ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XVII, 2 SECTIO A 1963

Z Zespołowej Katedry Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

BARBARA KRZYŻOWA

# Sur les familles de solutions des équations au paratingent á argument retardé

## O rodzinach rozwiązań równań paratyngensowych z opóźniającym się argumentem

## О семействах решений паратингентных уравнений с запаздывающим аргументом

Dans le travail [1] j'ai introduit la notion d'une équation au paratingent à argument retardé; j'y ai formulé le problème généralisé de Cauchy pour une telle équation et j'ai démontré que sous certaines conditions il existe toujours des solutions (cf. [1], p. ).

Ici je me propose d'étudier les familles de solutions du problème de Cauchy pour une équation au paratingent à argument retardé. J'adopterai les définitions et notations introduites dans [1], en particulier les notions fondamentales de paratingent, de classes $\Phi_{\langle a,\beta\rangle}$, $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$, $\mathscr{F}_{\langle a,\beta\rangle}$, $\mathscr{G}_{\langle a,\beta\rangle}$ de fonctions etc., ainsi que les symboles correspondants, en admettant que tout cela est déjà connu au lecteur.

### 1. Emission et zone d'émission

Soit $\beta\in\langle\tau, b)\subset\langle T, b)$ un nombre fixé, $F\{\varphi\}_t$ — une fonction appartenant à $\mathscr{F}_{\langle a,\beta\rangle}$ et $\{\xi\}_\tau\in[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ une fonction initiale. L'ensemble de toutes les fonctions $\{\varphi\}_\beta\in\Phi_{\langle a,\beta\rangle}$ satisfaisant à l'équation au paratingent à argument retardé

$$\mathrm{Pt}\varphi(t)\subset F\{\varphi\}_t,\ t\in\langle\tau,\beta\rangle \tag{1,1}$$

et à la condition initiale

$$\varphi(t)=\xi(t),\ t\in\langle a,\tau\rangle \tag{1,2}$$

sera appelé émission de la fonction $\{\xi\}_\tau$, symbole $\mathscr{E}(F, \xi, \tau)$, et l'ensemble de tous les points $(t, x) \in X_{1+n}$ tels que $t \in \langle a, \beta \rangle$, $x = \varphi(t)$, $\varphi \in \mathscr{E}(F, \xi, \tau)$ — zone d'émission de la fonction $\{\xi\}_\tau$, symbole $e(F, \xi, \tau)$. $Z$ étant un sous-ensemble de l'espace métrique $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$, nous appellerons émission $\mathscr{E}(F, Z)$ (resp. zone d'émission $e(F, Z)$) de l'ensemble initial $Z$ la somme des émissions $\mathscr{E}(F, \xi, \tau)$ (resp. des zones d'émission $e(F, \xi, \tau)$) qui correspondent à toutes fonctions initiales $\{\xi\}_\tau \in Z$.

## 2. Quelques propriétés de l'émission

**Théorème I.** Si $F \in \mathscr{G}_{\langle a,\beta\rangle}$ et $Z$ est un sous-ensemble borné et fermé de l'espace métrique $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$, alors l'émission $\mathscr{E}(F, Z)$ est un sous-ensemble borné et fermé de l'espace fonctionnel $\Phi_{\langle a,\beta\rangle}$.

L'ensemble $Z$ étant borné, il existe une constante $C > 0$ telle que l'on a $\|\xi\|_\tau \leqslant C$ pour chaque fonction initiale $\{\xi\}_\tau \in Z$; d'autre part, d'après [1], lemme 4, l'inégalité $\|\varphi\|_t \leqslant (C+1)\Lambda_0(\beta)$ est remplie dans l'intervalle $\langle T, \beta \rangle$ pour chaque fonction $\varphi \in \mathscr{E}(F, Z)$. Donc l'émission $\mathscr{E}(F, Z)$ est bornée.

