ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA

VOL. XVII, 1 SECTIO A 1963

Z Zespołowej Katedry Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

BARBARA KRZYŻOWA

Equations au paratingent à argument retardé

Równania paratyngensowe z opóźniającym się argumentem

Паратентные урабнения с запаздывающим аргументом

1. Introduction

En 1935 S. K. Zaremba a publié un travail [9] consacré à une généralisation de la notion d'un système d'équations différentielles ordinaires dite équation au paratingent. Il s'agissait d'un type d'inégalités différentielles ordinaires ou les dérivées ou nombres de Dini étaient remplacés par le paratingent d'une courbe intégrale. (Une généralisation semblable basée sur la notion de contingent est due à A. Marchaud, [8]). Récemment, A. Bielecki [1], [2], [3] a ajouté de nombreux nouveaux résultats à la théorie en question, et c'est lui qui m'a encouragé aux recherches qui seront le sujet de cet article et de deux autres travaux qui vont suivre.

Dans les dernières dizaines d'années on a publié un grand nombre de travaux sur les équations différentielles ordinaires à argument retardé. Bien que l'on puisse déjà trouver certaines équations de ce genre dans les travaux du XVIII° siècle en rapport avec un problème d'Euler, les recherches plus systématiques dans ce domaine ne datent que du commencement du XX° siècle (travaux de E. Schmidt, F. Schürer, E. Hilb et d'autres). Le fait que, récemment, l'intérêt pour ces équations a considérablement augmenté, est sans doute étroitement lié au progrès de l'automatique, ou la théorie des équations à argument retardé a trouvé des applications importantes. Ici, je me pose le problème de réunir les deux généralisations d'équation différentielle ordinaire: équations à argument retardé et équations au paratingent en une seule plus vaste qui puisse englober toutes les deux. Cette idée m'a conduit à un type de conditions imposées aux fonctions vectorielles inconnues. Ces conditions nouvelles seront appelées ici équation au paratingent à argument retardé. Déjà dans la théorie des équations différentielles à argument retardé les conditions initiales dans le problème de Cauchy doivent être formulées d'une autre manière que dans le cas classique des équations différentielles sans retard. Ici, la situation sera bien analogue: au lieu d'être assujettie à la condition de passer par un point donné de l'espace, la courbe intégrale d'une équation au paratingent à argument retardé sera soumise à celle de contenir un certaine courbe initiale donnée d'avance.

Le but de cette note est de démontrer que le problème de Cauchy ainsi adapté admet des solutions sous des hypothéses assez générales, qui assurent en même temps l'existence des solutions en large. L'étude des propriétés fondamentales de ces solutions sera remise à un autre travail qui fera suite au présent.

Bien que la méthode de démonstration du théoréme sur l'existence des solutions soit assez semblable à celle que l'on applique dans la théorie des équations différentielles, je ne pourrai pas me passer de certains moyens spécifiques auxquels je vais consacrer les premiers chapitres. J'aurai l'occasion d'y utiliser quelques fragments de la théorie des équations au paratingent developpée par S. K. Zaremba et A. Bielecki, aussi bien que certaines idées contenues dans le travail [6].

2. Certains espaces fonctionnels

J'introduis des notions suivantes: X_n étant l'espace cartésien à n dimensions et $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ un quelconque de ses points, je pose $|x| = \big(\sum_{i=1,2,\ldots,n} (x^i)^2\big)^{1/2}$, $S(x, r) = \{y : y \in X_n, |x-y| < r\}$, $\bar{S}(x, r) = \overline{S(x, r)}$. Plus généralement $S(A, r)$ désignera l'ensemble des points dont les distances à $A \subset X_n$ sont inférieures à r et $\bar{S}(A, r) = \overline{S(A, r)}$ sa fermeture. Le symbole X_{1+n} désignera l'espace cartésien à $n+1$ dimensions dont les points seront notés: $(t, x) = (t, x^1, x^2, \ldots, x^n)$, (u, y) etc.

Je fixe deux intervalles $\langle a, T\rangle \subset \langle a, b)$, $b \leqslant \infty$, sur l'axe des t et je désigne par Φ l'espace des fonctions (vectorielles) $\varphi(t)$, définies et continues sur $\langle a, b)$ et prenant leurs valeurs dans l'espace X_n, la topologie dans Φ étant basée sur la convergence presque uniforme: $\varphi^i \to_{\Phi} \varphi$ si $\varphi^i \rightrightarrows \varphi$ dans tout intervalle $\langle a, \beta\rangle \subset \langle a, b)$. Je désignerai par $\|\varphi\|_t$ le maximum de $|\varphi(s)|$ dans $\langle a, t\rangle$, pour $t \in \langle a, b)$.

