ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XVII, 16 SECTIO A 1963

Z Zespołowej Katedry Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

MARIA MAKSYM

Sur les relations entre les plans osculateurs orientés d'une courbe.

O zależnościach między zorientowanymi płaszczyznami ściśle stycznymi krzywej.

О зависимостях между ориентированными соприкасающимися плоскостями кривой

Introduction.

Dans le travail [1] Van der Waag a énoncé huit définitions des plans osculateurs d'une courbe dans l'espace euclidien à trois dimensions.

Dans le travail [2] K. Radziszewski a introduit les notions des plans osculateurs orientés et établi les conditions d'équivalence de ces définitions.

Dans le travail [3] K. Radziszewski a étudié les relations entre les plans osculateurs des huit types correspondant aux types de la classification de Van der Waag; les plans y ont été définis au moyen de vecteurs paratingents dans l'hypothése que la courbe admet au point considéré un vecteur tangent unilatéral au sens fort.

Nous nous proposons d'étudier dans ce travail les relations entre les plans osculateurs orientés des huit types, définis au moyen d'un vecteur contingent, correspondant aux types de la classification de Van der Waag. Ce problème doit son origine au fait qu'il est possible de donner des exemples de courbes n'ayant pas de plans osculateurs orientés définis à l'aide d'un vecteur paratingent, tandis qu'elles admettent des plans osculateurs orientés définis à l'aide du vecteur contingent de la courbe. Notations et définitions:

$(\overline{u}, \overline{v})$ — plan construit sur les vecteurs linéairement indépendants $\overline{u}, \overline{v}$.

Π_i — plan portant le $N°$ i dans la classification de Van der Waag.

$\overline{N}_i$ — vecteur normal du plan Π_i.

$\langle A*B\rangle$ — arc de courbe orientée d'origine A et d'extrémité B.
$\varrho(P,Q)$ — longueur de l'arc de courbe compris entre les points P et Q d'une courbe.
$P \prec Q$ — le point P précède le point Q sur une courbe orientée.
$\sphericalangle\{\bar u, \bar v\}$ — angle compris entre les vecteurs $\bar u$ et $\bar v$, $0 < \sphericalangle\{\bar u, \bar v\} < \pi$.
On appelle vecteur contingent d'une courbe au point X le vecteur

$$\overline{C(X)} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} (\overline{P_nX}/|\overline{P_nX}|) & \text{pour } P_n \prec X \\ \lim\limits_{n\to\infty} (\overline{XP_n}/|\overline{XP_n}|) & \text{pour } X \prec P_n, \end{cases}$$

où P_n est une suite de points de la courbe tendant vers le point X, telle que les limites correspondentes existent. L'ensemble des vecteurs $\overline{C(X)}$ est dit contingent de la courbe au point X.
Nous dirons que la courbe $\langle A*B\rangle$ admet au point $M \in \langle A*B\rangle$ un plan osculateur orienté du type i, si le vecteur $\overline{N}_i$, défini plus loin, existe.

Nous définirons maintenant les vecteurs normaux des plans osculateurs des huit qui correspondent aux types introduits par Van der Waag et sont définis à l'aide du vecteur contingent de la courbe.

Soit:

$$\overline{N}_1 = \lim_{P\to M} \left(\overline{C(M)} \times \overline{MP}/|\overline{C(M)} \times \overline{MP}|\right),$$

$$\overline{N}_2 = \lim_{P',P''\to M} (\overline{P'M} \times \overline{MP''}/|\overline{P'M} \times \overline{MP''}|), \quad P' \prec M \prec P''$$

$$\overline{N}_3 = \lim_{P\to M} \varepsilon\left(\overline{C(M)} \times \overline{C(P)}/|\overline{C(M)} \times \overline{C(P)}|\right), \quad \varepsilon = \begin{cases} +1 & M \prec P \\ -1 & P \prec M \end{cases}$$

$$\overline{N}_4 = \lim_{P',P''\to M} \varepsilon(\overline{MP'} \times \overline{P'P''}/|\overline{MP'} \times \overline{P'P''}|), \quad \varepsilon = \begin{cases} -1 & P' \prec P'' \prec M \\ +1 & P' \prec M \prec P'' \\ -1 & M \prec P' \prec P'' \end{cases}$$

$$\overline{N}_5 = \lim_{P\to M} \left(\overline{MP} \times \overline{C(P)}/|\overline{MP} \times \overline{C(P)}|\right)$$

