielle $x(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, pour les valeurs correspondantes du paramétre t, c'est-à-dire si $a = x(t_0)$, $b_i = x(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$, $c = x(t^*)$, le symbole précédent déterminant l'ordre des vecteurs sera considéré comme équivalent à la relation

$$a < t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t^* < t_{k+1} < \ldots < t_{n-2}.$$

Remarque 2. L'hypothèse, en vertu de laquelle les origines des vecteurs ont été prises au même point 0 et leur logueur est 1, n'est pas essentielle et ne joue qu'un rôle accessoire dans la démonstration du lemme.

Nous établirons celui-ci par récurrence.

Démonstration. Dans l'espace E^3 on a $b_k = b_1 = b$ et nous supposons que l'ordre des vecteurs est (a, b, c). Par hypothése $\pi^*_1(a, b)$ et $\pi^*_2(b, c)$

tendent vers $\pi^*(e)$ lorsque les vecteurs a, b, c tendent vers e. Les extrémités des vecteurs a, b, c, e déterminent sur la sphère unité les points A, B, C, E. On obtient donc sur la sphère un triangle ABC dans lequel l'angle au sommet B tendra vers la valeur π, donc les autres angles du triangle ABC tendront vers zéro; il en résulte que le plan $\pi^*(a, c)$ tend aussi vers $\pi^*(e)$.

Supposons maintenant que le lemme soit vrai dans l'espace E^n, c'est-à-dire que si $\pi_1^*(a, b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{n-2})$ et $\pi^*(b_1 b_2, \ldots, b_k, c, b_{k+1}, \ldots, b_{n-2})$ tendent vers $\pi^*(e)$, l'hyperplan $\pi^*(a, b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, c, b_{k+1}, \ldots, b_{n-2})$ tend vers $\pi^*(e)$ lorsque les vecteurs $a, b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k, c, b_{k+1}, \ldots, b_{n-2}$ tendent vers e.

Supposons que dans l'espace E^{n+1} les hyperplans $\pi_1^{*\prime}(a', b_1', \ldots, b_m', b_{m+1}', \ldots, b_{n-1}')$, $\pi_2^{*\prime}(b_1', b_2', \ldots, b_m', c', b_{m+1}', \ldots, b_{n-1}')$ tendent vers $\pi^{*\prime}(e')$, lorsque les vecteurs de cet espace $a', b', \ldots, b_m', c', b_{m+1}', \ldots, b_{n-1}'$ tendent vers e', ces vecteurs constituant un ensemble ordonné de $(n-1)$ éléments. Les extrémités de ces vecteurs déterminent sur la hypersphère unité S^n respectivement $A', B_1', B_2', \ldots, B'_m, C', B_{m+1}', \ldots, B_{n-1}'$ et E'. Ayant fixé l'ordre des vecteurs dans l'espace E^{n+1} on obtient un ordre déterminé des points correspondants sur l'hypersphère unité à n dimensions S^n, soit $(A', B_1', \ldots, B_m', C', B_{m+1}', \ldots, B_{n-1}')$.

Par le point E menons l'hyperplan E^n à n dimensions tangent à l'hypersphère S^n. Comme les vecteurs a', b_i', c', $i = 1, 2, \ldots, n-1$, tendent vers le vecteur e', on peut admettre que $\sphericalangle(a', e') < \frac{\pi}{2}, < \sphericalangle(b_i', e') < \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $\sphericalangle(c', e') < \frac{\pi}{2}$. Après le prolongement de ces vecteurs jusqu'à l'hyperplan E^n nous obtenons respectivement les points $A, B_i, C \in E^n$, la correspondance entre les points $A', B_i', C', E' \in S^n$ et $A, B_i, C, E \in E^n$ étant biunivoque et l'ordre des points correspondants étant conservé. On pourra donc, dans la suite, au lieu des points $A', B_i', C', E' \in S^n$ considérer les points $A, B_i, C, E \in E^n$.