J'aurai aussi besoin d'envisager des espaces de fonctions φ localisées aux sous-intervalles fermés et bornés de l'intervalle $\langle a, b)$. Pour mettre en évidence que la fonction φ est envisagée dans l'intervalle $\langle a, \beta\rangle$ j'écrirai:

$\{\varphi(t)\}_{a\leqslant t\leqslant\beta}$ ou $\{\varphi\}_\beta$. Le symbole $\Phi_{\langle a,\beta\rangle}$ désignera l'espace de telles fonctions, la topologie étant basée sur la convergence uniforme des suites de fonctions. Indépendamment, j'introduirai l'espace $[\Phi]$ dont les éléments sont $\{\varphi(s)\}_{a\leqslant s\leqslant t}\epsilon\Phi_{\langle a,t\rangle}$, $t\epsilon\langle T,b)$, $\{\psi(s)\}_{a\leqslant s\leqslant u}\epsilon\Phi_{\langle a,u\rangle}$, $u\epsilon\langle T,b)$, etc. Cet espace sera métrisé en admettant que la distance de deux fonctions $\{\varphi\}_t$ et $\{\psi\}_u$ est la distance au sens de Hausdorff (cf. [5], p. 293) de leurs graphes dans X_{1+n}, qui s'écrira $[\{\varphi\}_t, \{\psi\}_u]$. Notons que la convergence induite par une telle norme est équivalente à celle qui a été utilisée avec succès dans [6]. Je vais aussi emprunter à ce travail un lemme maniable (cf. [6], p. 17), dont je ne ferai usage que sous la forme plus particulière suivante:

Lemme 1. Les fonctions appartenant à $Z\subset[\Phi]$ sont également continues si Z est un ensemble compact.

Fixons un $\beta\epsilon\langle T,b)$ et désignons par $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ le sous-espace de l'espace métrique $[\Phi]$ composé des fonctions $\{\varphi\}_t$, $\{\psi\}_u$, $t\epsilon\langle T,\beta\rangle$, $u\epsilon\langle T,\beta\rangle,\ldots$ et par $[\Phi]'_{\langle a,\beta\rangle}$ — le sous-ensemble composé des fonctions $\{\varphi\}_\beta$, $\{\psi\}_\beta,\ldots$ définies dans l'intervalle $\langle a,\beta\rangle$ tout entier. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de cette définition:

Lemme 2. La convergence d'une suite d'éléments $\{\varphi_i\}_\beta$ de l'espace $[\Phi]'_{\langle a,\beta\rangle}$ est équivalente à la convergence uniforme des suites de fonctions dans l'intervalle $\langle a,\beta\rangle$.

3. Paratingent d'une fonction

Soit $\{\varphi_i\}$ une fonction vectorielle, à valeurs dans X_n, définie dans un intervalle I, et t un nombre fixé dans cet intervalle, et soient τ_i, σ_i, $i=1,2,\ldots$ deux suites de nombres appartenant à I, dont chacune converge vers t. Si $\tau_i\neq\sigma_i$, on peut mener par les points $(\tau_i,\varphi(\tau_i))$ et $(\sigma_i, \varphi(\sigma_i))$ une droite l_i, bien déterminée, dont l'équation vectorielle est de la forme: $\xi=\varphi(\tau_i)+\lambda_i s$, ou $\lambda_i=[\varphi(\sigma_i)-\varphi(\tau_i)]/(\sigma_i-\tau_i)$. Il peut arriver qu'il existe un vecteur limite $\lim\limits_{i\to\infty}\lambda_i=\lambda$ dépendant, bien entendu, du choix des suites τ_i et σ_i. L'ensemble de tous les vecteurs limites possibles, ainsi obtenus, sera appelé ici paratingent de la fonction φ au point t [1] et noté: $\mathrm{Pt}\varphi(t)$, tandis que $\mathrm{pt}\varphi(t)$ désignera un élément quelconque λ de cet ensemble. En ajoutant à cette construction la restriction que τ_i, $\sigma_i>t$ (resp. τ_i, $\sigma_i<t$) on parvient d'une manière analogue à la définition du paratingent unilatéral à droite $\mathrm{Pt}^+\varphi(t)$ (resp. à gauche, $\mathrm{Pt}^-\varphi(t)$), les symboles $\mathrm{pt}^+\varphi(t)$, $\mathrm{pt}^-\varphi(t)$ ayant un sens évident.

[1] Selon la définition usuelle, le terme paratingent correspond à l'ensemble des droites $l=\lim\limits_{i\to\infty} l_i$.

4. Trois lemmes sur les fonctions de classe Φ

J'admets que $M(t)$ et $N(t)$ sont des fonctions réelles et positives, continues et non décriossantes, définies dans l'intervalle $\langle T, b)$. Soit τ un point fixé dans cet intervalle.

Lemme 3. Si $\varphi \in \Phi$, $r > 0$ et

$$\mathrm{Pt}\varphi(t) \subset \bar{S}(\mathrm{O}, M(t)+N(t)\|\varphi\|_t+r) \tag{4,1}$$

pour $t \in \langle \tau, b)$, alors

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)| \leqslant \int_t^{t+h} [M(u)+N(u)\|\varphi\|_u+r]du \tag{4,2}$$

pour $t \in \langle \tau, b)$ et $h>0$.

