ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XVII, 10 SECTIO A 1963

Z Zespołowej Katedry Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem.-UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

BARBARA PIŁAT

Sur une classe de fonctions normées univalentes dans le circle unité

O pewnej klasie funkcji jednolistnych z unormowaniem Montela

О некоторой классе функций однолистных в единичном круге с нормировкой Монтеля

A. Schild [7] a étudié la classe des polynômes univalent dans le cercle $|z| < 1$, de la forme:

$$f_p(z) = z - \sum_{n=2}^{N} a_n z^n,$$

dont les coefficients a_n sont réels et non négatifs, et il a démontré [10] intéressants théorèmes relatifs à cette classe.

La classe des polynômes étudiés par Schild est une sousclasse de la classe bien connue S des fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$, qui y satisfont aux conditions $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$. P. Montel [5] a proposé l'étude des classes de fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$ normées autrement que celles de la classe S, par exemple par les conditions $f(0) = 0$, $f(z_0) = z_0$, $0 < |z_0| < 1$. Des classes de ce type ont été étudiées, entre autres, par M. Biernacki [1], W. Rogosinski [6], J. Krzyż [2], Z. Lewandowski [3], [4].

Dans ce travail je considère la classe des polynômes de la forme:

$$f(z) = a_1 z - \sum_{n=2}^{N} a_n z^n, \; a_n \geqslant 0, \; n = 1, 2, \ldots, N, \; N \geqslant 2, \tag{1}$$

où:

$$f(z_0) = z_0, \; 0 < z_0 \leqslant 1, \tag{2}$$

et j'y démontre quelques théorèmes relatifs à cette classe. Les résultats que je vais établir généralisent ceux de Schild en ce sens que ses théorèmes à l'exception du théorème 7 s'en déduisent en faisant tendre z_0 vers zéro.

Théorème 1. La condition nécessaire et suffisante pour que le cercle $|z| < 1$ soit le cercle d'univalence d'un polynôme de la forme (1) s'exprime par l'égalité:

$$a_1 - \sum_{n=2}^{N} n a_n = 0. \tag{3}$$

La démonstration de ce théorème est le même que celle de Schild. Dans le cas des polynômes satisfaisant à la condition (2) l'égalité (3) prend la forme:

$$\sum_{n=2}^{N} a_n (n - z_0^{n-1}) = 1. \tag{4}$$

Désignons par S_0 la classe des polynomes de la forme (1) satisfaisant aux conditions (2) et (4).

Z. Lewandowski a remarqué [3] que toute fonction $f(z)$ univalente et holomorphe dans le cercle $|z| < 1$, normée par $f(0) = 0$, $f(z_0) = z_0$, peut être mise sous la forme:

$$f(z) = z_0 g(z)/g(z_0), \tag{5}$$

où la fonction $g(z) \in S$. Il s'ensuit que toute fonction $f(z) \in S_0$ peut s'écrire sous la forme (5), $g(z)$ étant un polynôme de la classe étudiée par Schild. De ce fait résultent immédiatement les trois théorèmes suivants:

Théorème 2. Aucune fonction de la classe S_0 ne représente le cercle $|z| < 1$ sur un domaine convexe. Le rayon de convexité pour toute la classe est $1/2$.

Théorème 3. Toute fonction $f(z) \in S_0$ représente le cercle $|z| < 1$ sur un domaine étoilé par rapport au point $w = 0$.

Théorème 4. Pour les fonctions $f(z) \in S_0$ on a l'inégalité exacte:

$$1 < a_1 \leqslant 2/(2 - z_0). \tag{6}$$

Nous établirons maintenant:

Théorème 5. L'image du cercle $|z| < 1$ fournie par une fonction quelconque $f(z) \in S_0$ le cercle $|w| \leqslant 1/(2 - z_0)$.

Démonstration. Les fonctions de la classe S_0 étant holomorphes dans le cercle $|z| < 1$, il suffit de trouver le minimum du module des fonctions pour toute la classe S_0 sur la circonférence $|z| = 1$:

$$|f(e^{i\varphi})| \geqslant 1 - \sum_{n=2}^{N} a_n (1 - z_0^{n-1}) \geqslant 1 - \frac{1 - z_0}{2 - z_0} \sum_{n=2}^{N} a_n (n - z_0^{n-1}),$$

d'où en vertu de la formule (4) on obtient aisément: $|f(e^{i\varphi}| > 1/(2-z_0)$. La fonction extrémale est $f^*(z) = (2z-z^2)/(2-z_0)$; $f^*(1) = 1/(2-z_0)$.