L'ordre des points $(A, B_1, \ldots, B_m, C, B_{m+1}, \ldots, B_{n-1})$ induit à son tour l'ordre des vecteurs correspondants: $(AB_1, B_1B_2, \ldots, B_mC, CB_{m+1}, \ldots \ldots, B_{n-2}B_{n-1})$. On peut admettre que ces vecteurs ont une même origine 0 (on peut les transporter parallèlement en leur orgine commune 0). Menons $\pi_1^*(AB_1, B_1B_2, \ldots, B_{m-1}B_m, B_mB_{m+1}, \ldots, B_{n-2}B_{n-1})$, $\pi_2^*(B_1B_2, B_2B_3, \ldots \ldots, B_{m-1}B_m, B_mC, CB_{m+1}, \ldots, B_{n-2}B_{n-1})$ et $\pi^*(AB_1, B_1B_2, \ldots, B_{m-1}C, CB_{m+1}, \ldots, B_{n-2}B_{n-1})$. Comme les hyperplans π_1^*, π_2^*, π^* dans l'espace E^n constituent "l'arête" d'intersection de l'hyperplan dans l'espace euclidien $E^n \subset E^{n+1}$ avec les hyperplans correspondants $\pi_1^{*\prime}, \pi_2^{*\prime}, \pi^{*\prime}$ de l'espace E^{n+1} (ils ont n points communs) et les hyperplans $\pi_1^{*\prime}, \pi_2^{*\prime}$ tendent par hypothèse vers $\pi^{*\prime}(e')$, lorsque les vecteurs $a', b_1', \ldots, b_m', c', b_{m+1}', \ldots, b_{n-1}'$

tendent vers e, il s'ensuit que les hyperplans π_1^* et π_2^* tendent vers $\pi^*(E)$ lorsque les points $A, B_1, \ldots, B_m, C, B_{m+1}, \ldots, B_{n-1}$ tendent vers le point E (leur orientation étant conservée, puisque celle-ci est induite par l'orientation des hyperplans $\pi_1^{*'}$ et $\pi_2^{*'}$.

En vertu des propriétés des déterminants (du produit vectoriel) on a:

$$\pi_1^*(AB_1, B_1B_2, \ldots, B_{m-2}B_{m-1}, B_{m-1}B_m, B_mB_{m+1}, \ldots, B_{n-2}B_{n-1}) =$$
$$= \pi_1^*(AB_1, B_1B_2, \ldots, B_{m-2}B_{m-1}, B_{m-1}B_m, B_{m-1}B_{m+1}, \ldots, B_{n-2}B_{n-1}) \text{ et}$$
$$\pi_2^*(B_1B_2, B_2B_3, \ldots, B_{m-1}B_m, B_mC, CB_{m+1}, \ldots, B_{n-2}B_{n-1}) =$$
$$= \pi_2^*(B_1B_2, B_2B_3, \ldots, B_{m-1}B_m, B_{m-1}C, B_{m-1}B_{m+1}, \ldots, B_{n-2}B_{n-1}).$$

En introduisant les notations: $AB_1 = a$, $B_1B_2 = b_1, \ldots, B_{m-2}B_{m-1} = b_{m-2}$, $B_{m-1}B_m = b_{m-1}$, $B_{m-1}C = c$, $B_{m-1}B_{m+1} = b_m$, $B_{m+1}B_{m+2} = b_{m+1}, \ldots$ $\ldots, B_{n-2}B_{n-1} = b_{n-2}$ on obtient: $\pi_1^*(a, b_1, \ldots, b_{m-2}, b_{m-1}, b_m, \ldots, b_{n-2})$ tend vers l'hyperplan $\pi^*(E)$, et $\pi_2^*(b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}, c, b_m, \ldots, b_{n-2})$ tend vers l'hyperplan $\pi^*(E)$, d'où, en vertu de l'hypothèse de récurrence, il résulte que l'hyperplan $\pi^*(a, b_1, \ldots, b_{m-2}, c, b_m, \ldots, b_{n-2})$ tend aussi vers $\pi^*(E)$. En revenant aux notations précédentes on obtient: $\pi^*(AB_1, B_1B_2, \ldots, B_{m-2}B_{m-1}, B_{m-1}C, B_{m-1}B_{m+1}, \ldots, B_{n-2}B_{n-1}) =$ $= \pi^*(AB_1, B_1B_2, \ldots, B_{m-2}B_{m-1}, B_{m-1}C, CB_{m+1}, \ldots, B_{n-2}B_{n-1})$ tend vers l'hyperplan $\pi^*(E)$, d'où résulte directement l'existence de la limite des hyperplans $\pi^{*'}(a', b_1', \ldots, b_{m-1}', c', b_{m+1}', \ldots, b_{n-1}')$ égale à $\pi^{*'}(e')$, lorsque les vecteurs $a', b_1', \ldots, b_{m-1}', c', b_{m+1}', \ldots, b_{n-1}'$ tendent vers le vecteur e'.