Soit $\varphi_i$, $i = 1, 2, \ldots$ une suite quelconque de fonctions appartenant à $\mathscr{E}(F, Z)$ convergente uniformément dans l'intervalle $\langle a, \beta \rangle$ vers une fonction $\varphi \in \Phi_{\langle a,\beta\rangle}$. Soit $\{\xi_i\}_{\tau_i} \in Z$, $i = 1, 2, \ldots$ une suite de fonctions initiales telles que l'on a $\varphi_i \in \mathscr{E}(F, \xi_i, \tau_i)$, $i = 1, 2, \ldots$. La suite $\tau_i$ est bornée, donc on peut en tirer une suite partielle $\tau_{i(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$ convergente vers un $\tau \in \langle T, \beta \rangle$. Il est facile de voir que la suite $\{\xi_{i(j)}\}\tau_{i(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$ converge dans l'espace métrique $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ vers la fonction $\{\varphi\}_\tau$ qui appartient à $Z$, puisque $Z$ est fermé. D'après [1], lemmes 7 et 8, on a $\mathrm{Pt}\varphi(t) \subset F\{\varphi\}_t$ pour $t \in (\tau, \beta\rangle$ et, de plus, la fonction $F$ étant semi-continue supérieurement par rapport à l'inclusion, il s'ensuit de [1], lemme 9, que $\mathrm{Pt}^+\varphi(\tau) \subset F\{\varphi\}_t$. Donc, la fonction $\{\varphi\}_\beta$ appartient à $\mathscr{E}(F, Z)$ et cela signifie que l'émission $\mathscr{E}(F, Z)$ est fermée, ce qui achève la démonstration du théorème.

**Théorème II.** Si $F \in \mathscr{G}_{\langle a,\beta\rangle}$ et $Z$ est un sous-ensemble compact de l'espace métrique $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$, alors l'émission $\mathscr{E}(F, Z)$ est un sous-ensemble compact de l'espace fonctionnel $\Phi_{\langle a,\beta\rangle}$.

En vertu du lemme 1, [1], toutes les fonctions appartenant à l'ensemble compact $Z$ ont le même module de continuité $\omega'(\delta)$. Si $\varphi \in \mathscr{E}(F, Z)$, il existe un $\tau \in \langle T, \beta \rangle$ tel que $\{\varphi\}_\tau \in Z$, donc $\omega'(\delta)$ est le module de continuité de la fonction $\varphi$ dans l'intervalle $\langle a, \tau \rangle$. Dans l'intervalle $\langle \tau, \beta \rangle$ la fonction $\varphi$ satisfait à la condition de Lipschitz avec la constante $(C+1)L_0(\beta)$ (cf. [1], lemme 5). Donc il existe une fonction $\omega''(\delta)$, le module de continuité de la fonction $\varphi$ dans l'intervalle $\langle \tau, \beta \rangle$, indépendante, de même que la constante de Lipschitz, du choix de la fonction $\varphi$. En posant $\omega(\delta) =$

$= \max(\omega'(\delta), \omega''(\delta))$ on voit que la fonction $\omega(\delta)$ est le module de continuité dans l'intervalle $\langle a, \beta\rangle$ pour toutes les fonctions $\varphi \epsilon \mathscr{E}(F, Z)$. L'émission $\mathscr{E}(F, Z)$, étant un ensemble borné et fermé de fonctions également continues, est un ensemble compact dans l'espace fonctionnel $\Phi_{\langle a,\beta\rangle}$, ce qui achève la démonstration du théorème II.

Le théorème suivant s'en obtient comme cas particulier.

**Théorème III.** Si $F \epsilon \mathscr{G}_{\langle a,\beta\rangle}$ et $\{\xi\}_\tau \epsilon [\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$, l'émission $\mathscr{E}(F, \xi, \tau)$ est un sous-ensemble compact de l'espace fonctionnel $\Phi_{\langle a,\beta\rangle}$.

## 3. Quelques propriétés de la zone d'émission

**Théorème IV.** Si $F \epsilon \mathscr{G}_{\langle a,\beta\rangle}$ et $Z$ est un sous-ensemble compact de l'espace métrique $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$, la zone d'émission $e(F, Z)$ est un sous-ensemble compact de l'espace à $n+1$ dimensions $X_{1+n}$.

Soit $(t_i, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ une suite quelconque formée de points appartenant à $e(F, Z)$. Il existe une suite $\varphi_i(t) \epsilon \mathscr{E}(F, Z)$, $i = 1, 2, \ldots$, telle que $\varphi_i(t_i) = x_i$ pour $i = 1, 2, \ldots$. La suite des nombres $t_i$ étant bornée et, en même temps, l'émission $\mathscr{E}(F, Z)$ étant compacte (théorème II), il existe une suite d'indices $i(j)$, $j = 1, 2, \ldots$ telle que la suite partielle $t_{i(j)}$ converge vers un $t_0 \epsilon \langle a, \beta\rangle$ et la suite $\varphi_{i(j)}(t)$ converge uniformément dans l'intervalle $\langle a, \beta\rangle$ vers une fonction $\varphi \epsilon \mathscr{E}(F, Z)$; par conséquent la suite $(t_{i(j)}, x_{i(j)})$ converge vers le point $(t_0, \varphi(t_0))$, qui appartient évidemment à $e(F, Z)$. La zone d'émission $e(F, Z)$ est donc compacte.