Théorème 6. L'aire A de l'image du cercle $|z| < 1$ fournie par une fonction quelconque $f(z) \in S_0$ satisfait à l'inégalité exacte:

(7) $$\pi < A \leqslant 6\pi/(2-z_0)^2.$$

Démonstration. La condition (3) entraîne $a_n \leqslant a_1/n$ pour $n = 2, .., N$.

$$A = \pi\Big(a_1^2 + \sum_{n=2}^{N} n a_n^2\Big) \leqslant \pi\Big(a_1^2 + a_1\sum_{n=2}^{N} a_n\Big).$$

Comme

$$\sum_{n=2}^{N} a_n \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} n a_n = a_1/2,$$

on a

$$A \leqslant \pi\Big(a_1^2 + a_1\sum_{n=2}^{N} a_n\Big) \leqslant 3\pi a_1^2/2 \leqslant 6\pi/(2-z_0)^2.$$

La limitation inférieure est immédiate. La fonction extrémale est la fonction $f^*(z)$.

Théorème 7. Soit $f(z) \in S_0$ et désignons par d_0 la distance du point $w = 0$ à la courbe $f(r_0 e^{i\varphi})$, $0 < \varphi \leqslant 2\pi$, r_0 étant le rayon de convexité pour la fonction $f(z)$. Alors on a les inégalités exactes:

(8) $$d_0 \geqslant 3/4(2-z_0) \quad \text{pour} \quad 0 < z_0 \leqslant 1/2$$

et

(8′) $$d_0 \geqslant 1/2 \quad \text{pour} \quad 1/2 \leqslant z_0.$$

Démonstration. Si $0 < z_0 \leqslant r_0$, de même que dans la démonstration du théorème 5 on obtient:

$$f(r_0 e^{i\varphi}) \geqslant r_0(2-r_0)/(2-z_0).$$

Du théorème 2 résulte que $1/2 \leqslant r_0$. Donc, si $0 < z_0 \leqslant 1/2$, on a $z_0 \leqslant r_0$. Pour la fonction $f^*(z)$ on obtient:

$$d_0 = r_0(2-r_0)/(2-z_0) = 3/4(2-z_0).$$

D'autre part, si $1/2 \leqslant z_0 \leqslant r_0$, on a

$$d_0 \geqslant 3/4(2-z_0) \geqslant (3/4):(3/2) = 1/2.$$

Dans le cas $r_0 \leqslant z_0 < 1$, il vient:

$$|f(r_0 e^{i\varphi})| \geqslant r_0\Big[1 + \sum_{n=2}^{N} a_n(z_0^{n-1} - r_0^{n-1})\Big] \geqslant r_0 \geqslant 1/2.$$

Théorème 8. Pour les fonctions $f(z)\in S_0$ on a les inégalités exactes suivantes:

$$|f(z)| \leqslant \frac{2}{2-z_0}(|z|+|z|^2/2) \quad \text{dans} \quad |z|<1, \tag{9}$$

$$\frac{2}{2-z_0}(|z|-|z|^2/2) \leqslant |f(z)| \quad \text{pour} \quad z_0 \leqslant |z| < 1, \tag{10}$$

$$|z| \leqslant |f(z)| \quad \text{pour} \quad |z| \leqslant z_0. \tag{11}$$

Démonstration. En tenant compte de (5) et de la limitation établie par Schild [7] on obtient immédiatement l'inégalité (9). Si $z_0 \leqslant |z| < 1$, on a, de même que dans la démonstration do théorème 5;

$$|f(z)| = |z|\left|1-\sum_{n=2}^{N} a_n(z^{n-1}-z_0^{n-1})\right| \geqslant \frac{2}{2-z_0}(|z|-|z|^2/2).$$

Pour les inégalités (9) et (10) la fonction extrémale est $f^*(z)$. L'inégalité (11) résulte du fait que pour $|z| \leqslant z_0$ on a

$$|f(z)| = |z|\left|1+\sum_{n=2}^{N} a_n(z_0^{n-1}-z^{n-1})\right| \geqslant |z|.$$

Cette inégalité est exacte, car il existe une suite de fonctions:

$$f_n(z) = z(n-z^{n-1})/(n-z_0^{n-1}),\ f_n(z)\in S_0, \tag{12}$$

telle que $|f_n(z)| > |z|$ pour $0<|z|\leqslant z_0$ et cette suite converge uniformément dans le cercle $|z| \leqslant z_0$ vers la fonction identité.

