ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA

VOL. XVII, 3 SECTIO A 1963

Z Zespołowej Katedry Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

BARBARA KRZYŻOWA

Sur une généralisation d'un théorème de H. Kneser

O pewnym uogólnieniu twierdzenia H. Knesera

Об обобщении одной теоремы Г. Кнезера

Dans la note [7] je me suis occupée d'une généralisation étendue d'un système d'équations différentielles ordinaires à argument retardé dite équation au paratingent à argument retardé. Dans la note [8] j'ai étudié certaines propriétés des familles de solutions d'une telle équation, assujetties à certaines conditions initiales.

Je vais démontrer ici que le théorème bien connu de H. Kneser [4], [6] concernant les intersections d'une zone d'émission d'un point par rapport à un système d'équations différentielles ordinaires subsiste dans la théorie des équations au paratingent à argument retardé. Plus précisément, je vais montrer que certaines familles de solutions envisagées comme éléments d'un espace topologique jouissent d'une propriété de connexité dont le théorème de H. Kneser est une conséquence immédiate.

J'adopterai ici toutes les définitions et notations introduites dans [7] et [8]. En particulier, l'équation au paratingent à argument retardé s'écrira:

(1) $$\mathrm{Pt}\varphi(t) \subset F\{\varphi\}_t, \; t \in \langle \tau, \beta \rangle,$$

la condition initiale aura la forme

(2) $$\varphi(t) = \xi(t), \; t \in \langle a, \tau \rangle,$$

$\{\xi\}_\tau \in [\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ étant une fonction initiale donnée d'avance, les émissions et les zones d'émission, par rapport à l'équation (1), d'une fonction initiale $\{\xi\}_\tau$ ou bien d'un ensemble initial $Z \subset [\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ seront désignées par $\mathscr{E}(F,\xi,\tau)$, $\mathscr{E}(F,Z)$, $e(F,\xi,\tau)$, $e(F,Z)$ respectivement.

Bien que le théorème généralisé de H. Kneser qui va être établi dans cette note ait une forme bien analogue à celle du théorème classique, [4], la méthode de démonstration bien connue ne subsiste plus dans le cas des équations à argument retardé; c'est pourquoi j'aurai à appliquer une autre méthode, qui sera basée sur la notion d'homotopie. Mais celle-ci exigera que l'équation envisagée remplisse certaines conditions additionnelles de régularité, n'intervenant pas dans l'énoncé du théorème en question. Ainsi je devrai me servir d'une suite d'équations plus régulières approchant l'équation donnée. Une telle approximation convenable sera possible grâce au lemme 1, qui jouera ici un rôle fondamental et qui ressemblera au théorème bien connu de Baire sur l'approximation d'une fonction réelle, semi-continue supérieurement par une suite décroissante de fonctions continues, ainsi qu'au lemme sur l'approximation analogue des champs de pinceaux appliquée dans la théorie de l'équation au paratingent sans retard [11], [1].

1. Sur l'approximation d'un fonction de la classe $\mathfrak{P}$ dans une ensemble compact par des fonctions continues

Lemme 1. Soient A un sous-ensemble compact de l'espace métrique D, $\mathfrak{p}(\zeta)$ une fonction de la classe $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{p}^*(\zeta)$ une fonction de la classe $\mathfrak{P}^*$. Si $\mathfrak{p}(\zeta) \subset \mathfrak{p}^*(\zeta)$ dans A, il existe une suite de fonctions continues $\mathfrak{p}_i(\zeta) \in \mathfrak{P}$, $i = 1, 2, \ldots$ telle que

1° $\mathfrak{p}_{i+1}(\zeta) \subset \mathfrak{p}_i(\zeta) \subset \mathfrak{p}^*(\zeta)$, $\quad \zeta \in D$, $i = 1, 2, \ldots$

2° $\mathfrak{p}(\zeta) \subset \mathfrak{p}_i(\zeta)$, $\quad \zeta \in A$, $i = 1, 2, \ldots$

3° $\mathfrak{p}(\zeta) = \bigcap\limits_{i=1,2,\ldots} \mathfrak{p}_i(\zeta)$, $\quad \zeta \in A$,

4° le produit $\mathfrak{q}(\zeta) = \bigcap\limits_{i=1,2,\ldots} \mathfrak{p}_i(\zeta)$ est une fonction appartenant à $\mathfrak{P}$ et continue dans D/A (c'est-à-dire dans l'ensemble de points appartenant à D et n'appartenant pas à A).

En vertu du critère de Hausdorff ([10], p. 49) concernant la compacité des ensembles dans un espace métrique quelconque, il existe dans l'espace D une suite de sphères dont les centres ζ_i, $i = 1, 2, \ldots$ appartiennent à A et les rayons r_i, $i = 1, 2, \ldots$ convergent vers zéro, telle que tout point de l'ensemble A appartient à une infinité de ces sphères. Pour $i = 1, 2, \ldots$ désignons par c_i les fermetures de ces sphères et par C_i les fermetures des sphères concentriques de rayon double.