Le théorème suivant s'ensuit du précédent:

**Théorème V.** Si $F \epsilon \mathscr{G}_{\langle a,\beta\rangle}$ et $\{\xi\}_\tau \epsilon [\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ la zone d'émission $e(F, \xi, \tau)$ est un sous-ensemble compact de l'espace à $n+1$ dimensions $X_{1+n}$.

## 4. Dépendence des émissions et des zones d'émission des conditions initiales et du second membre de l'équation

**Théorème VI.** Soit $F_i, i = 1, 2, \ldots$ une suite de fonctions appartenant à $\mathscr{G}_{\langle a,\beta\rangle}$ telle que $F_{i+1}\{\varphi\}_t \subset F_i\{\varphi\}_t$ pour $i = 1, 2, \ldots$ et pour chaque fonction $\{\varphi\}_t \epsilon [\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ et soit $Z_i \subset [\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$, $i = 1, 2, \ldots$, une suite décroissante d'ensembles bornés et fermés. Si $F\{\varphi\}_t$ désigne, pour chaque fonction $\{\varphi\}_t \epsilon [\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$, le produit $\bigcap_{i=1,2,\ldots} F_i\{\varphi\}_t$ et si $Z = \bigcap_{i=1,2,\ldots} Z_i$, alors on a $\mathscr{E}(F, Z) = \bigcap_{i=1,2,\ldots} \mathscr{E}(F_i, Z_i)$.

Il est évident que $\mathscr{E}(F, Z) \subset \mathscr{E}(F_i, Z_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots$, donc $\mathscr{E}(F, Z) \subset \bigcap_{i=1,2,\ldots} \mathscr{E}(F_i, Z_i)$. Il faut démontrer que l'inclusion inverse a aussi lieu.

Si $\varphi \in \bigcap_{i=1,2,\ldots} \mathscr{E}(F_i, Z_i)$, il existe une suite $\{\xi_i\}\tau_i \in Z_i$, $i = 1, 2, \ldots$, de fonctions initiales telle que $\varphi \in \mathscr{E}(F_i, \xi_i, \tau_i)$. La suite $\tau_i$ étant bornée, on peut en tirer une suite partielle $\tau_{i(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$ convergente vers un $\tau \in \langle T, \beta\rangle$. La suite $\{\xi_{i(j)}\}\tau_{i(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$ est évidemment convergente dans l'espace métrique $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ vers la fonction $\{\varphi\}_\tau$. Cette fonction appartient à l'ensemble initial $Z$. En effet, soit $m$ un entier positif quelconque. Pour les indices $i(j) \geqslant m$ on a $Z_{i(j)} \subset Z_m$, donc $\{\xi_{i(j)}\}\tau_{i(j)} \in Z_m$ et par conséquent $\{\varphi\}_\tau \in Z_m$, puisque l'ensemble $Z_m$ est fermé. Comme $m$ est quelconque, on constate que $\{\varphi\}_\tau \in Z$.

Je vais maintenant démontrer que la fonction $\varphi$ satisfait dans l'intervalle $\langle\tau, \beta\rangle$ à l'équation $\mathrm{Pt}\varphi(t) \subset F\{\varphi\}_t$. Fixons un $t \in (\tau, \beta\rangle$ et un entier positif $m$. Pour les indices j assez grands, à savoir tels que $\tau_{i(j)} < t$ et $i_{i(j)} \geqslant m$, on a $\mathrm{Pt}\varphi(t) \subset F_{i(j)}\{\varphi\}_t \subset F_m\{\varphi\}_t$. L'entier positif $m$ est quelconque, donc $\mathrm{Pt}\varphi(t) \subset F\{\varphi\}_t$ dans l'intervalle $(\tau, \beta\rangle$, mais on constate facilement que l'on a aussi $\mathrm{Pt}^+\varphi(\tau) \subset F\{\varphi\}_\tau$.L 'équation $\mathrm{Pt}\varphi(t) \subset$ $\subset F\{\varphi\}_t$ est, en effet, vérifiée dans l'intervalle $\langle\tau, \beta\rangle$ tout entier et comme $\{\varphi\}_\tau \in Z$, nous voyons que $\varphi \in \mathscr{E}(F, Z)$. La fonction $\varphi \in \bigcap_{i=1,2,\ldots} \mathscr{E}(F_i, Z_i)$ étant quelconque, on a $\bigcap_{i=1,2,\ldots} \mathscr{E}(F_i, Z_i) \subset \mathscr{E}(F, Z)$, ce qui achève la démonstration.