$$\overline{N}_6 = \lim_{P',P'',P'''\to M} (\overline{P'P''} \times \overline{P''P'''}/|\overline{P'P''} \times \overline{P''P'''}|) \quad P' \prec P'' \prec P'''$$

$$\overline{N}_7 = \lim_{P',P''\to M} \left(\overline{P'P''} \times \overline{C(P'')}/|\overline{P'P''} \times \overline{C(P'')}|\right) \quad P' \prec P''$$

$$\overline{N}_8 = \lim_{P',P''\to M} \left(\overline{C(P')} \times \overline{C(P'')}/|\overline{C(P')} \times \overline{C(P'')}|\right) \quad P' \prec P''$$

Dans ces définitions on admet que les limites correspondantes ne dépendent pas du choix des vecteurs contingents $\overline{C(X)}$ de la courbe $\langle A*B\rangle$ au point X; il est entendu que nous considérons uniquement des points P, P', P'', P''' et des vecteurs $\overline{C(X)}$ tels que les expressions précédentes ont un sens.

Relations entre les plans osculateurs orientés d'une courbe

Lemme 1. Si la courbe admet un plan osculateur orienté du type 1, elle admet aussi un plan osculateur orienté du type 2.

La demonstration est identique à celle du théorème 1 du travail [2]

Lemme 2. L'existence d'un plan osculateur orienté du type 2 n'entraîne pas celle d'un plan osculateur orienté du type 1.

Démonstration. Soit une courbe composée de deux arcs plans, ayant en leur point commun M des vecteurs tangents $\bar{t}^1$ et $\bar{t}^2$, non colinéaires, contenus respectivement dans les plans Σ^1 et Σ^2, $\Sigma^1 \neq \Sigma^2$. Alors $\bar{N}_2$ est le vecteur normal du plan $(\bar{t}^1, \bar{t}^2)$. D'autre part, le plan Π_1 n'existe pas, puisque suivant le choix du vecteur $\overline{C(M)}$ et du point, on obtient à la limite respectivement les plans Σ^1, Σ^2, $(\bar{t}^1, \bar{t}^2)$.

Lemme 3. L'existence d'un plan osculateur orienté du type 1 n'entraîne pas celle d'un plan osculateur orienté du type 3.

Demonstration. Considérons la courbe plane d'équation

$$y = \begin{cases} x^2 \left| \sin \dfrac{1}{x} \right| & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Le plan Π_1 existe: c'est le plan contenant la courbe. D'autre part, le plan Π_3 n'existe pas: en effet, on peut trouver deux points de la courbe P', P'', arbitrairement proches du point $M(0, 0)$ et tels que $\overline{C(M) \times C(P')} = -\overline{C(M) \times C(P'')}$.

Lemme 4. Si la courbe admet un plan osculateur orienté du type 3, elle admet aussi un plan osculateur orienté du type 1.

Démonstration. Démontrons d'abord que l'existence d'un plan osculateur orienté du type 3 entraîne celle d'un vecteur tangent unilatéral de la courbe au point M. Supposons qu'il existe des vecteurs:

$$\overline{C'(M)} = \lim_{P' \to M} (\overline{MP'} / |\overline{MP'}|) \quad \text{si} \quad M \prec P',$$

$$\overline{C''(M)} = \lim_{P'' \to M} (\overline{MP''} / |\overline{MP''}|) \quad \text{si} \quad M \prec P'',$$

tels que $\overline{C'(M)} \neq \overline{C''(M)}$.

Le plan $(\overline{C'(M)}, \overline{C''(M)})$ est alors le plan Π_3. Menons le plan $\Pi^* = (\bar{N}_3, \bar{d})$, $\bar{d}$ étant le vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\sphericalangle \{\overline{C'(M)}, \overline{C''(M)}\}$. Désignons par S_n les points communs de la courbe et du plan Π^*, l'existence de ces points étant assurée (lemme 78 du travail [6]). En vertu du lemme du travail [5] il existe entre les points S_n, S_{n+1} des points Q'_n, Q''_n tels que les vecteurs $\overline{C(Q')}$ et $\overline{C(Q'')}$ sont dirigés respectivement vers la partie du demi-espace, déterminé par Π^*, vers laquelle sont dirigés les vecteurs $\overline{C'(M)}$ et $\overline{C''(M)}$. Considérons les vecteurs:

$$\overline{N'(Q_n'')} = (\overline{C'(M)} \times \overline{C(Q_n'')} / |\overline{C'(M)} \times \overline{C(Q_n'')}|),$$
$$\overline{N''(Q_n')} = (\overline{C''(M)} \times \overline{C(Q_n')} / |\overline{C''(M)} \times \overline{C(Q_n')}|).$$