Théorème 1. *Si la courbe $\langle A * B \rangle$ admet un vecteur tangent continu et un hyperplan osculateur orienté à $(n-1)$ dimensions du type VI, elle admet un hyperplan osculateur orienté à $(n-1)$ dimensions du type* VIII.

Démonstration. Sur la courbe $\langle A * B \rangle$ choisissons arbitrairement $(n-1)$ points $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ tels que $P_i \in (P_{i-1} * P_{i+1})$, $i = 2, 3, \ldots, n-2$. Admettant l'existence d'un hyperplan osculateur à $(n-1)$ dimensions du type VI au point $M \in \langle A * B \rangle$ nous allons prouver que les hyperplans $\pi^*\big(t(P_1), t(P_2), \ldots, t(P_{n-1})\big)$ passant par le point M et parallèles aux vecteurs tangents $t(P_1), t(P_2), \ldots, t(P_{n-1})$ de la courbe $\langle A * B \rangle$ tendent vers une limite lorsque les les points $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ tendent vers M.

Prenons sur l'arc $\langle A * B \rangle$ n points quelconques $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ tels que $Q_i \in (Q_{i-1} * Q_{i+1})$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$. En vertu de l'hypothèse les hyperplans $\pi^*(Q_1Q_2, Q_2Q_3, \ldots, Q_{n-1}Q_n)$, ont une limite $\pi_{\mathrm{VI}}^*(M)$ lorsque les points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ tendent vers M. Comme l'hyperplan limite $\pi_{\mathrm{VI}}^*(M)$ ne dépend pas de la manière dont les points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ tendent vers le point M, $\pi_{\mathrm{VI}}^*(M)$ sera aussi la limite de l'hyperplan $\pi_1^*(t(P_1), P_1P_2, P_2Q_4, Q_4Q_5, \ldots, Q_{n-1}Q_n)$, lorsque les points $P_1, P_2, Q_4, Q_5, \ldots, Q_n$ tendent vers M (puisque le vecteur tangent $t(P_1)$ est un cas particulier de la position de 2 points de la courbe $\langle A*B\rangle$, à savoir les points Q_1 et Q_2 lorsque ces points tendent vers P_1; on peut aussi admettre $Q_3 = P_2$). On prouve d'une manière analogue que l'hyperplan $\pi_1^{*\prime}(P_1P_2, t(P_2), P_2Q_4, \ldots, Q_{n-1}Q_n)$ tend aussi vers $\pi_{\mathrm{VI}}^*(M)$, lorsque les points $P_1, P_2, Q_4, Q_5, \ldots, Q_n$ tendent vers M (on peut admettre $Q_1 = P_1, Q_2, Q_3 \to P_2$). Il en résulte, en vertu du lemme, que l'hyperplan $\pi_2^*(t(P_1), t(P_2), P_2Q_4, \ldots, Q_{n-1}Q_n)$, aura aussi la même limite $\pi_{\mathrm{VI}}^*(M)$ lorsque les points $P_1, P_2, Q_4, Q_5, \ldots, Q_n \to M$. Comme les points $Q_4, Q_5, \ldots, Q_n$ sont encore arbitraires, on ne changera pas la limite de l'hyperplan π_2^* en admettant $Q_4 = P_3$, c'est-à-dire en prenant l'hyperplan $\pi_2^*\big(t(P_1), t(P_2), P_2P_3, P_3Q_5, \ldots, Q_{n-1}Q_n\big)$.

Considérons encore l'hyperplan $\pi_2^{*\prime}\big(t(P_2), P_2P_3, t(P_3), P_3Q_5, \ldots, Q_{n-1}Q_n\big)$, (comme position particulière de l'hyperplan $\pi^*(Q_1Q_2, Q_2Q_3, \ldots, Q_{n-1}Q_n)$, lorsque $Q_1, Q_2, \to P_2, Q_3, Q_4 \to P_3$). Il tend vers la même limite $\pi_{\mathrm{VI}}^*(M)$, lorsque les points $P_2, P_3, Q_5, Q_6, \ldots, Q_n \to M$. Considèrant les hyperplans π_2^* et $\pi_2^{*\prime}$ et profitant du lemme on constate que l'hyperplan $\pi_3^*\big(t(P_1), t(P_2), t(P_3), P_3Q_5, \ldots, Q_{n-1}Q_n\big)$ tend vers $\pi_{\mathrm{VI}}^*(M)$ lorsque les points $P_1, P_2, P_3, Q_5, \ldots, Q_n \to M$.