En effet, fixons un $t \in \langle \tau, b)$. Il suffit de prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour chaque $h > 0$ tel que $t+h \in \langle \tau, b)$, on a

(4,3)

$$R(h) = |\varphi(t+h)-\varphi(t)| < Q(h) = \int_t^{t+h} [M(u)+N(u)\|\varphi\|_u+r]du+2\varepsilon(h+1)$$

Supposons donc qu'il n'en soit pas ainsi pour un certain $\varepsilon > 0$ et soit h_0 la borne inférieure des h tels que $R(h) \geqslant Q(h)$. Comme, évidemment, $R(0) = 0 < Q(0)$, le nombre h_0 doit être positif. Dans le cas $|\varphi(t+h_0)-\varphi(t)| > Q(h_0)$, il existerait un $h' \in (0, h_0)$ tel que $|\varphi(t+h')-\varphi(t)| = Q(h')$, contrairement à la définition du nombre h_0. Donc

$$R(h_0) = |\varphi(t+h_0)-\varphi(t)| = Q(h_0). \tag{4,4}$$

Prenons une suite croissante $h_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots$, convergente vers h_0. Comme $R(h_i) < Q(h_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, on tire de (4,4) les inégalités:

$$\left|\frac{\varphi(t+h_0)-\varphi(t+h_i)}{h_0-h_i}\right| \geqslant \frac{|\varphi(t+h_0)-\varphi(t)|}{h_0-h_i} - \frac{|\varphi(t+h_i)-\varphi(t)|}{h_0-h_i} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{h_0-h_i}[Q(h_0)-Q(h_i)] = \frac{1}{h_0-h_i}\int_{t+h_i}^{t+h_0} [M(u)+N(u)\|\varphi\|_u+r]du+2\varepsilon =$$

$$= M(s)+N(s)\|\varphi\|_s+r+2\varepsilon,$$

ou $s \in \langle t+h_i, t+h_0\rangle$. Donc, à partir d'un certain indice i, on aura:

$$\left|\frac{\varphi(t+h_0)-\varphi(t+h_i)}{h_0-h_i}\right| > M(t+h_0)+N(t+h_0)\|\varphi\|_{t+h_0}+r+\varepsilon.$$

Mais cela est impossible, puisque $|\mathrm{pt}\varphi(t+h_0)| \leqslant M(t+h_0)+N(t+h_0)\|\cdot\|\varphi\|_{t+h_0}+r$ en vertu de l'hypothèse (4,1); nous voyons donc que l'inégalité (4,3) doit être remplie pour tout $t \in \langle\tau, b)$ et pour tout $h > 0$, ce qui achève la démonstration.

Lemme 4. Toute fonction $\varphi \in \Phi$ remplissant la condition (4,1) dans l'intervalle $\langle\tau, b)$ et l'inégalité $\|\varphi\|_\tau \leqslant C$, où $C = \text{const} > 0$, satisfait à l'inégalité

(4,5) $$\|\varphi\|_t \leqslant (C+1)\Lambda_r(t) \text{ pour } t \in \langle T, b),$$

où

$$\Lambda_r(t) = \exp \int_T^t [M(u)+N(u)+r]du.$$

En effet, soit $K_r(u) = M(u)+N(u)+r$. En vertu de la relation (4,2), lemme 3, on a

$$\|\varphi\|_t+1 \leqslant \|\varphi\|_\tau+1+\int_\tau^t [M(u)+N(u)\|\varphi\|_u]+rdu+1 \leqslant$$

$$\leqslant C+1+\int_\tau^t K_r(u)(\|\varphi\|_u+1)du = V(t) \text{ pour } t \in \langle\tau, b),$$

d'où $V'(t) = K_r(t)(\|(\|\varphi\|_t+1) \leqslant K_r(t)V(t)$. Donc

$$\|\varphi\|_t \leqslant V(t) \leqslant (C+1)\exp\int_T^t K_r(u)du \text{ pour } t \in \langle\tau, b).$$

En posant $\wedge_r(t) = \exp \int_T^t K_r(u)du$ pour $t \in \langle T, b)$ $(\wedge_r(t) \geqslant 1)$, on en obtient l'inégalité (4,5), ce qui achève la démonstration.

Lemme 5. Sous les hypothèses du lemme 4, la fonction φ satisfait localement à la condition de Lipschitz:

(4,6) $$|\varphi(t)-\varphi(t')| \leqslant (C+1)L_r(t)(t-t'), \quad \tau \leqslant t \leqslant t' < b,$$

où

(4,7) $$L_r(t) = K_r(t)\Lambda_r(t)$$

la fonction $L_r(t)$ est positive, continue et non décroissante dans l'intervalle $\langle T, b)$.

La démonstration est immédiate vu les formules (4,2) et (4,5).

5. Ensembles $A_{\langle a,\beta\rangle}$ et $[A]_{\langle a,\beta\rangle}$

Fixons un $\beta \in \langle T, b)$ et une fonction $\{\xi\}_\tau \in \Phi_{\langle a,\beta\rangle}$ pour laquelle $\|\xi\|_\tau \leqslant C$ et désignons par $A_{\langle a,\beta\rangle}$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \Phi_{\langle a,\beta\rangle}$ telles que

$$\varphi(t) = \xi(t) \qquad \text{pour } t \in \langle a, \tau\rangle$$

(5,1) $$\|\varphi\|_t \leqslant (C+1)\Lambda_1(\beta) \qquad \text{pour } t \in \langle T, \beta\rangle$$

$$|\varphi(t)-\varphi(t')| \leqslant (C+1)L_1(\beta)|t-t'| \qquad \text{pour } t, t' \in \langle\tau, \beta\rangle$$

On constate facilement que l'ensemble ainsi défini est un compacte. Remarquons que dans l'espace métrique $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ on peut envisager un ensemble $[A]_{\langle a,\beta\rangle}$ formé des fonctions $\{\varphi\}_s \epsilon A_{\langle a,s\rangle}$, $s \epsilon \langle \tau, \beta\rangle$, $\{\psi\}_u \epsilon A_{\langle a,u\rangle}$, $u \epsilon \langle \tau, \beta\rangle$, etc.