**Théorème VII.** Sous les hypothèses du théorème VI la zone d'émission $e(F, Z)$ est le produit des zones d'émission $e(F_i, Z_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ si les ensembles $Z_i$, $i = 1, 2, \ldots$ sont compacts.

L'inclusion $e(F, Z) \subset \bigcap_{i=1,2,\ldots} e(F_i, Z_i)$ étant évidente, il suffit de démontrer l'inclusion inverse. Soit $(t, x) \in \bigcap_{i=1,2,\ldots} e(F_i, Z_i)$ un point quelconque. Il existe une suite $\varphi_i \in \mathscr{E}(F_i, Z_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ de fonctions telle que $\varphi_i(t) = x$ pour $i = 1, 2, \ldots$. Toutes les fonctions $\varphi_i$ appartiennent à l'émission $\mathscr{E}(F_1, Z_1)$, qui est un ensemble compact (théorème II), donc il existe une suite partielle $\varphi_{i(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$ convergente uniformément dans l'intervalle $\langle a, \beta\rangle$ vers une fonction $\varphi \in \mathscr{E}(F_1, Z_1)$. Soit $m$ un entier positif quelconque. Pour les indices $j$ assez grands on a $i(j) \geqslant m$, donc $\varphi_{i(j)} \in \mathscr{E}(F_m, Z_m)$. L'ensemble $\mathscr{E}(F_m, Z_m)$ étant fermé, la fonction $\varphi$ lui appartient. Comme l'entier positif m est quelconque, on constate que $\varphi \in \bigcap_{m=1,2,\ldots} \mathscr{E}(F_m, Z_m) = \mathscr{E}(F, Z)$. En outre, $\varphi(t) = x$, donc $(t, x) \in e(F, Z)$. Le point $(t, x) \in \bigcap_{i=1,2,\ldots} e(F_i, Z_i)$ étant quelconque, l'inclusion $e(F, Z) \subset \bigcap_{i=1,2,\ldots} e(F_i, Z_i)$ est vérifiée, ce qui achève la démonstration.

Les deux théorèmes suivants s'obtiennent facilement des deux précédents:

**Théorème VIII.** Si $F \in \mathcal{G}_{\langle a,\beta\rangle}$ et $\{\xi_i\}_{\tau_i} \in [\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$, $i = 1, 2, \ldots$ est une suite de fonctions initiales convergente vers une fonction $\{\xi\}_\tau \in [\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un entier positif $N$ tel que pour les indices $i \geqslant N$ les émissions $\mathcal{E}(F, \xi_i, \tau_i)$ sont, dans l'espace fonctionnel $\Phi_{\langle a,\beta\rangle}$, contenues dans l'entourage de rayon $\varepsilon$ de l'émission $\mathcal{E}(F, \xi, \tau)$.

**Théorème IX.** Sous les hypothèses du théorème VIII il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un entier positif $N$ tel que pour les indices $i \geqslant N$ les zones d'émission $e(F, \xi_i, \tau_i)$ sont, dans l'espace cartésien $X_{1+n}$, contenues dans l'entourage de rayon $\varepsilon$ de la zone d'émission $e(F, \xi, \tau)$.

## 5. Quelques exemples

Au chapitre 2 il a été démontré que l'émisison $\mathcal{E}(F, Z)$ d'un ensemble $Z$ borné et fermé dans l'espace $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$, où $T \leqslant \beta \leqslant b$, est un ensemble borné et fermé dans l'espace $\Phi_{\langle a,\beta\rangle}$. Quant à la zone d'émission, j'y avais admis une hypothèse beaucoup plus forte, notamment celle que l'ensemble $Z$ soit compact dans l'espace $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$, afin d'obtenir la conclusion analogue, c'est-à-dire que la zone d'émission soit bornée et fermée dans l'espace cartésien $X_{1+n}$. Pareillement, le théorème VII qui ressemble bien au théorème VI exigeait, pourtant, des hypothèses relativement plus fortes. Les deux exemples qui vont suivre [1] montrent bien qu'un tel renforcement des hypothèses n'est pas imposé par la méthode de démonstration, mais dépend des propriétés essentielles des espaces topologiques intervenant dans les énoncés des théorèmes en question.