En répétant ce raisonnement $(n-2)$ fois on obtient les hyperplans $\pi_{n-2}^*\big(t(P_1), t(P_2), \ldots, t(P_{n-2}), P_{n-2}P_{n-1}\big)$ et $\pi_{n-2}^{*\prime}\big(t(P_2), t(P_3), \ldots, t(P_{n-2}), P_{n-2}P_{n-1}, t(P_{n-1})\big)$. Ces hyperplans ont le même hyperplan limite $\pi_{\mathrm{VI}}^*(M)$. En vertu du lemme on en déduit que l'hyperplan $\pi_{n-1}^*(t(P_1), t(P_2), \ldots$ $\ldots, t(P_{n-2}), t(P_{n-1})\big)$ tend aussi vers $\pi_{\mathrm{VI}}^*(M)$ lorsque les points $P_1, P_2, \ldots$ $\ldots, P_{n-1}$ tendent vers M.

Les points $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ ayant été choisis arbitrairement sur l'arc $\langle A*B\rangle$, cette limite en dépend pas du système de points $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ tendent vers M, pourvu que soit vérifiée la condition: $P_i \in (P_{i-1}*P_{i+1})$, $i = 2, 3, , \ldots, n-2$. Par conséquent l'hyperplan osculateur orienté à $(n-1)$ dimensions du type VIII existe et il est égal à $\pi_{\mathrm{VI}}^*(M)$ ce qu'il fallait démontrer.

Nous allons maintenant prouver que l'existence d'un hyperplan osculateur orienté à $(n-1)$ dimensions du type VIII au point M de la courbe $\langle A*B\rangle$ entraîne celle d'une hyperplan osculateur orienté à $(n-1)$ dimensions du type VI en ce point.

Théorème 2. *Si la courbe $\langle A*B\rangle$ admet en tout point un vecteur tangent continu et un hyperplan osculateur orienté à $(n-1)$ dimensions du type* VIII, *elle admet aussi un hyperplan osculateur orienté à $(n-1)$ dimensions du type* VI.

Démonstration. Sur l'arc $\langle A*B\rangle$ choisissons arbitrairement n points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ tels que $P_i \in (P_{i-1}*P_{i+1})$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Sur les arcs $(P_1*P_2), (P_2*P_3), \ldots, (P_{n-1}*P_n)$ il existe des points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$ tels que les vecteurs tangents $t(Q_1), t(Q_2), \ldots, t(Q_{n-1})$ sont parallèles à l'hyperplan $\pi(P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n)$. L'hyperplan $\pi\big(t(Q_1), t(Q_2), \ldots$ $\ldots, t(Q_{n-1})\big)$ est déterminé univoquement et tend vers $\pi_{\mathrm{VIII}}(M)$ d'où il résulte que l'hyperplan $\pi(P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n)$, étant parallèle à $\pi\big(t(Q_1), t(Q_2), \ldots, t(Q_{n-1})\big)$, tendra vers la limite $\pi_{\mathrm{VI}}(M) = \pi_{\mathrm{VIII}}(M)$ lorsque les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ tendent vers M.

Nous allons montrer que l'hyperplan $\pi_{\mathrm{VI}}(M)$ est orienté.

Supposons le contraire. Alors il existe dans tout voisinage $U(M)$ du point M deux suites de points: $P_1, P_2, \ldots, P_n$ et $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ telles que les vecteurs normaux des hyperplans $\pi^*(P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n)$ et $\pi^{*\prime}(P'_1P'_2, P'_2P'_3, \ldots, P'_{n-1}P'_n)$ ont des sens contraires. Si l'on désigne par N et N' les vecteurs normaux des hyperplans $\pi^*(P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n)$ et $\pi^{*\prime}(P'_1P'_2, P'_2P'_3, \ldots, P'_{n-1}P'_n)$ et si l'on admet que

$$\lim_{P_1,P_2,\ldots,P_n\to M} N = N(M) \text{ et } \lim_{P'_1,P'_2,\ldots,P'_n\to M} N' = -N(M)$$