Soit $q^i = \bigcup\limits_{\zeta \in C_i} \mathfrak{p}(\zeta)$, $i = 1, 2, \ldots$ On constate que $\mathfrak{p}(\zeta) \subset q^i \in \mathscr{P}$ pour

$\zeta \epsilon C_i$ et pour $i = 1, 2, \ldots$. Considérons une suite de fonctions définie par récurrence dans D comme il suit:

$$\mathfrak{p}_1(\zeta) = \mathfrak{p}^*(\zeta),$$

$$\mathfrak{p}_{i+1}(\zeta) = \big(1-\lambda_i(\zeta)\big)\mathfrak{p}_i(\zeta)+\lambda_i(\zeta)\big(\mathfrak{p}_i(\zeta) \frown q^i\big)$$

où $\lambda_i(\zeta)$ désigne une fonction continue, égale à 1 dans c_i et à $(2r_i - |\zeta, \zeta_i|)/r_i$ dans C_i/c_i, nulle en dehors de C_i. On vérifie facilement (en tenant compte, entre autres, des propriétés d'un agrégat, [7]) que les fonctions $\mathfrak{p}_i(\zeta)$ appartiennent à $\mathfrak{P}$ et sont continues dans l'espace D tout entier. En outre on a pour $i = 1, 2, \ldots$:

$$\mathfrak{p}(\zeta) \subset \mathfrak{p}_i(\zeta), \qquad \zeta \epsilon A,$$

$$\mathfrak{p}_{i+1}(\zeta) \subset \mathfrak{p}_i(\zeta) \subset \mathfrak{p}^*(\zeta), \qquad \zeta \epsilon D,$$

$$\mathfrak{p}_{i+1}(\zeta) \subset q^i, \qquad \zeta \epsilon C_i.$$

Le produit $q(\zeta) = \bigcap_{i=1,2,\ldots} \mathfrak{p}_i(\zeta)$ est une fonction de la classe $\mathfrak{P}$ (cf. [7], chapitre 7). Elle est continue dans D/A, car $\zeta_0 \epsilon D/A$ étant un point fixé, il existe pour tout i, à partir d'un certain i_0, un voisinage de ζ_0 contenu dans D/C_i, et par conséquent $\mathfrak{p}_i(\zeta) = \mathfrak{p}_{i_0}(\zeta)$ pour $i \geqslant i_0$ dans ce voisinage.

Je vais maintenant montrer que $q(\zeta) = \mathfrak{p}(\zeta)$ dans A. Dans ce but fixons un $\zeta \epsilon A$ et désignons par $c_{i(j)}, j = 1, 2, \ldots$ la suite formée de toutes les sphères $c_i, i = 1, 2, \ldots$ contenant le point ζ. Or, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier positif N tel que $q^{i(j)} \subset S\big(\mathfrak{p}(\zeta), \varepsilon\big)$ pour $j \geqslant N$. En même temps $\mathfrak{p}_{i(j)+1}(\zeta) \subset q^{i(j)}$ pour $j = 1, 2, \ldots$, donc $\mathfrak{p}_{i(j)+1}(\zeta) \subset S\big(\mathfrak{p}(\zeta), \varepsilon\big)$ pour $j \geqslant N$, d'où $\bigcap_{i=1,2,\ldots} \mathfrak{p}_{i(j)+1}(\zeta) \subset S\big(\mathfrak{p}(\zeta), \varepsilon\big)$ et par conséquent $q(\zeta) = \bigcap_{j=1,2,\ldots} \mathfrak{p}_{i(j)+1}(\zeta) \subset \mathfrak{p}(\zeta)$ pour $\zeta \epsilon A$, ε pouvant être aussi petit que l'on veut. L'inclusion inverse étant évidente, on a $q(\zeta) = \mathfrak{p}(\zeta)$ dans A, ce qui achève la démonstration du lemme 1.

En substituant l'espace métrique $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ à l'espace D et l'ensemble compact $[A]_{\langle a,\beta\rangle} \subset [\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ (cf. [7], chapitre 5) à l'ensemble A, on en déduit le lemme suivant:

Lemme 2. Si $F \epsilon \mathscr{G}_{\langle a,\beta\rangle}$ et $F^*\{\varphi\}_t = \bar{S}(0, M(t)+N(t)\,\|\varphi\|_t+1)$ dans $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ (l'inclusion $F\{\varphi\}_t \subset {}_iF^*\{\varphi\}_t \epsilon \mathscr{F}^*_{\langle a,\beta\rangle}$, $\{\varphi\}_t \epsilon [\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ étant remplie vu la définition de la classe $\mathscr{G}_{\langle a,\beta\rangle}$, [7], chapitre 8) il existe une suite de fonctions continues $F_i \epsilon \mathscr{F}_{\langle a,\beta\rangle}$, $i = 1, 2, \ldots$ telle que

1° $F_{i+1}\{\varphi\}_t \subset F_i\{\varphi\}_t \subset F^*\{\varphi\}_t$, $\{\varphi\}_t \epsilon [\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$, $i = 1, 2, \ldots$,

2° $F\{\varphi\}_t \subset F_i\{\varphi\}_t$, $\{\varphi\}_t \epsilon [A]_{\langle a,\beta\rangle}$, $i = 1, 2, \ldots$,

3° $F\{\varphi\}_t = \bigcap_{i=1,2,\ldots} F_i\{\varphi\}_t$, $\{\varphi\}_t \epsilon [A]_{\langle a,\beta\rangle}$,

4° le produit $H\{\varphi\}_t = \bigcap_{i=1,2,\ldots} F_i\{\varphi\}_t$ est une fonction appartenant à $\mathscr{F}_{\langle a,\beta\rangle}$, continue dans $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}/[A]_{\langle a,\beta\rangle}$.

