ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA

VOL. XVIII, 7 SECTIO A 1964

Z Zakładu Funkcji Analitycznych Zespołowej Katedry Matematyki
Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik Zakładu: doc. dr Jan Krzyż

ELIGIUSZ ZŁOTKIEWICZ

Sur les domaines des valeurs de certaines fonctionnelles dans la classe $U(p)$

O obszarach zmienności pewnych funkcjonałów w klasie $U(p)$

Мажорантные области для некоторых выражений в классе $U(p)$

1. Introduction.

Désignons par $U(p)$, $0<|p|<1$, la classe des fonctions méromorphes et univalentes dans le cercle K, $K=\{z:|z|<1\}$, développables dans le cercle $|z|<|p|<1$ en une série de la form

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots \tag{1.1}$$

et admettant au point $z=p$, $0<|p|<1$, un simple pole de résidu R, $R=\operatorname{res}_{z=p}f(z)$.

Sans nuire à la généralité des raisonnements, nous pouvons admettre que $0<p<1$, car is $f\in U(p)$, on a $e^{-it}f(ze^{it})\in U(pe^{-it})$ pour tout t réel, donc en particulier aussi pour $t=\operatorname{Arg}p$.

Y. Komatu [4] a démontré que le domaine de variabilité de l'expression $\log(-p^2R^{-2})$ dans la classe $U(p)$, $0<p<1$, est le cercle

$$|\log(-p^2R^{-2})|\leqslant -\log(1-p^2).$$

Il en résulte, en particulier, l'inegalité

$$p^2(1-p^2)\leqslant |R|\leqslant p^2(1-p^2)^{-1} \tag{1.2}$$

où il y a égalité respectivement pour les fonctions

$$f_1(z)=pz(1-pz)(p-z)^{-1};\ f_2(z)=pz(p-z)^{-1}(1-pz)^{-1}$$

De ce résultat et du théorème correspondant de Hurwitz il s'ensuit que $U(p)$ est une famille compacte et que, par suite, il est posible d'étudier les méthodes et problèmes extrémaux relatifs à cette famille par les méthodes variationnelles. Une de ces méthodes est la suivante

Théorème A. [5] *Si $f \epsilon U(p)$ et $z_k (k = 1, 2, \ldots, m)$ sont des points quelconques du cercle K distincts du point $z = p$, et si $A_k (k = 1, 2, \ldots, m)$ sont des nombres complexes quelconques fixés et $a = -pR^{-1}$, il existe un nombre positif λ_0 tel que pour tout $\lambda \epsilon < 0, \lambda_0)$ il existe des fonctions de la forme*

$$(1.3)\qquad f^*(z) = f(z) - \lambda\Bigg\{\sum_{k=1}^{m} A_k\left(\frac{z_k f'(z_k)}{f(z_k)}\right)^2 \frac{2f^2(z)}{f(z_k)-f(z)} + \sum_{k=1}^{m} A_k\left[f(z) - zf'(z)\frac{z_k+z}{z_k-z} + af^2(z)\frac{1+pz_k}{1-pz_k}\right] + \sum_{k=1}^{m} \bar{A}_k\left[f(z) - zf'(z)\frac{1+z\bar{z}_k}{1-z\bar{z}_k} + af^2(z)\frac{1+p\bar{z}_k}{1-p\bar{z}_k}\right]\Bigg\} + 0(\lambda^2),$$

$$(1.4)\qquad f^{**}(z) = f(z) + \lambda\left[f(z) - zf'(z)\frac{z_0+z}{z_0-z} + af^2(z)\frac{z_0+p}{z_0-p}\right] + 0(\lambda^2)$$

$|z_0| = 1$, *appartenant aussi à $U(p)$.*

Si le complément du domaine $f(K)$ contient les points w_k $(k = 1, 2, \ldots m)$ il existe des fonctions de la forme

$$(1.5)\qquad f^{***}(z) = f(z) - \lambda\sum_{k=1}^{m} A_k \frac{f^2(z)}{w_k - f(z)} + 0(\lambda^2)$$

appartenant aussi à $U(p)$ pour tout $\lambda \epsilon < 0, \lambda_0)$.