les produits scalaires $N\cdot N(M)$ et $N'\cdot N(M)$ seront de signes contraires. Entre la suite de points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ et la suite $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ il y a une transition continue et les valeurs des produits scalaires $N\cdot N(M)$, $N'\cdot N(M)$, varient d'une manière continue en même temps que les points (comme polynômes des composantes des vecteurs respectivement $P_1P_2, P_2P_3, \ldots$ $\ldots, P_{n-1}P_n$ et $P'_1P'_2, P'_2P'_3, \ldots, P'_{n-1}P'_n$), lorsque les vecteurs normaux N et N' sont déterminés; par conséquent dans tout voisinage $U(M)$ du point M il existe une suite de points $P''_1, P''_2, \ldots, P''_n$ tels que $P''_i \in (P''_{i-1} * P''_{i+1})$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$ et $N''\cdot N(M) = 0$, si N'' est le vecteur normal de l'hyperplan $\pi^{*\prime\prime}(P''_1P''_2, P''_2P''_3, \ldots, P''_{n-1}P''_n)$, ou bien $[P''_1P''_2, P''_2P''_3, \ldots, P''_{n-1}P''_n]$ $= 0$ si le vecteur N'' est indéterminé.

Dans un voisinage suffidamment petit $U(M)$ du point M le vecteur N'' ne pouvant être orthogonal à $N(M)$ comme vecteur normal de l'hyperplan $\pi^{*\prime\prime}(P''_1P''_2, P''_2P''_3, \ldots, P''_{n-1}P''_n)$, determiné par hypothèse et colinéaire à la limite avec la vecteur $N(M)$, l'égalité $N''\cdot N(M) = 0$ entraîne que le vecteur N'' est indéterminé, d'où $[P''_1P''_2, P''_2P''_3, \ldots, P''_{n-1}P''_n] = 0$. De cette derniére condition résulte que les vecteurs $P''_1P''_2, P''_2P''_3, \ldots, P''_{n-1}P''_n$ sont linéairement dépendants et le hyperplan à $(n-1)$ dimensions $^*\pi''(P''_1P''_2, P''_2P''_3, \ldots, P''_{n-1}P''_n)$ n'est pas déterminé. Par les vecteurs $P''_1P''_2, P''_2P''_3, \ldots, P''_{n-1}P''_n$ on peut donc mener deux hyperplans distincts à $(n-1)$ dimensions: $\pi_1(P''_1P''_2, P''_2P''_3, \ldots, P''_{n-1}P''_n)$, $\pi_2(P''_1P''_2, P''_2P''_3, \ldots$ $\ldots, P''_{n-1}P''_n)$. En s'appuyant sur la première partie de la démonstration on prouve que les deux hyperplans π_1 et π_2 tendent vers la même limite $\pi_{\mathrm{VI}}(M) = \pi_{\mathrm{VIII}}(M)$, en contradiction avec l'hypothèse $\pi_1 \neq \pi_2$.

Il existe donc un hyperplan osculateur orienté à $(n-1)$ dimensions du type VI qui se $\overset{*}{\pi}_{\mathrm{VIII}}(M)$, ce qu'il fallait démontrer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Radziszewski, K., *Sur la coincidence des courbes*, Annales UMCS, vol. XVII, (1963).
[2] Radziszewski, K., *Sur les plans osculateurs orientés*, Annales UMCS, vol. XVII, (1963).
[3] Van der Waag, E. J., *Sur les plans osculateurs*, I, II, Indagationes Mathematicae, vol. XIV, (1952), p. 41-62.
[4] Borsuk, K., *Geometria analityczna wielomiarowa*, Warszawa 1964.

Streszczenie

W niniejszej pracy zostały wprowadzone definicje $(n-1)$ — wymiarowych zorientowanych hiperpłaszczyzn ściśle stycznych typu VI i VIII dla krzywej zanurzonej w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej stanowiące uogólnienie odpowiednich typów płaszczyzn ściśle stycznych w klasyfikacji Van der Waaga [3] oraz została wykazana równoważność tych hiperpłaszczyzn.

Резюме

В работе введены определения $(n-1)$ — мерных соприкасающихся гиперплоскостей типа VI и VIII кривой в n-мерном пространстве, являющиеся обобщением соответствующих типов соприкасающихся плоскостей в классификации Ван дер Ваага.

Доказывается, что эти плоскости эквивалентны.