2. Une homotopie

Dans ce chapitre tout entier nous admettrons les hypothèses et les définitions suivantes:

Soit F une fonction appartenant à la classe $\mathscr{G}_{\langle a,\beta\rangle}$, $\beta\in\langle T, b)$ et F^* — une fonction de la classe $\mathscr{F}^*_{\langle a,\beta\rangle}$ telle que les deux conditions suivantes $F^*\{\varphi\}_t\subset \bar{S}(0, M(t)+N(t)\|\varphi\|_t+3/2)$, $F\{\varphi\}_t\subset F^*\{\varphi\}_t$ sont remplies dans l'espace métrique $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$. Soit $\{\xi\}_\tau\in[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$, $\tau\in\langle T,\beta\rangle$ une fonction initiale et C — une constante positive telle que $\|\xi\|_\tau\leqslant C$. Désignons par $B_{\langle a,\beta\rangle}$ l'ensemble compact formé de toutes les fonctions $\varphi\in\Phi_{\langle a,\beta\rangle}$ qui remplissent la condition initiale $\varphi(t)=\xi(t)$ pour $t\in\langle a,\tau\rangle$ et la condition de Lipschitz avec la constante $L^*=(C+1)L_2(\beta)$ (cf. [7], chapitre 4) pour $t\in\langle\tau,\beta\rangle$, et par $[B]_{\langle a,\beta\rangle}$ le sous-ensemble de l'espace métrique $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ formé de toutes les fonction $\{\varphi\}_s$ remplissant la condition initiale $\varphi(t)=\xi(t)$ dans l'intervalle $\langle a,\tau\rangle$ et celle de Lipschitz avec la constante L^* dans l'intervalle $\langle\tau, s\rangle\subset\langle\tau,\beta\rangle$. L'ensemble $[B]_{\langle a,\beta\rangle}$ est compact dans l'espace $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ (cf. p. ex. [7], lemme 6).

Cela posé, fixons un $\varepsilon\in(0,1/2)$. La fonction F^* étant uniformément continue dans l'ensemble compact $[B]_{\langle a,\beta\rangle}$, il existe un $\delta'>0$ tel que $\operatorname{dist}(F^*\{\varphi\}_t, F^*\{\psi\}_u)<\varepsilon/2$ lorsque $\{\varphi\}_t, \{\psi\}_u\in[B]_{\langle a,\beta\rangle}$ et $[\{\varphi\}_t,\{\psi\}_u]<\delta'$. On a aussi $\operatorname{dist}(\bar{S}(F^*\{\varphi\}_t, r), \bar{S}(F^*\{\psi\}_u, r))<\varepsilon/2$, où r est un nombre positif quelconque. Posons enfin $\delta=1/2\min(\delta'/1+L^*, \delta'/2L^*)$.

Lemme 3. Soient $\{\varphi\}_\beta$ et $\{\psi\}_\beta$ deux fonctions appartenant à l'émission $\mathscr{E}(F,\xi,\tau)$ et soit $\tau_0\in\langle\tau,\beta\rangle$.

S'il existe une fonction $h(t,\lambda)$ définie et continue pour $t\in\langle a,\tau_0\rangle$, $\lambda\in\langle 0,1\rangle$, remplissant les conditions

$$\begin{aligned} h(t,\lambda)&=\xi(t) && \text{pour}\quad t\in\langle a,\tau\rangle\quad\text{et}\quad\lambda\in\langle 0,1\rangle,\\ h(t,0)&=\varphi(t) && \text{pour}\quad t\in\langle a,\tau_0\rangle,\\ h(t,1)&=\psi(t) && \text{pour}\quad t\in\langle a,\tau_0\rangle\end{aligned}$$

et satisfaisant pour chaque $\lambda\in\langle 0,1\rangle$ fixé, à l'équation au paratingent à argument retardé

$$\operatorname{Pt}\chi(t)\subset R^*\{\chi\}_t\quad\text{pour}\quad t\in\langle\tau,\tau_0\rangle\tag{2.1}$$

où $R^*\{\chi\}_t=\bar{S}(F^*\{\chi\}_t,\varepsilon)$, alors il existe une fonction $H(t,\mu)$ ayant des propriétés analogues, mais définie pour $t\in\langle a,\tau_0+\delta\rangle$ et $\mu\in\langle 0,1\rangle$.