Les expressions $0(\lambda^2)\lambda^{-2}$ sont uniformément bornées sur tout sous-ensemble compact du cercle K ne contenant pas le point $z = p$.

Dans ce travail nous proposons de déterminer exactement le domaine de variabilité de l'expression $\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}$ si z est fixé, $z \epsilon K \setminus \{p\}$, et f parcourt toute la classe $U(p)$. Nous y trouvons aussi la valeur exacte du rayon de convexité dans cette classe.

Soit $D(f)$ l'ensemble des valeurs de l'expression $\Phi = \dfrac{zf''(z)}{f'(z)}$ et $\partial D(f)$ la frontiére de cet ensemble dans la classe compacte.

Les points de l'ensemble $\partial D(f)$ peuvent etre partagés en deux classes, suivant que les points frontiéres sont réguliers ou irréguliers [2], [7], [8].

Le point $P_0 \in \partial D(f)$ sera dit point frontière régulier, s'il existe une sphère $K(a, r) \subset \mathscr{C}D(f)$ telle que $K(a, r) \cap D(f) = \{P_0\}$ tout autre point sera dit irrégulier.

On demontre [7] p. 36-41, [8], que l'énsemble des points réguliers est dense dans $\partial D(f)$ et [1] et qu'aux points de cet ensemble correspondent les fonctions pour lesquelles l'expression où z est fixe et f parcourt la classe considérée, atteint son maximum pour tout t, $0 \leqslant t < 2\pi$. Comme il suffit en général pour déterminer l'ensemble $D(f)$, de conaitre l'ensemble $\partial D(f)$ sera déterminé lorsqu'on aura trouvé de maximum mentionné. Ce maximum est atteint, puisque nous considérons le probléme dans une classe compacte.

2. Le domaine de variabilité de l'expression $\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}$ dans la classe $U(p)$.

En utilisant la méthode variationelle nous établirons le

Théorème 1. *Si z, $z \neq p$, est un point fixé du cercle K et les fonctions f parcourent toute la classe $U(p)$, l'enséble des valeurs de l'expression $\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}$ est le cercle*

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 2z\frac{1+p^2+pz|z|^2-p\bar{z}-2pz}{(1-|z|^2)(p-z)(pz-1)} + \frac{4z}{1-|z|^2}\,\frac{1-p\bar{z}}{p-z}\left(1-\frac{E(k)}{K(k)}\right)\right| \leqslant \frac{4|z|}{1-|z|^2}\left|\frac{1-pz}{p-z}\right|\left(1-\frac{E(k)}{K(k)}\right)$$

où

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1-k^2\sin^2 t)^{1/2}\,dt; \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} (1-k^2\sin^2 t)^{-1/2}\,dt;$$

$k = |p-z|\,|1-pz|^{-1}$.

Dans le cas limite $p \to 1$ ($k \to 1$), ce cercle se confond avec le cercle

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right| \leqslant \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

qui donne la domaine de variabilité de cette fonctionnelle dans la classe S.

Démonstration. Nous allons déterminer le maximum de la fonctionnelle

$$J = J(f) = \operatorname{Re}\left\{e^{i\varphi}\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\},$$

$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ dans la classe $U(p)$. Soit f l'une des fonctions extremales. Nous démontrerons d'abord que le domaine $f(K)$ n'a pas de points extérieurs. En effet, si w_1 était un point extérieur du domaine $f(K)$, nous aurions pour la fonction variationnelle (1.5) et pour $m = 1$

$$\frac{f^{***\prime\prime}(z)}{f^{***\prime}(z)} = \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\lambda A_1 \frac{w_1 f'(z)}{(w_1 - f(z))^4} + 0(\lambda^2)$$

D'ou

$$J^{***} = J^{***}(f) = J - 2\lambda \operatorname{Re}\left\{e^{i\varphi} A_1 \frac{w_1^2 f'(z)}{(w_1 - f(z))^3}\right\} + 0(\lambda^2)$$

Comme $w_1 \neq 0$ et, par conséquent, l'expression sous le signe de la partie réelle est $\neq 0$, on aurait, en choisissant convenablement $\operatorname{Arg} A_1$,

$$J^{***} > J$$

ce qui est en contradiction avec la propriété extrémale de la fonction f. Le domaine $f(K)$ n'admet donc pas de points extérieurs.