Lemme 6. Tout ensemble $[A]_{\langle a,\beta\rangle}$ considéré comme sous-ensemble de l'espace $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ est compact.

Soit $\{\varphi_i\}_{t_i}$, $i = 1, 2, \ldots$ une suite quelconque formée de fonctions appartenant à $[A]_{\langle a,\beta\rangle}$. En posant $\psi_i(t) = \varphi_i(t)$ pour $t \epsilon \langle a, t_i\rangle$ et $\psi_i(t) = \varphi_i(t_i)$ pour $t \epsilon (t_i, \beta\rangle$, nous obtenons une suite $\{\psi_i\}_\beta$ d'éléments de l'ensemble $A_{\langle a,\beta\rangle}$. Il existe une suite d'indices $i(j)$, $j = 1, 2, \ldots$, une fonction $\{\psi_0\}_\beta \epsilon A_{\langle a,\beta\rangle}$ et un nombre $t_0 \epsilon \langle \tau, \beta\rangle$ tels que $\psi_{i(j)} \overrightarrow{\rightarrow} \psi_0$ dans l'intervalle $\langle a, \beta\rangle$ et $t_{i(j)} \to t_0$, $j \to \infty$. Il est facile de voir que la suite $\{\varphi_{i(j)}\} t_{i(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$, est convergente dans l'espace $[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ vers la fonction $\{\psi_0\}_{t_0} \epsilon [A]_{\langle a,\beta\rangle}$ et cela prouve que l'ensemble $[A]_{\langle a,\beta\rangle}$ est compact.

6. Quelques propriétés des ensembles convexes

J'aurai besoin de quelques notions et théorèmes que l'on peut trouver dans les travaux [1], [9]. Je vais les rappeler ici pour ne pas gêner le lecteur.

J'admets que $\mathscr{P}$ est un espace métrique formé de tous les sous-ensembles non vides, bornés, fermés et convexes de l'espace X_n, la distance $\operatorname{dist}(P_1, P_2)$ de deux ensembles P_1 et P_2 étant comprise au sens de Hausdorff. Je dirai qu'un ensemble $P \epsilon \mathscr{P}$ est gras lorsqu'il a des points intérieurs. Tous les ensembles gras appartenant à $\mathscr{P}$ forment une famille d'ensembles $\mathscr{P}^* \subset \mathscr{P}$.

Il est facile de voir que le produit d'un nombre quelconque d'éléments de l'espace $\mathscr{P}$ appartient encore à $\mathscr{P}$, ce qui n'est pas vrai en général pour une somme d'ensembles. C'est pourquoi j'utiliserai la notion de somme convexe $\bigcup\limits_{i=1,2,\ldots}^{c} P_i$ des ensembles $P_1, P_2, \ldots \epsilon \mathscr{P}$; celle-ci sera entendue comme le plus petit ensemble convexe contenant tous ces ensembles donnés.

Soit $P_i \epsilon \mathscr{P}$, $\lambda_i \geqslant 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$, $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k > 0$; l'ensemble formé des centres de gravité $x = \sum\limits_{i=1,2,\ldots,k} \frac{\lambda_i x_i}{\Lambda}$ pour tous les systèmes de points $x_i \epsilon P_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, sera appelé agregat des ensembles P_i et noté $\operatorname{Agr}(P_i; \lambda_i; i = 1, 2, \ldots, k)$. L'agregat d'un nombre fini d'éléments de l'espace $\mathscr{P}$ est encore son élément. En outre on a

$$\bigcap_{i=1,2,\ldots,k} P_i \subset \operatorname{Agr}(P_i; \lambda_i; i = 1, 2, \ldots, k) \subset \bigcup_{i=1,2,\ldots,k}^{c} P_i.$$

Si $P_1, P_2 \in \mathscr{P}$ et $\varepsilon > 0$, l'inclusion $\bar{S}(P_1, \varepsilon) \subset \bar{S}(P_2, \varepsilon)$ entraîne $P_1 \subset P_2$. La notation $P_1 \subset_i P_2$ signifiera que l'ensemble $P_1 \in \mathscr{P}$ est contenu dans l'intérieur de l'ensemble $P_2 \in \mathscr{P}$.

7. Quelques classes de fonctions

Dans la suite et aussi dans les travaux suivants, j'aurai à envisager certains types de fonctions dont les valeurs sont certains ensembles convexes et à profiter de leurs simples propriétés, dont la plupart sont analogues aux propriétés fondamentales des fonctions dites champs de pinceaux, traités dans [1]. Pour ne pas répéter les raisonnements, j'énoncerai les propriétés relatives aux divers cas particuliers des fonctions en question sous une forme abstraîte.