En effet, admettons que pour $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ k_λ soit le centre de gravité de l'ensemble $F^*\{h(t,\lambda)\}_{a\leqslant t\leqslant\tau_0}$,

$$\chi_\lambda(t)=\begin{cases} h(t,\lambda), & \text{si}\quad t\in\langle a,\tau_0\rangle,\\ h(\tau_0,\lambda)+(t-\tau_0)k_\lambda, & \text{si}\quad t\in\langle\tau_0,\tau_0+\delta\rangle\end{cases}$$

et posons

$$H(t,\mu) = \begin{cases} (1-3\mu)\varphi(t)+3\mu\chi_0(t) & \text{pour} \quad \mu\epsilon\langle 0, 1/3\rangle \\ \chi_{3\mu-1}(t) & \text{pour} \quad \mu\epsilon\langle 1/3, 2/3\rangle \\ (3\mu-2)\psi(t)+(3-3\mu)\chi_1(t) & \text{pour} \quad \mu\epsilon\langle 2/3, 1\rangle. \end{cases}$$

La fonction H est identique à la fonction ξ pour $a\leqslant t\leqslant \tau$ et remplit la condition de Lipschitz avec la constante L^* pour $\tau\leqslant t\leqslant \tau_0+\delta$ (c'est-à-dire elle appartient à $[B]_{\langle a,\beta\rangle}$), donc cette fonction est continue par rapport à t uniformément dans le domaine $a\leqslant t\leqslant \tau_0+\delta$, $0\leqslant\mu\leqslant 1$. Je vais montrer qu'elle est continue par rapport à μ. Cela étant bien visible pour $0\leqslant\mu\leqslant 1/3$ ou $2/3\leqslant\mu\leqslant 1$ et pour $a\leqslant t\leqslant\tau_0$, envisageons le cas où $\lambda=3\mu-1\epsilon\langle 0,1\rangle$ et $\tau_0\leqslant t\leqslant\tau_0+\delta$. Dans ce cas $H(t,\mu)=$ $=h(\tau_0,\lambda)+(t-\tau_0)k_\lambda$. Or le premier terme du second membre est continu par hypothèse; quant au second, il suffit de constater qu'il en est de même de la fonction $k_\lambda=$ centre $F^*\{h(t,\lambda)\}_{a\leqslant t\leqslant\tau_0}$. En effet, soit $\varepsilon_0>0$. La fonction centre $F^*\{\zeta\}_{\tau_0}$ étant continue par rapport à $\{\zeta\}_t\epsilon[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ il existe un $\delta_0>0$ tel que la distance $|$centre $F^*\{\zeta_1\}_{\tau_0}-$ centre $F^*\{\zeta_2\}_{\tau_0}|<$ $<\varepsilon_0$ si $[\{\zeta_1\}_{\tau_0},\{\zeta_2\}_{\tau_0}]<\delta_0$. Mais la fonction $h(t,\lambda)$ est continue et par conséquent, il existe un $\eta_0>0$ tel que $[\{h(t,\lambda_1)\}_{\tau_0},\{h(t,\lambda_2)\}_{\tau_0}]<\delta_0$ et de même $|k_{\lambda_1}-k_{\lambda_2}|<\varepsilon_0$ lorsque $\lambda_1,\lambda_2\epsilon\langle 0,1\rangle$ et $|\lambda_1-\lambda_2|<\eta_0$.

La continuité de la fonction $H(t,\mu)$ par rapport à μ et sa continuité uniforme par rapport à t entraine évidemment la continuité de cette fonction par rapport au couple (t,μ) des arguments, où $t\epsilon\langle a,\tau_0+\delta\rangle$, $\mu\epsilon\langle 0,1\rangle$.

Je vais maintenant démontrer que, pour un $\mu\epsilon\langle 0,1\rangle$ fixé, la fonction $H(t,\mu)$ satisfait toujours dans l'intervalle $\langle\tau,\tau_0+\delta\rangle$ à l'équation (2.1). Cela étant évident pour $t\epsilon\langle\tau,\tau_0\rangle$, admettons que $t\epsilon\langle\tau_0,\tau_0+\delta\rangle$ et envisageons les trois cas suivants:

I. Si $\mu\epsilon\langle 1/3, 2/3\rangle$ on a $H(t,\mu)\equiv\chi_\lambda(t)=h(\tau_0,\lambda)+(t-\tau_0)k_\lambda$, où $\lambda=3\mu-1\epsilon\langle 0,1\rangle$, donc $\mathrm{Pt}\,H(t,\mu)=\mathrm{Pt}\,\chi_\lambda(t)\subset F^*\{\chi_\lambda\}_{\tau_0}$ pour $t\epsilon\langle\tau_0,\tau_0+$ $+\delta\rangle$. Comme $[\{\chi_\lambda\}_{\tau_0},\{\chi_\lambda\}_t]\leqslant\delta+L^*\delta<\delta'$, on a l'inclusion $F^*\{\chi_\lambda\}_{\tau_0}\subset$ $\subset\bar{S}(F^*\{\chi_\lambda\}_t,\varepsilon/2)$, donc $\mathrm{Pt}\,\chi_\lambda(t)\subset\bar{S}(F^*\{\chi_\lambda\}_t,\varepsilon/2)\subset R^*\{\chi_\lambda\}_t$ pour $t\epsilon\langle\tau_0,$ $\tau_0+\delta\rangle$.