**Exemple 1.** Envisageons, comme un cas particulier de (1.1), l'équation différentielle ordinaire

$$dx/dt = 0, \qquad 1 \leqslant t \leqslant 2,$$

où $x \in X_1$ (dans ce cas $F = 0$, $T = 1$ et $\beta = 2$) et soit $\xi_i(t) = \sin 2^i \pi t + 1/i$, pour $i = 1, 2, \ldots$ dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$. On constate sans peine que, pour $i \neq j$, $\sup|\xi_i(t) - \xi_j(t)| > 1$ dans cet intervalle. Donc il n'existe aucune suite partielle de la suite de fonctions $\{\xi_i(t)\}_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ qui soit convergente uniformément dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$. Mais cela signifie, à cause du lemme 2, [1], que l'ensemble Z formé de ces fonctions, envisagées comme des éléments de l'espace $[\Phi]'_{\langle 0,1\rangle}$ (cf. 1, p. ), n'admet pas de points d'accumulation (par rapport à la métrique dans ce dernier espace), et, par conséquent, l'ensemble $Z$ est fermé. Evidemment il est aussi borné. Cependant la zone d'émission $e(F, Z)$ n'est plus fermée, puisque sa portion contenue dans le demi-plan $t \geqslant 1$ se compose d'une infinité dénombrable de segments: $1 \leqslant t \leqslant 2$, $x = 1/i$, $i = 1, 2, \ldots$, qui s'accumulent sur

[1] Je les dois à A. Bielecki, qui a bien voulu me permettre de les utiliser ici.

le segment: $x = 0$, $1 \leqslant t \leqslant 2$, dont aucun point n'appartient à la zone d'émission. Ainsi, l'hypothèse que l'ensemble initial $Z$ soit un compact dans $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ ne peut être remplacée dans le théorème IV par la condition plus faible figurant dans l'énoncé du théorème I.

**Exemple 2.** Le théorème VII concerne une suite d'équations au paratingent à argument retardé. Admettons, en particulier, que toutes ces équations soient identiques à l'équation envisagée dans l'exemple 1; donc $F_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$. Admettons maintenant que, dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$, $\xi_i(t) = \sin 2^i \pi t$ pour $i = 1, 2, \ldots$ et $\xi_0(t) \equiv 1$. En outre, désignons par $Z_i$ pour $i = 1, 2, \ldots$ le sous-ensemble de l'espace $[\Phi]'_{\langle 0,1\rangle}$ formé des fonctions $\{\xi_j(t)\}_{0\leqslant t\leqslant 1}$ où $j = 0, i, i+1, \ldots$, et par $Z_0$ l'ensemble produit $\bigcap_{i=1,2,\ldots} Z_i$ ne contenant qu'une seule fonction $\xi_0$. On constate comme auparavant, que les ensembles $Z_i$ sont bornés et fermés dans $[\Phi]'_{\langle 0,1\rangle}$. D'autre part, leurs zones d'émission contiennent, pour tout $i = 1, 2, \ldots$, le segment $1 \leqslant t \leqslant 2$, $x = 0$ sur l'axe des t, et il en est de même du produit des zones d'émission $\bigcap_{i=1,2,\ldots} e(F_i, Z_i)$, tandis que la zone d'émission $e(F, Z_0)$ se réduit au segment: $0 \leqslant t \leqslant 2$, $x = 1$ (disjoint avec l'axe des $t$).

Ainsi nous voyons que l'hypothèse du théorème VI serait trop faible pour en obtenir la conclusion du théorème VII.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] Krzyżowa, B., Equations au paratingent à argument retardé, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 17, 1, (1963), p. 7-18.

## Streszczenie

W pracy tej badam własności całek równania paratyngensowego z opóźniającym się argumentem traktowanych bądź jako zbiory punktów przestrzeni kartezjańskiej (strefa emisji), bądź jako podzbiory pewnej przestrzeni funkcyjnej (emisja).

## Резюме

В этой работе занимаемся свойствами решений паратингентных уравнений с запаздывающим аргументом. Эти решения рассмотрены, как множества точек декартового пространства (стрефа эмиссии) или как подмножества некоторого функционального пространства (эмиссия).