Soit D un espace métrique quelconque et $|\zeta, \zeta'|$ la distance de deux points dans cet espace. J'admets que $\mathfrak{p}(\zeta)$ désigne une fonction définie dans tout l'espace D et prenant ses valeurs dans l'espace $\mathscr{P}$ (formé des ensembles non vides, bornés, fermés et convexes contenus dans l'espace à n dimensions X_n) et je suppose que cette fonction est semi-continue supérieurement par rapport à l'inclusion; cela veut dire que pour tout $\zeta \in D$ et $\varepsilon > 0$ on peut trouver un $\delta > 0$ tel que l'on ait toujours $\mathfrak{p}(\eta) \subset \subset S(\mathfrak{p}(\zeta), \varepsilon)$ lorsque $\eta \in D$ et $|\zeta, \eta| < \delta$. La classe formée de telles fonctions sera désignée par $\mathfrak{P}$.

Parmi les fonctions de la classe $\mathfrak{P}$ il faudra encore distinguer certaines fonctions plus régulières formant une classe moins étendue $\mathfrak{P}^* \subset \mathfrak{P}$, à savoir les fonctions continues, à valeurs grasses, c'est-à-dire les fonctions $\mathfrak{P}(\zeta)$ satisfaisant aux conditions suivantes: toute valeur de la fonction $\mathfrak{P}(\zeta)$ est un ensemble borné, fermé, convexe, ayant des points intérieurs, contenu dans X_n et pour tout $\zeta \in D$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $\operatorname{dist}(\mathfrak{p}(\zeta), \mathfrak{p}(\eta)) < \varepsilon$ si $\eta \in D$ et $|\zeta, \eta| < \delta$. Evidemment si les valeurs d'une fonction $\mathfrak{p}(\zeta) \in \mathfrak{P}$ se réduisent à de simples points de l'espace X_n la fonction $\mathfrak{p}(\zeta)$ est continue. La fonction $\mathfrak{p}(\zeta) \in \mathfrak{P}$ sera dite bornée si $\mathfrak{p}(\zeta) \subset P_0$ pour tout $\zeta \in D$, où P_0 est un élément fixé de l'espace $\mathscr{P}$.

Si la fonction $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ (resp. $\mathfrak{P}^*$) et si $\varepsilon(\zeta)$ est une fonction réelle, positive et continue dans l'espace D, la fonction $\bar{S}(\mathfrak{p}(\zeta), \varepsilon(\zeta)) \in \mathfrak{P}$ (resp. $\mathfrak{P}^*$).

Le produit $\bigcap_{i=1,2,\dots} \mathfrak{p}_i(\zeta)$ des fonctions $\mathfrak{p}_i(\zeta) \in \mathfrak{P}$ est une fonction de la classe $\mathfrak{P}$. L'agregat $\operatorname{Agr}(\mathfrak{p}_i(\zeta); \lambda_i(\zeta); i = 1, 2, \dots, k)$ appartient à $\mathfrak{P}$ si pour $i = 1, 2, \dots, k$ $\mathfrak{p}i(\zeta) \in \mathfrak{p}$ et $\lambda_i(\zeta)$ est une fonction à valeurs réelles, positives définie et continue dans D et satisfaisant à la condition $\sum_i \lambda_i(\zeta) > 0$. L'enveloppe convexe $\bigcup_i^c \mathfrak{p}_i(\zeta)$ d'un nombre fini de fonctions $\mathfrak{p}_i \in \mathfrak{P}$ appartient encore à $\mathfrak{P}$. Si $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}^*$, le centre de gravité de l'ensemble $\mathfrak{p}(\zeta)$ est une fonction continue dans l'espace D.

Si $\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}^*\in\mathfrak{P}^*$ et si l'on a $\mathfrak{p}(\zeta)\subset_i\mathfrak{p}^*(\zeta)$ pour tous les points ζ appartenant à un sous-ensemble compact A de l'espace D, alors il existe un nombre $\eta>0$ tel que $\overline{S}(\mathfrak{p}(\zeta),\eta)\subset_i\mathfrak{p}^*(\zeta)$ pour $\zeta\in A$.

L'ensemble $B\subset D$ étant supposé borné et fermé, l'ensemble

$$\bigcup_{\zeta\in B}^{c}\mathfrak{p}(\zeta)\in\mathscr{P} \text{ si } \mathfrak{p}\in\mathfrak{P} \text{ et } \bigcup_{\zeta\in B}^{c}\mathfrak{p}(\zeta)\in\mathscr{P}^* \text{ si } \mathfrak{p}(\zeta)\in\mathfrak{P}^*.$$

Les démonstrations de ces propriétés étant faciles et semblables à à celles qui se rapportent aux propriétés des champs de pinceaux discutées en détail dans [1], il est inutile de les reproduire ici.

Je passe maintenant à des cas particuliers.

D'abord, en substituant l'intervalle $\langle a,b)$ au lieu de l'espace D, j'obtiens la classe $\mathfrak{f}$ des fonctions $f(t)$ à valeurs dans $\mathscr{P}$, définies pour $t\in\langle a,b)$ et semi-continues par rapport à l'inclusion, aussi bien que la sous-classe $\mathfrak{f}^*$ formée des fonctions continues, à valeurs grasses. Evidemment, les propriétés générales des fonctions des types $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}^*$ subsistent dans ce cas particulier.