II. Dans le cas $\mu\epsilon\langle 0,1/3\rangle$ nous avons $H(t,\mu)=(1-3\mu)\varphi(t)+3\mu\chi_0(t)$. Les fonctions φ et χ_0 remplissent dans l'intervalle $\langle\tau_0,\tau_0+\delta\rangle$ la condition de Lipschitz avec la constante L^*, donc $|\varphi(s)-\chi_0(s)|\leqslant|\varphi(s)-\varphi(\tau_0)|+$ $+|\chi_0(s)-\chi_0(\tau_0)|\leqslant 2L^*(s-\tau_0)\leqslant 2L^*\delta<\delta'$ pour $s\epsilon\langle\tau_0,\tau_0+\delta\rangle$ et par conséquent $[\{\varphi\}_t,\{\chi_0\}_t]<\delta'$ pour $t\epsilon\langle\tau_0,\tau_0+\delta\rangle$, ce qui entraîne l'inclusion $F^*\{\varphi\}_t\subset Q^*\{\chi_0\}_t=\bar{S}(F^*\{\chi_0\}_t,\varepsilon/2)$. Les deux conditions $\mathrm{Pt}\,\varphi(t)\subset$ $\subset Q^*\{\chi_0\}_t$ et $\mathrm{Pt}\,\chi_0(t)\subset Q^*\{\chi_0\}_t$ étant remplies dans l'intervalle $\langle\tau,\tau_0+\delta\rangle$

tout entier, il en résulte que

$$\mathrm{Pt}\, H(t, \mu) \subset Q^*\{\chi_0\}_t .$$

Mais pour $s \in \langle \tau_0, \tau_0 + \delta \rangle$ on a $|H(s, \mu) - \chi_0(s)| = |(1-3\mu)| . |\varphi(s) - \chi_0(s)| < < \delta'$ donc $[\{H(s, \mu)\}_t, \{\chi_0\}_t] < \delta'$ pour $t \in \langle \tau_0, \tau_0 + \delta \rangle$ et ensuite

$$Q^*\{\chi_0\}_t \subset R^*\{H(s, \mu)\}_{a \leqslant s < t}$$

d'où l'inclusion (2.1).

III. Le cas $\mu \in \langle 2/3, 1 \rangle$ ne diffère pas essentiellement du précédent. Les autres propriétés de fonction $H(t, \mu)$ sont bien visibles.

Lemme 4. Si $\{\varphi\}_\beta$ et $\{\psi\}_\beta$ appartiennent à l'émission $\mathscr{E}(F, \xi, \tau)$, il existe une fonction $H(t, \lambda)$ définie et continue pour $t \in \langle a, \beta \rangle$, $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ telle que

$$H(t, \lambda) = \xi(t) \quad \text{pour} \quad t \in \langle a, \tau \rangle \quad \text{et} \quad \lambda \in \langle 0, 1 \rangle,$$
$$H(t, 0) = \varphi(t) \quad \text{pour} \quad t \in \langle a, \beta \rangle,$$
$$H(t, 1) = \psi(t) \quad \text{pour} \quad t \in \langle a, \beta \rangle,$$

et que, pour chaque $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ fixé, on a

$$\text{(2.2)} \qquad \mathrm{Pt}\, H(t, \lambda) \subset R^*\{H(s, \lambda)\}_{a \leqslant s \leqslant t} \quad \text{pour} \quad t \in \langle \tau, \beta \rangle.$$

Ce lemme s'obtient immédiatement du précédent. La fonction $H(t, \lambda)$ est l'homotopie joignant les fonction φ et ψ dans l'ensemble des fonctions $\mathscr{E}(R^*, \xi, \tau)$.

D'après le lemme 2 on peut approcher la fonction F dans l'ensemble $[A]_{\langle a, \beta \rangle}$ par une suite décroissante de fonction continues F_i, $i = 1, 2, \ldots$, telles que $F_i\{\varphi\}_t \subset \overline{S}(0, M(t) + N(t)\|\varphi\|_t + 1)$. En posant $F_i^*\{\varphi\}_t = \overline{S}(F_i\{\varphi\}_t, 1/2i)$ pour $i = 1, 2, \ldots$ nous obtenons une nouvelle approximation de la fonction F, où les fonctions F_i^* sont continues, à valeurs grasses et remplissent la condition: $F_i^*\{\varphi\}_t \subset \overline{S}(0, M(t) + N(t)\|\varphi\|_t + 3/2)$.