Théorème 9. Pour la dérivée $f'(z)$ d'une fonction $f(z)\in S_0$ on a les inégalités suivantes:

$$|f'(z)| \leqslant 2(1+|z|)/(2-z_0) \quad \text{dans le cercle} \quad |z|<1, \tag{13}$$

$$1 < |f'(z)| \quad \text{dans le cercle} \quad |z| \leqslant z_0/2, \tag{14}$$

$$1-|z| < |f'(z)| \quad \text{pour} \quad z_0/2 < |z| < 1. \tag{15}$$

Démonstration. L'inégalité (13) s'établit tout comme l'inégalité (5). La fonction extrémale est la fonction $f^*(z)$. L'inégalité (14) résulte du fait que:

$$|f'(z)| = \left|1+\sum_{n=2}^{N} a_n(z_0^{n-1}-z^{n-1})\right| \geqslant 1+\sum_{n=2}^{N} a_n(z_0^{n-1}-n|z|^{n-1}) \geqslant 1$$

pour $|z| \leqslant z_0/2$.

Cette inégalité est exacte, puisque la suite des dérivées $f_n'(z)$ des fonctions $f_n(z) \in S_0$, définies ci-dessus (12), converge uniformément dans le cercle $|z| \leqslant z_0/2$ vers 1 et $|f_n'(z)| \geqslant 1$.

L'inégalité (15) résulte du fait que:

$$|f'(z)| \geqslant a_1 - \sum_{n=2}^{N} na_n |z|^{n-1} \geqslant 1 - |z| \sum_{n=2}^{N} na_n |z|^{n-2} \geqslant 1 - |z|.$$

Cette inégalité n'est pas exacte.

BIBLIOGRAPHIE:

[1] Biernacki M., Sur les représentation conforme des domaines étoiles, Mathematica Cluj, 16 (1940), p. 44-49.

[2] Krzyż J., On univalent functions with two prescribed values, Annales UMCS, vol. XV (1961), Sectio A.

[3] Lewandowski Z., Sur certaines classes de fonction univalentes dans le cercle-unité, Annales UMCS, vol. XIII, 6 (1959), Sectio A.

[4] Lewandowski Z., Quelques remarques sur les théorèmes de Schild relatifs à une classe de fonctions univalentes, Annales UMCS, vol. IX, 9, (1955), Sectio A.

[5] Montel P., Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes, Paris, Gauthier-Villars, 1933.

[6] Rogosiński W., Über Wertevorrat einer analytischen Funktion, von der zwei Werte vorgegeben sind, Compositio Math., 1936, p. 199-226.

[7] Schild A., On a class of functions schlicht in the unit circle, Proc. of the Amer. Math. Soc., 5 (1953), nr 1, p. 115-121.

Streszczenie

W pracy tej badam klasę S_0 funkcji postaci

$$f(z) = a_1 z - \sum_{n=2}^{N} a_n z^n,\ a_n \geqslant 0,\ n = 2, 3, \ldots, N,\ N \geqslant 2,$$

jednolistnych w kole $|z| < 1$ i niejednolistnych w kole większym, które spełniają warunek $f(z_0) = z_0$, $0 < z_0 \leqslant 1$. Dowodzę dla funkcji tej klasy 9 twierdzeń dotyczących między innymi oszacowań modułu funkcji, modułu pochodnej funkcji, promienia wypukłości. Z twierdzeń tych wynikają w granicy dla $z_0 \to 0$ twierdzenia otrzymane wcześniej przez A. Schilda [7] dla funkcji postaci

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{N} a_n z^n,\ N \geqslant 2,\ a_n \geqslant 0,\ n = 2, 3, \ldots, N.$$

Резюме

Я исследую клас функций вида:

$$f(z) = a_1 z - \sum_{n=2}^{N} a_n z^n,\ a_n \geqslant 0;\ n = 2, 3, \ldots, N;\ N \geqslant 2,$$

однолистных в круге $|z| < 1$ и неоднолистных в большем круге, которые исполняют условие $f(z_0) = z_0$, $0 < z_0 \leqslant 1$. Доказано для функций этого класса 9 теорем, касающихся между прочим оценок модуля функций, модуля производной функций и радиуса выпуклости. Из этих теорем вытекают в пределе при $z_0 \to 0$ теоремы (кроме теоремы 7), полученные раньше А. Шильдом для функций вида:

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{N} a_n z^n,\ N \geqslant 2,\ a_n \geqslant 0,\ n = 2, 3, \ldots, N.$$