Pour trouver l'équation différentielle des fonctions qui correspondent aux points frontiéres de l'enseble $D(f)$, nous utiliserons la fonction variationnelle (1.3), en y posant $m = 1$ et $z_1 = \zeta$

On a

$$\frac{f^{*\prime\prime}(z)}{f^{*\prime}(z)} = \frac{f''(z)}{f'(z)} - \lambda\left\{2A_1\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)^2 \frac{2f'(z) f^2(\zeta)}{(f(\zeta) - f(z))^3} + \right.$$

$$+ A_1\left[B_1 \frac{z+\zeta}{\zeta - z} + C_1 \frac{2\zeta}{(\zeta - z)^2} - \frac{2\zeta^2 + 2z\zeta}{(\zeta - z)^3} + 2af'(z)\frac{\zeta + p}{\zeta - p}\right] +$$

$$\left. + \bar{A}_1\left[B_1 \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} + C_1 \frac{2\bar{\zeta}}{(1 - z\bar{\zeta})^2} - \frac{2\bar{\zeta}(1 + z\bar{\zeta})}{(1 - z\bar{\zeta})^3} + 2af'(z)\frac{1 + p\bar{\zeta}}{1 - p\bar{\zeta}}\right]\right\} + 0(\lambda^2)$$

où

$$B_1 = \left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)'', \quad C_1 = -\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)'.$$

D'où on déduit, en tenant compte de la relation $\operatorname{Re}\{a + b\} = \operatorname{Re}\{a + \bar{b}\}$

$$J^* = J - \lambda \operatorname{Re}\left\{A_1\left[e^{i\varphi}\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)^2 \frac{4f'(z) f^2(\zeta)}{(f(\zeta) - f(z))^3} + \right.\right.$$

$$+ \left(B_1 \frac{z+\zeta}{z-\zeta} + C_1 \frac{2\zeta}{(\zeta - z)^2} - \frac{2\zeta(\zeta + z)}{(\zeta - z)^3} + 2af'(z)\frac{\zeta + p}{\zeta - p}\right) e^{i\varphi} +$$

$$\left.\left. + \left(\bar{B}_1 \frac{1 + \bar{z}\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} + \bar{C}_1 \frac{2\zeta}{(1 - \bar{z}\zeta)^2} - \frac{2\zeta(1 + \bar{z}\zeta)}{(1 - \bar{z}\zeta)^3} + \overline{2af'(z)}\frac{1 + p\zeta}{1 - p\zeta}\right) e^{-i\varphi}\right]\right\} + 0(\lambda^2).$$

En vertu de la propriété extrémale de la fonction f et du fait que l'argument $\operatorname{Arg} A_1$ est arbitraire, l'expression qui figure entre crochets sous le signe de la partie réelle doit être identiquement nulle. Nous obtenons ainsi l'équation differentielle des fonctions frontiéres sous la forme suivante:

$$(2.1)\qquad e^{i\varphi}\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)^2\frac{4f'(z)f^2(\zeta)}{\big(f(\zeta)-f(z)\big)^3}=$$

$$=B\frac{z+\zeta}{\zeta-z}+C\frac{2\zeta}{(\zeta-z)^2}-\frac{2\zeta(\zeta+z)e^{i\varphi}}{(\zeta-z)^3}+D\frac{\zeta+p}{\zeta-p}+\bar{B}\frac{1+\bar{z}\zeta}{1-\bar{z}\zeta}+$$

$$+\bar{C}\frac{2\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)^2}-\frac{2\zeta(1+\bar{z}\zeta)e^{-i\varphi}}{(1-\bar{z}\zeta)^3}+\bar{D}\frac{1+p\zeta}{1-p\zeta}=-Q(\zeta)$$

où

$$B=B_1e^{i\varphi},\ C=C_1e^{i\varphi},\ D=af'(z)e^{i\varphi}.$$

On voit aisément que le second membre de l'équation (2.1) est réel sur la circonférence $|\zeta|=1$.