Soit $\{\varphi\}_\beta \in \mathscr{E}(F, \xi, \tau)$ et $\{\psi\}_\beta \in \mathscr{E}(F, \xi, \tau)$. En vertu du lemme 4 il existe pour tout $i = 1, 2, \ldots$ une homotopie $H_i(t, \lambda)$, où $t \in \langle a, \beta \rangle$, $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ joignant ces deux solutions φ et ψ dans l'émission $\mathscr{E}(R_i^*, \xi, \tau)$, où $R_i^*\{\chi\}_t = = \overline{S}(F_i\{\chi\}_t, 1/i$ pour $\{\chi\}_t \in [\Phi]_{\langle a, \beta \rangle}$ et pour $i = 1, 2, \ldots$. Cette remarque sera utilisée dans le chapitre suivant.

3. Quelques théorèmes sur la connexité de l'émission

Théorème I. Si $F \in \mathscr{G}_{\langle a, \beta \rangle}$, $\beta \in \langle T, b)$ et $\{\xi\}_\tau \in [\Phi]_{\langle a, \beta \rangle}$, l'émission $\mathscr{E}(F, \xi, \tau)$ est un sous-ensemble connexe de l'espace fonctionnel $\Phi_{\langle a, \beta \rangle}$.

Il suffit de démontrer (vue [7], lemme 2) que l'émission $\mathscr{E}(F, \xi, \tau)$ (qui sera notée $\mathscr{E}$ tout court) est connexe dans l'espace métrique $[\Phi]'_{\langle a, \beta \rangle}$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, c'est-à-dire que l'émission $\mathscr{E}$

se laisse décomposer en deux ensembles $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}''$ non vides, fermés et disjoints. Mais l'émission $\mathscr{E}$ étant compacte (cf. [8], théorème III), les ensembles $\mathscr{E}'$, $\mathscr{E}''$ doivent être aussi compacts. Donc il existe un $\varrho > 0$ tel que l'entourage $\mathscr{E}'_{2\varrho}$ de rayon 2ϱ de l'ensemble $\mathscr{E}'$ est disjoint avec l'ensemble $\mathscr{E}''$. Prenons deux solutions φ et ψ appartenant à l'émission $\mathscr{E}$ telles que $\varphi \in \mathscr{E}'$ et $\psi \in \mathscr{E}''$, d'ailleurs quelconques. Désignons par $\mathscr{E}'_i$ la composante de l'émission $\mathscr{E}_i = \mathscr{E}(R_i^*, \xi, \tau)$ contenant la fonction φ. Vu la remarque à la fin du chapitre 2, les fonctions φ et ψ sont homotopes et par conséquent appartiennent toutes les deux à la composante $\mathscr{E}'_i$ de l'émission $\mathscr{E}_i$.

On constate facilement que la distance $\inf\limits_{\{\chi\}_\beta \in \mathscr{E}'} [\{H_i(t, \lambda)\}_{a < t \leq \beta}, \{\chi\}_\beta]$ de la fonction H_i à l'ensemble $\mathscr{E}'$ est continue par rapport à $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. La fonction $d(\{\zeta\}_\beta) = \inf\limits_{\{\chi\}_\beta \in \mathscr{E}'} [\{\zeta\}_\beta, \{\chi\}_\beta)]$ est continue par rapport à $\{\zeta\}_\beta \in [\Phi]'_{\langle a, \beta\rangle}$ en vertu du théorème sur la continuité de la distance entre un point et un ensemble fixé par rapport à ce point dans un espace métrique quelconque (cf. [9]); il existe donc un $\delta > 0$ tel que $|d(\{\zeta_1\}_\beta) - d(\{\zeta_2\}_\beta)| < \varepsilon$ si $[\{\zeta_1\}_\beta, \{\zeta_2\}_\beta] < \delta$. La fonction $H_i(t, \lambda)$ étant uniformément continue pour $t \in \langle a, \beta\rangle$, $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$, il existe un $\eta > 0$ tel que $[\{f_i\}_\beta, \{g_i\}_\beta] < \delta$, où $f_i(t) = H_i(t, \lambda_1)$, $g_i(t) = H_i(t, \lambda_2)$, et par conséquent $|d(\{f_i\}_\beta) - d(\{g_i\}_\beta)| < \varepsilon$ lorsque $\lambda_1, \lambda_2 \in \langle 0, 1\rangle$ et $|\lambda_1 - \lambda_2| < \eta$.

Comme $d(\{\varphi\}_\beta) = 0$, $\{\varphi\}_\beta = \{H_i(t, 0)\}_{a < t \leq \beta}$ et $d(\{\psi\}_\beta) \geq 2\varrho$, $\{\psi\}_\beta = \{H_i(t, 1)\}_{a < t \leq \beta}$, il existe un $\lambda_i \in (0, 1)$ tel que $d(\{h_i\}_\beta) = \varrho$, où $h_i(t) = H_i(t, \lambda_i)$ pour $t \in \langle a, \beta\rangle$, $i = 1, 2, \ldots$.