On peut aussi identifier l'espace D à l'espace fonctionnelle $[\Phi]$, qui a été introduit au chapitre 2. On parvient ainsi à deux nouvelles classes $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}^*$, dont la première est formée des fonctions semi-continues supérieurement par rapport à l'inclusion, et l'autre comprend les fonctions continues au sens de la métrique de Hausdorff. Dans ce cas il sera commode de renoncer à la notation usuelle d'une fonction. Notamment je désignerai la fonction de la classe $\mathscr{F}$ par $F\{\varphi\}_t$, $t\in\langle T,b)$ pour mettre en évidence le fait qu'il s'agit ici d'une fonction dont les valeurs dépendent de l'allure de la fonction φ jouant le rôle d'argument dans l'intervalle $\langle a,t\rangle$ tout entier.

Les symboles $\mathscr{F}_{\langle a,\beta\rangle}$ et $\mathscr{F}^*_{\langle a,\beta\rangle}$ désigneront les ensembles de fonctions définies d'une façon analogue, mais localisées à l'ensemble $D=$ $=[\Phi]_{\langle a,\beta\rangle}$ où $\beta\in\langle T,b)$.

Enfin, je vais encore rétrécir un peu les classes des fonctions qui viennent d'être définies en y ajoutant la condition supplémentaire que voici:

$$F\{\varphi\}_t\subset\overline{S}(0,\,M(t)+N(t)\,\|\varphi\|_t) \tag{7,1}$$

Ces nouvelles classes de fonctions seront notées $\mathscr{G}$, $\mathscr{G}^*$, $\mathscr{G}_{\langle a,\beta\rangle}$, $\mathscr{G}^*_{\langle a,\beta\rangle}$.

8. Notion d'équation au paratingent à argument retardé

Soit $F\in\mathscr{F}$, $T\leqslant\tau<b$. La condition

$$\mathrm{Pt}\varphi(t)\subset F\{\varphi(s)\}_{a<s<t},\ t\in\langle\tau,b) \tag{8,1}$$

imposée à une fonction vectorielle $\varphi\in\Phi$ sera appelée équation au paratingent à argument retardé. Chaque fonction $\{\varphi(t)\}_{a<t\leqslant\beta}$, $\tau\leqslant\beta<b$ satis-

faisant à cette condition dans l'intervalle $\langle\tau, \beta\rangle$ sera appelée solution locale ou intégrale locale de l'équation (8,1). On appelera solution en large une fonction $\varphi(t)$ satisfaisant à l'équation (8,1) dans l'intervalle $\langle a, b)$ tout entier. Il est clair que dans le cas particulier où pour chaque valeur de t l'ensemble $F\{\varphi(s)\}_{a\leqslant s\leqslant t}$ ne contient qu'un seul point de l'espace X_n, l'équation (8,1) se réduit à un système d'équations différentielles ordinaires à argument retardé de la même forme que dans la monographie [7]. D'autre part, si $F\{\varphi\}_t = P(t, \varphi(t))$ où $P(t, x)$ est une fonction définie dans l'espace X_{1+n}, prenant ses valeurs dans l'espace $\mathscr{P}$, l'équation (8,1) se réduit à l'équation au paratingent (cf. [1], [2], [3], [9]).

Le problème généralisé de Cauchy pour l'équation (8,1) consistera dans la recherche d'une fonction $\varphi\epsilon\Phi$ qui devra satisfaire à l'équation (8,1) et à la condition initiale

$$\varphi(t) = \xi(t) \quad \text{pour } t\epsilon\langle a, \tau\rangle \tag{8,2}$$

où la fonction $\{\xi\}_\tau\epsilon[\Phi]$, dite initiale, est donnée d'avance. Dans la suite on verra que le problème de Cauchy ainsi énoncé admet toujours une solution locale, c'est-à-dire une solution $\varphi(t)$ définie dans un intervalle $\langle a, \beta\rangle \subset \langle a, b)$ où $\beta\epsilon\langle\tau, b)$ est suffisamment proche de τ. En outre, la fonction F étant bornée ou, plus généralement, appartenant à la classe $\mathscr{G}$, chaque solution du problème peut être prolongée sur l'intervalle $\langle a, b)$ tout entier, donc, il existe des solutions en large.

9. Encore quelques lemmes

Lemme 7. Si $F\epsilon\mathscr{F}$ et si la suite de fonctions $\varphi_i(t)\epsilon\Phi$, $i = 1, 2, \ldots$ converge dans l'intervalle $\langle a, b)$ presque uniformément vers une fonction $\varphi(t)\epsilon\Phi$, alors pour tout $t_0\epsilon\langle T, b)$ et $\varepsilon > 0$ il existe un entier positif N tel que

$$F\{\varphi_i\}_t \subset \overline{S}(F\{\varphi\}_t, \varepsilon) \text{ pou } i \geqslant N.$$

La démonstration est immédiate, puisque la fonction F est semi-continue supérieurement par rapport à l'inclusion.