Nous prouverons maintenant que $Q(\zeta)\geqslant 0$ sur la circonférence $|\zeta|=1$. A cause de la formule (1.4) nous avons donc

$$e^{i\varphi}\frac{f^{**''}(z)}{f^{**'}(z)}=$$

$$=\frac{f''(z)}{f'(z)}+\lambda\left[B\frac{z_0+z}{z_0-z}+C\frac{2z_0}{(z_0-z)^2}-\frac{2z_0(z_0+z)}{(z_0-z)^3}+D\frac{z_0+p}{z_0-p}\right]+0(\lambda^2).$$

d'où, en vertu de la propriété extrémale de la fonction f, on obtient sur $|z_0|=1$ la condition

$$\mathrm{Re}\left\{B\frac{z_0+z}{z_0-z}+C\frac{2z_0}{(z_0-z)^2}-\frac{2z_0(z_0+z)}{(z_0-z)^3}+D\frac{z_0+p}{z_0-p}\right\}\leqslant 0.$$

Cela prouve en même temps que $-Q(\zeta)\leqslant 0$ sur la circonférence $|\zeta|=1$. La forme du premier membre de l'équation (2.1) montre qu'il admet au point $\zeta=0$ une racine double et qu'il est différent de zéro pour $|\zeta|<1$ te $\zeta\neq 0$, par consequent la fonction $Q(\zeta)$ est différente de zéro pour $|\zeta|<1$ te $\zeta\neq 0$ ainsi que pour $|\zeta|>1$ et $\zeta\neq\infty$ et elle a, de plus, une racine double au point $\zeta=0$. En outre, comme $Q(\zeta)\geqslant 0$ sur la circonférence $|\zeta|=1$, les racines de la fonction Q sur la circonférence-unité ont une multiplicité paire.

L'équation (2.1) prend finalement la forme

$$(2.2)\qquad e^{i\varphi}\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)^2\frac{f'(z)f^2(\zeta)}{\big(f(z)-f(\zeta)\big)^3}=\frac{A\zeta^2(\zeta-\tau)^2(\zeta-\eta)^2}{(\zeta-z)^3(1-\bar{z}\zeta)^3(\zeta-p)(1-p\zeta)}=Q(\zeta)$$

où

$$|\tau|=|\eta|=1;\ A=e^{i\varphi}(1-|z|^2)^3(z-p)(1-pz)(z-\tau)^{-2}(z-\eta)^{-2}$$

Des propriétés de la fonction $Q(\zeta)$ il résulte que $\sqrt{Q(\zeta)}$ est une fonction régulière sur $|\zeta| = 1$, on a donc [3], [7]

$$\mathrm{Re}\left\{\int \frac{\sqrt{Q(\zeta)}}{\zeta}\right\} = \mathrm{const}, \ |\zeta| = 1$$

Étant donnée l'équation (2.2) nous constatons que les fonctions frontières reprèsentent la circonférence $|\zeta| = 1$ sur un arc analytique de la cardioide dont l'équation est

$$\mathrm{Re}\left\{\sqrt{\frac{e^{i\varphi}f'(z)}{f(z)-f(\zeta)}}\right\} = c. \tag{2.3}$$

En nous appuyant sur la condition (2.3) nous allons déterminer l'ensemble $D(f)$ sans résoudre l'équation (2.2). Dans ce but, nous utiliserons le fait que la fonction qui figure sous le signe de la partie réelle dans la formule (2.3) peut aisément être complétée à une function réguliére.

Comme sur la circonférence $|\zeta| = 1$ on a

$$\frac{(z-\zeta)(\bar{z}\zeta-1)}{(p-\zeta)(p\zeta-1)} = \left|\frac{z-\zeta}{p-\zeta}\right|^2$$

on obtient, en tenant compte de (2.3),

$$\mathrm{Re}\left\{\sqrt{e^{i\varphi}\frac{f'(z)(z-\zeta)(\bar{z}\zeta-1)}{(p-\zeta)(p\zeta-1)\big(f(z)-f(\zeta)\big)}}\right\} = c\sqrt{\frac{(z-\zeta)(1-\bar{z}\zeta)}{(p-\zeta)(1-p\zeta)}} = R(\zeta) \tag{2.4}$$