Lorsque $h_i \in \mathscr{E}_i \subset \mathscr{E}_1$ pour $i = 1, 2, \ldots$ et l'ensemble $\mathscr{E}_1$ est compact, on peut tirer de la suite h_i une suite partielle $h_{i(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$ convergente uniformément vers une fonction $h \in \mathscr{E}_1$. Soit m un entier positif quelconque. Pour les indices j assez grands on a $i(j) \geq m$, donc $\mathscr{E}_{i(j)} \subset \mathscr{E}_m$, d'où $h_{i(j)} \in \mathscr{E}_m$ et par conséquent $h \in \mathscr{E}_m$, puisque l'ensemble $\mathscr{E}_m$ est fermé. Mais, l'entier positif m étant arbitraire, on a $h \in \bigcap\limits_{m=1,2,\ldots} \mathscr{E}_m$. Nous voyons ainsi que

$h(t) = \xi(t)$ pour $t \in \langle a, \tau\rangle$ et

$\operatorname{Pt} h(t) \subset R_i^*\{h\}_t = \bar{S}(F_i\{h\}_t, 1/i)$ pour $t \in \langle \tau, \beta\rangle$ et pour $i = 1, 2, \ldots$.

Fixons arbitrairement un indice i. Nous aurons $\bar{S}(F_j\{h\}_t, 1/j) \subset \bar{S}(F_i\{h\}_t, 1/j)$ pour $j \geq i$, d'où $\operatorname{Pt} h(t) \subset \bar{S}(F_i\{h\}_t, 1/j)$ et par conséquent $\operatorname{Pt} h(t) \subset F_i\{h\}_t$. En particulier $\operatorname{Pt} h(t) \subset F_1\{h\}_t \subset \bar{S}(0, M(t) + N(t)\|h\|_t + 1)$, ce qui signifie que la fonction h appartient à l'ensemble $[A]_{\langle a, \beta\rangle}$, d'où $\bigcap\limits_{i=1,2,\ldots} F_i\{h\}_t = F\{h\}_t$, en vertu du lemme 2, et par conséquent $\operatorname{Pt} h(t) \subset F\{h\}_t$ pour $t \in \langle \tau, \beta\rangle$. Ainsi nous avons démontrer que $h \in \mathscr{E}(F, \xi, \tau) = \mathscr{E}' \cup \mathscr{E}''$. Mais la fonction h ne peut pas appartenir à l'ensemble $\mathscr{E}'$, puisque sa distance à cet ensemble est $\varrho > 0$. L'ensemble

$\mathscr{E}''$ étant disjoint de l'entourage $\mathscr{E}'_{2\varrho}$ de l'ensemble $\mathscr{E}'$, la fonction h n'appartient pas à $\mathscr{E}''$ non plus. Cette contradiction montre que l'ensemble $\mathscr{E}$ devait être connexe, ce qui achève la démonstration.

Théorème II. Si $F \epsilon \mathscr{G}_{\langle a,\beta\rangle}$ et Z est un sous-ensemble compact et connexe de l'espace métrique $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$, l'émission $\mathscr{E}(F, Z)$ est un sous-ensemble connexe de l'espace fonctionnel $\Phi_{\langle a,\beta\rangle}$.

Supposons au contraire que l'ensemble $\mathscr{E}(F,Z) = \mathscr{E}$ ne soit pas connexe; cela veut dire qu'il existe deux ensembles $\mathscr{E}'$, $\mathscr{E}''$ non vides, fermés et disjoints tels que $\mathscr{E} = \mathscr{E}' \cup \mathscr{E}''$. L'émission $\mathscr{E}$ étant compacte (cf. [8], théorème II), il en est de même des ensembles $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}''$. En vertu du théorème I l'émission $\mathscr{E}(F, \xi, \tau)$, où $\{\xi\}_\tau \epsilon Z$ est une fonction initiale quelconque, est entièrement contenue dans un seul des ensembles $\mathscr{E}'$ ou $\mathscr{E}''$. Or, on peut décomposer l'ensemble Z en deux ensembles initiaux Z' et Z'' non vides et disjoints tels que $\mathscr{E}(F, Z') = \mathscr{E}'$, $\mathscr{E}(F, Z'') = \mathscr{E}''$. Je vais démontrer que l'ensemble Z' est fermé. En effet, soit $\{\xi_i\}_{\tau_i} \epsilon Z'$, $i = 1, 2, \ldots$ une suite de fonctions initiales convergente vers une fonction $\{\xi\}_\tau \epsilon Z$. Soit φ_i, pour $i = 1, 2, \ldots$, une fonction appartenant à l'émission $\mathscr{E}(F, \xi_i, \tau_i) \subset \mathscr{E}'$. L'ensemble $\mathscr{E}'$ étant compact, on peut tirer de la suite φ_i, $i = 1, 2, \ldots$, une suite partielle $\varphi_{i(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$, convergente uniformément dans l'intervalle $\langle a, \beta\rangle$ vers une fonction $\varphi \epsilon \mathscr{E}'$. Il est évident que la fonction φ est identique dans l'intervalle $\langle a, \tau\rangle$ à la fonction ξ, donc $\{\xi\}_\tau \epsilon Z'$. Pour la même raison l'ensemble Z'' est aussi fermé. Mais, les ensembles Z' et Z'' étant non vides, fermés et disjoints, l'ensemble Z ne serait pas connexe, contrairement à l'hypothèse. Ainsi nous voyons que l'émission $\mathscr{E}(F, Z)$ devait être connexe, ce qui achève la démonstration.