Ces vecteurs sont dirigés respectivement vers les deux demi-espaces déterminés par le plan Π_3, ce qui est incompatible avec l'orientabilité du plan Π_3, puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{N'(Q_n'')} = -\lim\limits_{n\to\infty} \overline{N''(Q_n')}$. L'hypothèse $\overline{C'(M)} \neq \overline{C''(M)}$ mène donc à une contradiction, donc

$$\overline{C'(M)} = \overline{C''(M)} = \lim_{P'\to M} (\overline{MP'} / |\overline{MP'}|) = \overline{t^+(M)}, \quad \text{où} \quad \overline{t^+(M)}$$

est le vecteur tangent à droite. On établit de même l'existence du vecteur tangent à gauche. Notre lemme est alors une conséquence du théorème généralisé de l'Hospital pour les fonctions non différentiables [5]: si $x = h(t)$, $y = g(t)$, $z = f(t)$ et si l'axe x a l'orientation du vecteur $\overline{t^+(M)}$, on a

$$\overline{N}_1 = \lim_{t_0\to t} \frac{-zj+yk}{\sqrt{z^2+y^2}}, \qquad \overline{N}_3 = \lim_{t_0\to t} \frac{-zj+yk}{\sqrt{z^2+y^2}}.$$

L'existence des plans Π_1 et Π_3 dépend donc de l'existence des limites respectives $\lim f(t)/g(t)$ et $\lim f'(t)/g'(t)$ pour $t_0 \to t$, où $f'(t)$ et $g'(t)$ sont les nombres dérivés correspondant aux mêmes accroissement de la variable t.

Lemme 5. L'existence d'un plan osculateur orienté du type 2 n'entraîne pas celle des plans osculateurs orientés des types 3, 4, 5.

Pour le démontrer, il suffit de considérer la courbe construite dans a démonstration du lemme

Lemme 6. S'il existe un plan osculateur orienté du type 4, les plans osculateurs orientés des types 1 et 5 existent aussi.

La démonstration est immédiate.

Lemme 7. L'existence d'un plan osculateur orienté du type 4 entraîne celle d'un plan osculateur orienté du type 3.

Démonstration. En vertu du lemme précédent, l'existence d'un plan osculateur orienté du type 4 entraîne celle des plans osculateurs orientés des deux types 1 et 5, d'où résulte l'existence d'un plan osculateur orienté du type 3.

Lemme 8. L'existence d'un plan osculateur orienté du type 5 n'entraîne pas celle d'un plan osculateur orienté du type 4.

Démonstration. Considérons une spirale d'Archimède. Le plan Π_5 existe toujours et il est orienté. D'autre part, il n'est pas possible de trouver des points P_i', P_i'', $i=1,2$ $P_1'=P_2'$ tels que

$$\lim_{P_1'P_1''\to M} (\overline{MP_1'}\times\overline{P_1'P_1''}/|\overline{MP_1'}\times\overline{P_1'P_1''}|) = -\lim_{P_2'P_2''\to M} (\overline{MP_2'}\times\overline{P_2'P_2''}/|\overline{MP_2'}\times\overline{P_2'P_2''}|)$$

ce qui est absurde, puisque le plan Π_4 est orienté.

Lemme 9. L'existence d'un plan osculateur orienté du type 3 n'entraîne pas celle d'un plan osculateur orienté du type 5.

Ce fait a été démontré dans le travail [7].

Lemme 10. L'existence d'un plan osculateur orienté du type 4 n'entraîne pas celle d'un plan osculateur orienté du type 6.

Démonstration. Considérons la courbe formée par la ligne brisée curviligne d'équation polaire

$$r = 2^{1-i}, \quad \pi 2^{-(1+i)} \leqslant \varphi \leqslant \pi 2^{-i}, \quad i = 1, \ldots$$
$$\varphi = 2^{-(1+i)}, \quad 2^{-i} < r < 2^{1-i},$$
$$r = 0 \quad \varphi = 0.$$

Dans ce cas, le plan Π_4 existe et est orienté, tandis que le plan Π_6 n'existe pas.

Lemme 11. Si le plan osculateur orienté du type 8 existe, le plan osculateur orienté du type 7 existe aussi.