La fonction

$$\sqrt{e^{i\varphi}\frac{f'(z)(z-\zeta)(\bar{z}\zeta-1)}{(p-\zeta)(p\zeta-1)\big(f(z)-f(\zeta)\big)}}$$

comme fonction de ζ, est régulière pour $|\zeta| < 1$ et continue pour $|\zeta| \leqslant 1$; en outre, sa partie réelle sur la circonférence $|\zeta| = 1$ est donnée par la formule (2.4). On peut donc représenter cette fonction dans le cercle $|\zeta| < 1$ par la formule de Schwarz

$$\sqrt{e^{i\varphi}\frac{f'(z)(z-\zeta)(1-z\zeta)}{(p-\zeta)(1-p\zeta)(f(z)-f(\zeta))}} = \frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi} R(e^{i\theta})\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\theta + ic_1$$

où $c_1 = \bar{c}_1$.

En égalant les coefficients du développement taylorien des deux membres au voisinage du point $\zeta = z$ nous obtenons

$$(2.5)\qquad \sqrt{e^{i\varphi}\frac{1-|z|^2}{(p-z)(1-pz)}} = \frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi} R(e^{i\theta})\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta + ic_1$$

$$(2.6)\qquad \sqrt{e^{i\varphi}\frac{1-|z|^2}{(p-z)(1-pz)}}\cdot\frac{f''(z)}{4f'(z)} + \frac{1+p^2+pz|z|^2-2pz-p\bar{z}}{2(1-pz)^2(p-z)^2}\times$$
$$\times\sqrt{e^{i\varphi}\frac{(p-z)(1-pz)}{1-|z|^2}} = \frac{c}{\pi}\int_0^{2\pi} R(e^{i\theta})\frac{e^{i\theta}d\theta}{(e^{i\theta}-z)^2}.$$

La forme de l'équation (2.6) montre que pour écrire l'équation de la frontière de l'ensemble $D(f)$ il suffit de connaître la constant c. Pour cela, nous égalons les parties réelles des deux membres de l'équation (2.6) et nous obtenons ainsi

$$(2.7)\qquad \frac{c}{\pi} = \left(\sqrt{e^{i\varphi}\frac{1-|z|^2}{(p-z)(1-pz)}} + \sqrt{e^{-i\varphi}\frac{1-|z|^2}{(p-\bar{z})(1-p\bar{z})}}\right)\Big/(1-|z|^2)\int_0^{2\pi} R(e^{i\theta})|e^{i\theta}-z|^{-2}d\theta$$

En portant (2.7) dans la formule (2.6) nous avons

$$(2.8)\qquad \frac{f''(z)}{f'(z)} + 2\frac{1+p^2+pz|z|^2-p\bar{z}-2pz}{(1-|z|^2)(pz-1)(p-z)} +$$
$$+\frac{4}{1-|z|^2}\int_0^{2\pi} R(e^{i\theta})e^{i\theta}(z-e^{i\theta})^{-2}d\theta\Big/\int_0^{2\pi} R(e^{i\theta})|z-e^{i\theta}|^{-2}d\theta$$
$$= \frac{4e^{-i\varphi}}{1-|z|^2}\sqrt{\frac{(p-z)(1-pz)}{(p-\bar{z})(1-p\bar{z})}}\int_0^{2\pi} R(e^{i\theta})\frac{e^{i\theta}d\theta}{(z-e^{i\theta})^2}\Big/\int_0^{2\pi} R(e^{i\theta})\frac{d\theta}{|z-e^{i\theta}|^2}$$

L'équation (2.8) est deja, en principe, l'équation de la frontière de l'ensemble $D(f)$ de valeurs de la fonctionnelle $J(f)$. Néanmoins, pour on tirer de nouvelles conclousions et achever la démonstration du théorème, nous ramènerons à la forme normale les intégrales elliptiques qui y figurent.