Lemme 8. Si la suite des fonctions $\varphi_i(t)\epsilon\Phi$, $i = 1, 2, \ldots$ converge dans l'intervalle $\langle a, b)$ presque uniformément vers une fonction $\varphi(t)\epsilon\Phi$ et si l'on a pour $i = 1, 2, \ldots$

$$\varphi_i(t) = \xi(t) \quad \text{pour } t\epsilon\langle a, \tau\rangle$$
$$\mathrm{Pt}\varphi_i(t) \subset f(t) \quad \text{pour } t\epsilon\langle\tau, b)$$

où $\{\xi\}_\tau\epsilon\Phi$ et $f(t)\epsilon\mathfrak{f}$, alors la fonction $\varphi(t)$ satisfait aux mêmes conditions, c'est-à-dire

$$\varphi(t) = \xi(t) \quad \text{pour } t\epsilon\langle a, \tau\rangle$$
$$\mathrm{Pt}\varphi(t) \subset f(t) \quad \text{pour } t\epsilon\langle\tau, b).$$

Il est immédiat que la fonction φ remplit la première de ces conditions. Quant à la seconde, il suffit d'en appeler à un lemme intervenant dans la théorie des équations au paratingent, dû à A. Bielecki, à savoir [2], p. 44. Du lemme 6, p. 61 dans le travail [1] on tire le lemme suivant:

Lemme 9. Si $\varphi(t)\in\Phi$ est une fonction telle que

$$\mathrm{Pt}\varphi(t)\subset P_0 \text{ pour } t\in\langle a_1, a_2\rangle\subset\langle T, b)$$

où $P_0\in\mathscr{P}$ est un ensemble fixé, alors chaque vecteur $v=\dfrac{\varphi(s_1)-\varphi(s_2)}{s_1-s_2}$ où $s_1, s_2\in\langle a_1, a_2\rangle$, $s_1\neq s_2$ appartient à l'ensemble P_0.

10. Une équation auxiliaire

Supposons que $F\in\mathscr{G}$ et $\{\xi\}_\tau\in[\Phi]$ et considérons l'équation au paratingent à argument retardé

$$\mathrm{Pt}\varphi(t)\subset F\{\varphi(s-2\eta)\}_{a\leqslant s\leqslant t} \quad \text{pour} \quad t\in\langle\tau, \beta\rangle \tag{10,1}$$

où $\eta\in(0,1\rangle$ et $\beta\in\langle\tau, b)$, avec la condition initiale

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \xi(t) \quad &\text{pour} \quad t\in\langle a, \tau\rangle \\ \varphi(t) &= \xi(a) \quad &\text{pour} \quad t\in\langle a-2, a\rangle. \end{aligned} \tag{10,2}$$

La fonction $\psi(s)=\varphi(s-2\eta)$ étant déjà bien définie par (10,2) dans l'intervalle $\langle a, \tau+2\eta\rangle$, le second membre de (10,1) ne dépend plus dans l'intervalle $\langle\tau, \tau+2\eta\rangle$ que de la variable t et peut être considéré comme une fonction de la classe $\mathfrak{f}$. Donc, en posant $f(t)=F\{\varphi(s-2\eta)\}_{a\leqslant s\leqslant t}$ pour $t\in\langle\tau, \tau+2\eta\rangle$, l'équation (10,1) se réduit dans l'intervalle $\langle\tau, \tau+2\eta\rangle$ à l'équation au paratingent sans retard

$$\mathrm{Pt}\varphi(t)\subset f(t) \tag{10,3}$$

et on peut déjà appliquer les résultats des travaux [1], [9]. La fonction $f(t)$ est bornée dans l'intervalle $\langle\tau, \tau+2\eta\rangle$, car $f(t)=F\{\varphi(s-2\eta)\}_{a\leqslant s\leqslant t}$ $=F\{\xi(s-2\eta)\}_{a\leqslant s\leqslant t}\subset\bar{S}\big(0, M(\beta)+N(\beta)(\|\xi\|_\tau+1)\Lambda_0(\beta)\big)$, donc il existe (cf. [1], p. 62) dans l'intervalle $\langle\tau, \tau+\eta\rangle$ une solution de l'équation (10,3) issue du point $\big(\tau, \xi(\tau)\big)$. Mais, la fonction φ étant ainsi donnée dans l'intervalle $\langle a, \tau+\eta\rangle$, la fonction ψ est de même définie dans $\langle a, \tau+3\eta\rangle$. Il suffit de répéter le raisonnement précédent pour prolonger la solution φ sur l'intervalle $\langle a, \tau+2\eta\rangle$ et ce simple procédé nous conduira successivement dans un nombre fini d'étapes à la construction d'une solution d'équation (10,1) dans l'intervalle $\langle a, \beta\rangle$ tout entier.

11. Solution de l'équation au paratingent à argument retardé dans le cas général

Maintenant il est déjà possible de démontrer le théorème suivant:

Théorème. Si $F \in \mathcal{G}$ et $\{\xi\}_\tau \in [\Phi]$, il existe une solution $\varphi \in \Phi$ de l'équation (8,1) satisfaisant à la condition initiale (8,2).