Démonstration. Prenons deux quelconques P', P'' sur la courbe et menons le plan $(\overline{P'P''}, \overline{C(P)})$ de vecteur normal

$$\overline{N} = (\overline{P'P''}\times\overline{C(P'')}/|\overline{P'P''}\times\overline{C(P'')}|).$$

Sur l'arc P', P'' il existe deux points Q', Q'' tels que les vecteurs $\overline{C(P')}$, $\overline{C(P'')}$ sont dirigés respectivement vers les deux demi-espaces déterminés le plan $(\overline{P'P''}, \overline{C(P'')})$ (en vertu du travail [5]).

Considérons la représentation sphérique des vecteurs $\overline{C(Q')}$, $\overline{C(Q'')}$, $\overline{C(P'')}$ et $\overline{P'P''}/|\overline{P'P''}|$. Les extrémités des vecteurs $\overline{C(Q')}$, $\overline{C(Q'')}$, $\overline{C(P'')}$ formeront un triangle sphérique, dans lequel l'angle au sommet $\overline{C(P'')}$ tend vers zéro, puisque

$$\lim_{P''Q'\to M} (\overline{C(Q')}\times\overline{C(P'')}/|\overline{C(Q')}\times\overline{C(P'')}|)$$
$$= \lim_{P'Q''\to M} (\overline{C(Q'')}\times\overline{C(P')}/|\overline{C(Q'')}\times\overline{C(P')}|) = \overline{N}_8$$

Les sommets du triangle sphérique qui sont les extrémités des vecteurs $\overline{C(Q')}$, $\overline{C(Q'')}$ sont situés de part et d'autre du grand cercle $\overline{P'P''}$, $\overline{C(P'')}$.

Donc $\lim\limits_{P',P''\to M}(\overline{P'P''},\overline{C(P'')}) = \lim\limits_{Q'P''\to M}(\overline{C(Q')},\overline{C(P'')})$. Pour démontrer que le plan $\underline{(P'P'', C(P''))}$ est orienté, menons un plan Π perpendiculaire au plan $(\overline{C(P')},\overline{C(P'')})$ et passant par le vecteur $\overline{P'P''}$. Les vecteurs $\overline{C(P')}$, $\overline{C(P'')}$ devront être dirigés respectivement vers les deux demi-espaces déterminés par le plan $\hat{\Pi}$, car il existe sur l'arc $\overline{P'P''}$ deux points S' et S'' tels que $S'S''$ et que les vecteurs $\overline{C(S')}$ et $\overline{C(S'')}$ sont dirigés respectivement vers les deux demi-espaces déterminés par le plan $\hat{\Pi}$. Donc, si les deux vecteurs $\overline{C(P')}$, $\overline{C(P'')}$ étaient dirigés par exemple vers le même demi-espace que le vecteur $\overline{C(S')}$, les vecteurs $\overline{C(P')}\times\overline{C(S'')}/|\overline{C(P')}\times\overline{C(S'')}|$ et $\overline{C(S'')}\times\overline{C(P'')}/|\overline{C(S'')}\times\overline{C(P'')}|$ auraient des limites différentes. Désignons par Π^+ le demi-espace déterminé par le plan $\hat{\Pi}$, vers lequel est dirigé le vecteur $\overline{C(P'')}$, et soit Π^- le demi-espace opposé. Le vecteur $\overline{C(P'')}$ est donc toujours situé d'un même côté du plan qui contient le vecteur $\overline{P'P''}$, d'où il résulte que la limite $\lim\limits_{P',P''\to M}(\overline{P'P''}\times\overline{C(P'')}/|\overline{P'P''}\times\overline{C(P'')}|) = \overline{N}_8$ existe.

Lemme 12. Si le plan osculateur orienté du type 7 existe, le plan osculateur orienté du type 8 existe aussi.

Démonstration. Comme le plan osculateur orienté du type 7 existe, on a, pour $P'\prec P''$,

$$\lim_{P'P''\to M}(\overline{P'P''}\times\overline{C(P'')}/|\overline{P'P''}\times\overline{C(P'')}|)$$
$$= \lim_{P',P''\to M}(\overline{C(P')}\times\overline{P'P''}/|\overline{C(P')}\times\overline{P'P''}|).$$

Considérons la représentation sphérique des vecteurs $\overline{P'P''}$, $\overline{C(P')}$, $\overline{C(P'')}$. Les extrémités de ces vecteurs formeront un triangle sphérique, dans lequel l'angle à l'extrémité du vecteur $\overline{P'P''}$ tend vers.