A cause de (2.4) on a

$$\int_0^{2\pi} R(e^{i\theta})\,|z-e^{i\theta}|^{-2}\,d\theta = -i\int_{|t|=1}\frac{dt}{\sqrt{(t-\bar z)(1-tz)(t-p)(1-pt)}}$$

et

$$\int_0^{2\pi} R(e^{i\theta})e^{i\theta}(z-e^{i\theta})^{-2}\,d\theta = -i\int_{|t|=1}\sqrt{\frac{(t-\bar z)(1-zt)}{(t-p)(1-pt)}}\,\frac{dt}{(1-zt)^2}$$

Si l'on munit le plan (t) de coupures le long des segments $[\bar z, p]$ et $[z^{-1}, p^{-1}]$, on pourra déterminer dans le domaine ainsi obtenu une branche régulière de la racine, et ensuite déformer le chemin d'intégration pour obtenir le segment $[p, \bar z]$.

Nous aurons alors

$$H = \int_0^{2\pi} R(e^{i\theta})e^{i\theta}(z-e^{i\theta})^{-2}\,d\theta \Big/ \int_0^{2\pi} R(e^{i\theta})\,|z-e^{i\theta}|^{-2}\,d\theta$$

$$= \int_p^{\bar z}\sqrt{\frac{(t-\bar z)(1-zt)}{(t-p)(1-pt)}}\,\frac{dt}{(1-zt)} \Big/ \int_p^{\bar z}\frac{dt}{\sqrt{(t-\bar z)(1-tz)(t-p)(1-pt)}}$$

En effectuant dans les deux intégrales les substitutions

$$t = (w+z)(1+wz)^{-1};\quad w = (1-pz)(z-p)^{-1}x^2$$

nous a vons finalement

$$H = \frac{1-p\bar z}{p-z}\left(1-\frac{E(k)}{K(k)}\right);\quad k = |z-p|\,|1-pz|^{-1}. \tag{2.9}$$

Le condition (2.8) prend alors la forme

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2z(1+p^2+pz|z|^2-p\bar z-2pz)}{(1-|z|^2)(p-z)(1-pz)} + \frac{4z}{1-|z|^2}H\right| \leqslant \tag{2.10}$$

$$\leqslant \frac{4|z|}{1-|z|^2}\,|H|$$

Dans le cas $p\to 1$ on a $\lim E(k)/K(k) = 0$ et (2.10) prend la forme

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right| \leqslant \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

ce qui donne, comme on le sait, le domaine de valeurs de cette fonctionnelle dans la classe S et le théoreme 1 se trouve ainsi démontre.

3. Le rayon de convexité dans la classe $U(p)$.

En nous appuant sur le théorème 1 nous établirons maintenant:

Théorème 2. *Toute fonction f de la classe $U(p)$ représente le cercle $|z| \leqslant r_c$, où*

$$r_c = 2^{-1}\left[q+(q^2+8)^{1/2} - \left(2q^2+2q(q^2+8)^{1/2}+4\right)^{1/2}\right] < p,$$

$$q = 2^{-1}(p+p^{-1})$$

sur un domaine convexe, le nombre r_c ne pouvant être remplacé par un nombre plus grand que si l'on impose á f des conditions dupplémentaires.

Démonstration. Pour déterminer la rayon de convexité il suffit, comme on le sait, de trouver une limitation inférieure exacte de l'expression $\mathrm{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1\right\}$ sur la circonférence $|z| = r$. En remplacant dans (2.10) le signe du module par celui de la partie réelle prise avec un signe négatif, nous avons

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\{zf''(z)}{f'(z)}+1\right\} \geqslant 1+2\,\mathrm{Re}\left\{z\,\frac{1+p^2+pz|z|^2-p\bar{z}-2pz}{(1-|z|^2)(1-pz)(p-z)}\right\} -$$

$$-\frac{4}{1-|z|^2}\left(1-\frac{E(k)}{K(k)}\right)\left[\mathrm{Re}\left\{\frac{z-p|z|^2}{p-z}\right\}+\left|\frac{z-p|z|^2}{p-z}\right|\right]$$

$$\geqslant 1+2\,\mathrm{Re}\left\{z\,\frac{1+p^2+pz|z|^2-p\bar{z}-2pz}{(1-|z|^2)(1-pz)(p-z)}\right\} - \frac{4}{1-|z|^2}\left[\left|\frac{z-p|z|^2}{p-z}\right|+\right.$$

$$\left.+\,\mathrm{Re}\left\{\frac{z-p|z|^2}{p-z}\right\}\right],$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour $z = -r$.