En effet, fixons un $\beta \in \langle \tau, b)$ et soit, pour $i = 1, 2, \ldots$, $\varphi_i(t)$ une solution de l'équation auxiliaire

$$(11,1) \qquad \mathrm{Pt}\varphi_i(t) \subset F\{\varphi_i(s-2/i)\}_{a \leqslant s \leqslant t} \quad \text{pour} \quad t \in \langle \tau, \beta \rangle,$$

remplissant la condition initiale

$$(11,2) \qquad \begin{aligned} \varphi_i(t) &= \xi(t) \quad \text{pour} \quad t \in \langle a, \tau \rangle, \\ \varphi_i(t) &= \xi(a) \quad \text{pour} \quad t \in \langle a-2, a \rangle. \end{aligned}$$

En vertu de (7,1) on a $\mathrm{Pt}\varphi_i(t) \subset F\{\varphi_i(s-2/i)\}_{a \leqslant s \leqslant t} \subset \bar{S}(0, M(t) + N(t)\|\varphi_i\|_{t-2/i}) \subset \bar{S}(0, M(t)+N(t)\|\varphi_i\|_t)$ et, par conséquent, les fonctions $\{\varphi_i\}_\beta$, $i = 1, 2, \ldots$, appartiennent à l'ensemble compact $A_{\langle a,\beta \rangle} \subset \Phi_{\langle a,\beta \rangle}$ vu les définitions dans le chapitre 5 et le lemme 4, donc on peut en tirer une suite partielle $\varphi_{i(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$ uniformément convergente dans $\langle a, \beta \rangle$ vers une fonction continue $\varphi(t)$ remplissant la condition initiale (8,2). Je dis que la fonction $\{\varphi\}_\beta$ satisfait à l'équation (8,1). La suite $\psi_{i(j)}(t) = \varphi_{i(j)}(t - 2/i(j))$, $j = 1, 2, \ldots$ étant aussi uniformément convergente vers la fonction $\varphi(t)$ dans l'intervalle $\langle a, \beta \rangle$ il existe en vertu du lemme 7 pour tout $t \in \langle \tau, \beta \rangle$ et pour tout $\varepsilon > 0$ un N tel que $F\{\psi_{i(j)}\}_t \subset \bar{S}(F\{\varphi\}_t, \varepsilon)$ pour $j \geqslant N$. Mais la fonction $\varphi_{i(j)}$ est une solution de l'équation (11,1) donc la dernière inclusion entraine la suivante: $\mathrm{Pt}\varphi_{i(j)}(t) \subset \bar{S}(F\{\varphi\}_t, \varepsilon)$ pour $j \geqslant N$, et il s'ensuit du lemme 8 que l'on a $\mathrm{Pt}\varphi(t) \subset \bar{S}(F\{\varphi\}_t, \varepsilon)$ et par conséquent $\mathrm{Pt}\varphi(t) \subset F\{\varphi\}_t$ comme ε pouvait être aussi petit que l'on voulait. Cette dernière relation est juste en tout point t de l'intervalle $\langle \tau, \beta \rangle$, donc la fonction $\varphi(t)$ est une solution de l'équation (8,1) dans cet intervalle.

Pour achever la démonstration il suffit de rappeler que d'après le lemme 4 toutes les solutions locales possibles sont majorées également par la même fonction $(C+1)\Lambda_0(t)$ définie dans l'intervalle $\langle T, b)$ tout entier, ce qui assure la possibilité de prolonger chaque solution particulière sur tout l'intervalle $\langle a, b)$ moyennant la méthode usuelle dans la théorie des équations différentielles ordinaires, qui s'adapte ici de manière tout à fait évidente.

Dans cette démonstration j'ai utilisé l'élégante idée due à Tonelli (cf. p. ex. [4], p. 60) consistant à ajouter à l'argument t un retard additionnel $\frac{1}{i}$, ce qui revient à remplacer l'équation difficile (8,1) par les équations auxiliaires (10,1), où le problème de l'existence des solutions devient tout à fait trivial, le retour à l'équation primitive étant possible grâce au théorème fondamental d'Arzela sur les suites compactes de fonctions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bielecki, A., Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour l'unicité des solutions des systèmes d'équations différentielles ordinaires et des équations au paratingent, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 2, 2 (1948), p. 49-106.

[2] — Extension de la méthode du rétracte de T. Ważewski aux équations au paratingent, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 9,3 (1955), p. 37-61.

[3] — Certaines propriétés topologiques des solutions des équations au paratingent, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 9,4 (1955), p. 63-79.

[4] — Równania Różniczkowe Zwyczajne i Pewne ich Uogólnienia, Warszawa, 1961.

[5] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914.

[6] Kluczny, Cz., Sur certaines familles de courbes en relation avec la théorie des équations différentielles ordinaires I, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 15, 2 (1961), p. 13-40.

[7] Красовский, Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости дбижения, Москва 1959.

[8] Marchaud, A., Sur les champs continues de demi-cônes convexes et leurs intégrales, C. R. Acad. Sci., 199, Paris, 1934, 1278-1280.

[9] Zaremba, S. K. O Równaniach Paratyngensowych, Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego, 9 (1935), p. 1-22.

Streszczenie

Przemiotem pracy są równania paratyngensowe z opóźniającym się argumentem będące uogólnieniem zwykłych równań paratyngensowych i równań różniczkowych z opóźniającym się argumentem. Wykazuję tu, że odpowiednio sformułowane zadanie Cauchy'ego ma rozwiązanie przy dość ogólnych założeniach co do prawej strony równania.

Резюме

В этой работе занимаемся паратингентными уравнениями с запаздывающим аргументом, которые представляют обобщение обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и паратингентных уравнений.

Доказывается, что соответственно формулированная задача Коши имеет решение при довольно общих предположениях.