Donc

$$\lim_{P'P''\to M}(\overline{C(P')}\times\overline{C(P'')}/|\overline{C(P')}\times\overline{C(P'')}|) = \overline{N}_7$$

Lemme 13. Si le plan osculateur orienté du type 7 existe, le plan osculateur orienté du type 6 existe aussi.

Démonstration. Comme le plan osculateur orienté du type 7 existe, on a pour $P'\prec P''\prec P'''$

$$\lim_{P'P'\to M}(\overline{P'P''}\times\overline{C(P'')}/|\overline{P'P''}\times\overline{C(P'')}|)$$
$$= \lim_{P'',P'''\to M}(\overline{C(P'')}\times\overline{P''P'''}/|\overline{C(P'')}\times\overline{P''P'''}|).$$

Considérons la représentation sphérique des vecteurs $\overline{P'P''}$, $\overline{C(P')}$, $\overline{P''P'''}/|\overline{P''P'''}|$. Les extrémités de ces vecteurs formeront un triangle pshérique, dans lequel l'angle à l'extrémité du vecteur $\overline{P'P''}$ tend vers π, donc

$$\lim_{P',P'',P'''\to M} (\overline{P'P''} \times \overline{P''P'''}/|\overline{P'P''} \times \overline{P''P'''}|) = \overline{N}_7$$

Lemme 14. Si le plan osculateur orienté du type 6 existe, les plans osculateurs orientés des autres existent aussi.

Démonstration. Dans le travail [3] il a été démontré que l'existence d'un plan osculateur orienté du type 6 entraîne celle des plans osculateurs orientés des autres types, définis à l'aide du vecteur paratingent, donc, a fortiori, l'existence des plans osculateurs orientés définis à l'aide du vecteur contingent.

Corollaire: S'il existe un plan osculateur orienté de l'un des types 6, 7 ou 8, les plans osculateurs orientés des autres types existent aussi.

Récapitulant ces résultats nous obtenons le théorème suivant:

Théorème. Les plans, correspondant aux huit types de plans osculateurs introduits par Van der Waag, se répartissent en deux groupes: au premier appartiennent les plans $\Pi_1, \ldots, \Pi_5$, au second les plans Π_6, Π_7, Π_8. Pour les plans du premier groupe on a les implications suivantes:

Π_1 entraîne Π_2
Π_2 n'entraîne pas Π_1
Π_1 n'entraîne pas Π_3
Π_3 entraîne Π_1
Π_2 n'entraîne pas Π_3
Π_3 entraîne Π_2
Π_4 entraîne Π_i, pour $i = 1, 2, 3, 5$,
Π_j n'entraîne pas Π_4, pour $j = 1, 2, 3, 5$,
Π_5 n'entraîne pas Π_k, pour $k = 1, 2, 3, 4$,
Π_n n'entraîne pas Π_5, pour $n = 1, 2, 3$;

pour ceux du second:

$\Pi_6 \equiv \Pi_7 \equiv \Pi_8$ entraîne Π_v, $v = 1, 2, 3, 4, 5$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. J. van der Waag: Sur les plans osculateurs, Indagationes Mathematicae, 14 (1952) p. 41-62.

[2] K. Radziszewski: Sur les plans osculateurs orientés, Ann. Pol. Math. XII, (1962) p. 159-169.

[3] K. Radziszewski: Sur les relations entre les plans osculateurs orientés, Ann. UMCS, XVII (1963).

[4] C. Pauc: La méthode directe en géométrie différentielle, Paris, (1941).
[5] K. Radziszewski: Sur un théorème de l'Hospital, Bulletin De L'Académie Polonaise des Sciences, Vol XI, 12, (1963).
[6] Bouligand: Les méthodes infinitesimales directes.
[7] A. Żmurek: Deux remarques sur les plans osculateurs orientés, Ann. UMCS, XVI (1963).

Streszczenie

W pracy tej podane są zależności między zorientowanymi płaszczyznami ściśle stycznymi 1—8 według klasyfikacji Van der Waaga, zdefiniowanymi przy pomocy wektora contyngesowego krzywej.

Резюме

В работе излагается взаимными зависимостями между орентированными соприкасающимися плоскостями типов 1-8 согласно классификаций Ван-дер-Ваага, определёнными при помощи контингенсного вектора.