D'où

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1\right\} \geqslant \frac{pr^4-(1+p^2)r^3-6pr^2-(1+p^2)r+p}{(1-r^2)(1+pr)(p+r)} \tag{3.1}$$

Il s'ensuit que r_c est la plus petite racine positive de l'équation

$$pr^4-(1+p^2)r^3-6pr^2-(1+p^2)r+p = 0$$

égale à

$$2^{-1}\left[q+(q^2+8)^{1/2} - \left(2q^2+2q(q^2+8)^{1/2}+4\right)^{1/2}\right],\; q = 2^{-1}(p+p^{-1})$$

L'égalité dans (3.1) n'est possible que pour la fonction

$$f(z) = pz(p-z)^{-1}(1-pz)^{-1}$$

qui represente le cercle K sur le plan muni d'une coupure le long de l'axe réel négatif. Dans le cas où $p \to 1$ nous obtenons ainsi le rayon de convexite dans la classe S.

4. Le domaine de variabilité du coefficient a_2.

Divisons les deux membres de l'inégalite (2.10) par $|z|$ et posons-y ensuite $z = 0$. Alors

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}\bigg|_{z=0} = 2a_2, \quad k = p$$

et la condition (2.10) prend la forme

$$\left|p\cdot a_2 + 1 - p^2 - 2\frac{E(p)}{K(p)}\right| \leqslant 2\left(1 - \frac{E(p)}{K(p)}\right)$$

On obtient ainsi le domaine de variabilité du coefficient a_2 dans la classe $U(p)$, déterminé d'une maniére différente dans le travail [6].

Moyenant le théorème A on peut aussi démontrer que les domaines des valeurs des expressions $\log\frac{z}{f(z)}$, $\log\frac{zf'(z)}{f(z)}$ dans la classe $U(p)$ sont des cercles fermés dont les centres et les rayons s'expriment par des integrales elliptiques de tous les genres. Dans le cas limite où $p \to 1$, ces cercles deviennent les cercles de variabilité de ces expressions dans classe S. Les résultats correspondants seront préntés par l'auteur dans un article à paraître.

BIBLIOGRAPHY

[1] Александров А., *Экстремальные свойства класса $S(w_0)$*, Труды Томского Университета Т. 169

[2] Biernacki M., *Sur la représentation conforme des domaines linéairement accessibles*, Prace Mat.-Fiz. **44** (1936), p. 293-314.

[3] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Москва-Ленинград 1952.

[4] Komatu Y., *Note on the theory of conformal representation by meromorphic functions*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **21** (1945), p. 269-284.

[5] Lewandowski Z., and Zlotkiewicz E., *Variation formulae for meromorphic functions in the unit disc*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser sci. math., astr. et phys., **12** **12** (1964), p. 253-254.

[6] — „ — *Region of variability of the second coefficient for a class of meromorphic, univalent functions*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci math., astr. et phys., **13** (1965), p. 21-25.

[7] Schaeffer A. C., and Spencer D. C., *Coefficient regions for schlicht functions*, New York 1950.

[8] Шлионский И. Г., *Экстремальные проблемы для дифференцируемых функционалов в теорий одночистных функций* Вестник Лен. Унив. **13** (1958), p. 64-83.

Streszczenie

Przedmiotem noty jest wyznaczenie dokładnego zbioru wartości wyrażenia $zf''(z)/f'(z)$ gdy f przebiega całą rodzinę funkcji meromorficznych i jednolistnych w kole $|z| < 1$ i odpowiednio unormowanych, (Tw. 1). Jako wniosek otrzymuje się dokładną wartość promienia wypukłości w tej klasie (Tw. 2).

Резюме

Целью работы является определение точного множества значений выражения $\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}$ для класса мероморфных и однолитных функций в единичном круге, соответствующим образом нормированных (теорема 1).

Из проведенных расчетов найдено точное значение радиуса выпуклости (теорема 3).