3. Une généralisation d'un théorème de H. Kneser

Le théorème que je vais énoncer est une généralisation d'un théorème bien connu de H. Kneser (cf. [4], [6]) concernant les zones d'émission des systèmes d'équations différentielles ordinaires. Ce théorème a été déjà énoncé dans les cas des équations au paratingent (cf. [2], [3], [11]) et de quelques familles générales de courbes [5].

Désignons par Π_c l'hyperplan $t = c$, $c \epsilon \langle a, \beta\rangle$ dans l'espace cartésien à $n+1$ dimensions X_{1+n}.

Théorème III. Si $F \epsilon \mathscr{G}_{\langle a,\beta\rangle}$ et Z est un sous-ensemble compact et connexe de l'espace métrique $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$, l'ensemble $e(F, Z) \frown \Pi_c$ est un continu, pour tout $c \epsilon \langle a, \beta\rangle$.

En effet, la zone d'émission $e(F, Z)$ étant compacte ([8], théorème IV), il en est de même du produit $e(F, Z) \frown \Pi_c$ pour $c \epsilon \langle a, \beta\rangle$ quelconque. Supposons que l'ensemble $e(F, Z) \frown \Pi_c$ ne soit pas connexe, c'est-à-dire que $e(F, Z) \cap H_c = A' \cup A''$, où les ensembles A' et A'' sont non vides, fermés et disjoints. Désignons par $\mathscr{E}'$, resp. $\mathscr{E}''$, l'ensemble de toutes les fonctions $\{\varphi\}_\beta \epsilon \mathscr{E}(F, Z)$ telles que $(c, \varphi(c)) \epsilon A'$, resp. $(c, \varphi(c)) \epsilon A''$. Les ensembles $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}''$ sont évidemment non vides et disjoints. Ils sont, en outre, fermés. Soit, par exemple, φ_i, $i = 1, 2, \ldots$, une suite de solutions appartenant à $\mathscr{E}'$, convergente uniformément dans l'intervalle $\langle a, \beta\rangle$ vers une fonction $\varphi \epsilon \mathscr{E}(F, Z)$. La fonction φ appartient à $\mathscr{E}'$, puisque le point $(c, \varphi(c))$ appartient à l'ensemble fermé A' comme point limite de la suite $(c, \varphi_i(c)) \epsilon A'$, $i = 1, 2, \ldots$. Les ensembles $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}''$ étant fermés, l'émission $\mathscr{E}(F, Z) = \mathscr{E}' \cup \mathscr{E}''$ n'est pas connexe, contrairement au théorème II, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bielecki, A., Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour l'unicité des solutions des systèmes d'équations différentielles ordinaires et des équations au paratingent, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 2, 2 (1948), p. 49-106.

[2] — Certaines propriétés topologiques des solutions des équations au paratingent, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 9,4 (1955), p. 63-79.

[3] Bielecki, A., Kluczny, Cz., Sur une généralisation d'un théorème de H. Kneser, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 14,7 (1960), p. 111-116.

[4] Kamke, E., Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, IIs, Acta Math. (Upsala), 58 (1932), p. 57-85.

[5] Kluczny, Cz., Sur certaines familles de courbes en relation avec la théorie des équations différentielles ordinaires I, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 15,2 (1961), p. 13-40.

[6] Kneser, H., Über die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen dass der Lipschitz-Bedingung nicht genügt, Sitz.-Ber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Mat. Kl., 1923, p. 171-174.

[7] Krzyżowa, B., Equations au paratingent à argument retardé, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 17, (1963), p.

[8] Krzyżowa, B., Sur les familles de solutions des équations au paratingent à argument retardé, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 17, 2, (1963), p. 19-24.

[9] Kuratowski, K., Topologie, I, Monografie Matematyczne, tom 20, Warszawa, 1958.

[10] Lusternik, L. A., Sobolew, W. I., Elementy Analizy Funkcjonalnej, PWN, Warszawa, 1959.

[11] Zaremba, S. K., O Równaniach Paratyngensowych, Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego, 9 (1935), p. 1-22.

Streszczenie

W pracy tej zajmuję się zagadnieniem spójności rodziny całek równania paratyngensowego z opóźniającym się argumentem. Głównym rezultatem pracy jest twierdzenie III będące uogólnieniem znanego twierdzenia H. Knesera o przekrojach, prostopadłych do osi t, stref emisji punktów w teorii równań różniczkowych zwyczajnych.

Резюме

В этой работе занимаемся проблемой связности семьи интегралов паратингентного уравнения с запаздывающим аргументом.

Главным результатом работы является Теорема III, которая представляет обобщение известной теоремы Г. Кнезера о связности перпендикулярных к оси t разрезов зон эмиссии для обыкновенных дифференциальных уравнений.