ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA

VOL. XVI, 12 SECTIO A 1962

Z Katedry Zespołowej Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

ТАТЬЯНА Г. ЭЗРОХИ

О некоторых классах p-листных функций

O pewnych klasach funkcji p-listnych

Sur certaines classes de fonctions p-valentes

I

З. Левандовский [2] рассматривал класс L однолистных в круге $|z|<1$ функций $f(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n$, для которых $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n|a_n|\leqslant 1$ и доказал для этого класса функций 7 из 10 теорем, доказанных А. Шильдом [4] для класса S_p функций $f(z)=z-\sum\limits_{n=2}^{N}a_nz^n$, $a_n\geqslant 0$, для которых $r=1$ является радиусом однолистности.

И. Гальперин [1] рассматривал классы L_p, R_p^0, Q_p', (p — целое, $\geqslant 1$) регулярных в круге $|z|<1$ функций, которые являются обобщением класса L. Для этих классов справедливы теоремы, доказанные З. Левандовским для класса L.

В настоящей заметке установлены теоремы вращения, а также даны оценки величин $\arg(f/z^p)$ для классов L_p, R_p^0, Q_p', а также для класса Q_p, который является обобщением класса Q_p'. Кроме того нами рассмотрены аналогичные классы функций в области $|z|>1$ и для них также установлены аналогичные теоремы.

Определения

1. Классом L_p называется класс регулярных в круге $|z|<1$ функций

$$f(z)=z^p+\sum_{n=2}^{\infty}a_{p+n-1}z^{p+n-1}, \tag{1}$$

для которых

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{p+n-1}{p} |a_{p+n-1}| \leqslant 1. \tag{2}$$

2. Классом L_p^* назовем класс регулярных в области $|z| > 1$ функций

$$f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{p+n-1}}{z^{p+n-1}}, \tag{3}$$

для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p+n-1}{p} |a_{p+n-1}| \leqslant 1. \tag{4}$$

3. Классом R_p^0 назовем класс регулярных в круге $|z| < 1$ функций (1), для которых

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{p+n-1}{p}\right)^2 |a_{p+n-1}| \leqslant 1. \tag{5}$$

4. Классом R_p^* назовем класс регулярных в области $|z| > 1$ функций (3), для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p+n-1}{p}\right)^2 |a_{p+n-1}| \leqslant 1. \tag{6}$$

5. Классом Q_p назовем класс регулярных в круге $|z| < 1$ функций

$$f(z) = z^p + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma} b_{p+n-1} z^{p+n-1}, \tag{7}$$

для которых

$$\Re e^{\gamma} \geqslant 0, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{p+n-1}{p}\right)^2 |b_{p+n-1}| \leqslant 1 \ (^1). \tag{8}$$

При $\gamma = p$ получаем класс функций Q_p' [3].

---

(1) Очевидно, что $F(z) = [\gamma f(z) + z f'(z)]/[p+\gamma]$, где $f(z) \in R_p^0$ (или соответственно $f(z) \in R_p^*$).

6. Классом Q_p^* назовем класс регулярных в области $|z| > 1$ функций

$$F(z) = z^p - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p+n-1-\gamma}{p+\gamma} \frac{b_{p+n-1}}{z^{p+n-1}}, \tag{9}$$

для которых

$$\Re\gamma \geqslant 0, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p+n-1}{p}\right)^2 |b_{p+n-1}| \leqslant 1 (^1). \tag{10}$$

И. Гальперин показал, что функции классов L_p, Q'_p p-листны и звёздны в круге $|z| < 1$, а функции класса R_p^0 p-листны и выпуклы в круге $|z| < 1$.

Теорема 1. *Каждая функция $f(z) \in L_p^*$ отображает $|z| > 1$ на область дополнение которой звёздно относительно точки $z = 0$.*

Доказательство. Мы имеем

$$\Re \frac{zf'}{f} = \Re \frac{p - \sum\limits_{n=1}^{\infty} (p+n-1) a_{p+n-1} z^{-2p-n+1}}{1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{p+n-1} z^{-2p-n+1}} =$$

$$= \Re \frac{\left[p - \sum\limits_{n=1}^{\infty} (p+n-1) a_{p+n-1} z^{p+n-1}\right] \left[\overline{1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{p+n-1} z^{-2p-n+1}}\right]}{\left|1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{p+n-1} z^{-2p-n+1}\right|^2}.$$

Очевидно, что

$$\Re\left[\left(p - \sum_{n=1}^{\infty} (p+n-1) \frac{a_{p+n-1}}{z^{p+n-1}}\right) \overline{\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{p+n-1}}{z^{p+n-1}}\right)}\right] \geqslant$$

$$\geqslant p - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \frac{|a_{p+n-1}|}{r^{2p+n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} (p+n-1) \frac{|a_{p+n-1}|}{r^{2p+n-1}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{p+n-1}|}{r^{2p+n-1}} =$$

$$= \left(p - \sum_{n=1}^{\infty} (p+n-1) \frac{|a_{p+n-1}|}{r^{2p+n-1}}\right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{p+n-1}|}{r^{2p+n-1}}\right) > 0$$

$$(0 \leqslant r < 1),$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается

Теорема 2. *Если $f(z) \in R_p^*$, то в области $|z| > 1$ функции выпуклы.*

Теорема 3. *Функции $F(z)\epsilon Q_p$ p-листны и звёздны в круге $|z|<1$.*

Доказательство. Мы имеем

$$\Re\frac{zF'}{F}=\Re\left[1+\frac{\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma}\,\frac{n-1}{p}\,b_{p+n-1}z^{n-1}}{1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma}\,b_{p+n-1}z^{n-1}}\right]\geqslant$$

$$\geqslant 1-\frac{\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma}\right|\frac{n-1}{p}\,|b_{p+n-1}|r^{n-1}}{1-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma}\right|\,|b_{p+n-1}|r^{n-1}}.$$

Так как

(11) $$\left|\frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma}\right|\leqslant\frac{p+n-1}{p}\ (^2),$$

то

$$\Re\frac{zF'}{F}\geqslant\frac{1-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{p+n-1}{p}\right)^2|b_{p+n-1}|r^{n-1}}{1-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}\,|b_{p+n-1}|r^{n-1}}>0.$$

Как и теорема 1, с тем лишь отличием, что нужно воспользоваться неравенством

$$\left|\frac{p+n-1-\gamma}{p+\gamma}\right|\leqslant\frac{p+n-1}{p},$$

доказывается следующая теорема:

Теорема 4. *Каждая функция $F(z)\epsilon Q_p^*$ отображает $|z|>1$ на область, дополнение которой звёздно относительно точки $z=0$.*

Для установления теорем вращения, а также других оценок, будем пользоваться следующей леммой [5]:

Если $a_n\geqslant 0$, $\gamma_n\geqslant 0$ $(n=1,2,\ldots)$, $0<\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\gamma_n<+\infty$, $q\leqslant\beta_n/\gamma_n\leqslant Q$

(²) Функция $\zeta=(A+\gamma)/(B+\gamma)$ $(A>0,\ B>0,\ A>B)$ отображает полуплоскость $Re^{\gamma}\geqslant 0$ на окружность симметричную относительно оси $0\,\xi$ $(\zeta=\xi+i\eta)$ и пересекающую ось в точках $\xi=1$, $\xi=A/B$. Отсюда следует, что $|(A+\gamma)/(B+\gamma)|<A/B$.

где q и Q некоторые постоянные, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\beta_n$ сходится, то

$$\inf\frac{\beta_n}{\gamma_n}\leqslant\frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n\beta_n}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n\gamma_n}\leqslant\sup\frac{\beta_n}{\gamma_n}.$$

Теорема 5. *Если $f(z)\in L_p$, то в круге $|z|<1$ имеют место оценки*

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\leqslant\arg\frac{f'}{z^{p-1}}\leqslant\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\ (^3). \tag{12}$$

Оценки точные, достигаются функциями

$$f(z)=z^p+\frac{p}{p+1}e^{i\tau}z^{p+1}\quad (\tau\ \textit{вещественное}) \tag{13}$$

и только ими.

Доказательство. Мы имеем

$$f'(z)=pz^{p-1}\Big[1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}|a_{p+n-1}|r^{n-1}\cos\varphi_{n-1}+$$
$$+i\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}|a_{p+n-1}|r^{n-1}\sin\varphi_{n-1}\Big]$$

и

$$\arg\frac{f'}{z^{p-1}}=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}|a_{p+n-1}|r^{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}|a_{p+n-1}|r^{n-1}\cos\varphi_{n-1}}.$$

Введем обозначения

$$\eta=\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}|a_{p+n-1}|r^{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}|a_{p+n-1}|r^{n-1}\cos\varphi_{n-1}},$$

$$\varepsilon=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}|a_{p+n-1}|.$$

(3) При $p=1$ получаем теорему вращения для класса функций L [5].

Тогда

$$\eta = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{p+n-1}{p} |a_{p+n-1}| \varepsilon r^{n-1} \sin\varphi_{n-1}}{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{p+n-1}{p} |a_{p+n-1}| (1+\varepsilon r^{n-1}\cos\varphi_{n-1})}.$$

В силу леммы,

$$\inf \frac{\varepsilon r^{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{1+\varepsilon r^{n-1}\cos\varphi_{n-1}} \leqslant \eta \leqslant \sup \frac{\varepsilon r^{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{1+\varepsilon r^{n-1}\cos\varphi_{n-1}}.$$

Легко проверить, что для $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

$$(14) \qquad -\frac{\varepsilon r}{\sqrt{1-\varepsilon^2 r^2}} \leqslant \frac{\varepsilon r^{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{1+\varepsilon r^{n-1}\cos\varphi_{n-1}} \leqslant \frac{\varepsilon r}{\sqrt{1-\varepsilon^2 r^2}}.$$

Таким образом, так как $\varepsilon \leqslant 1$,

$$-\operatorname{arctg}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \leqslant \arg\frac{f'}{z^{p-1}} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}};$$

для функциий (13) $\arg(f'/z^{p-1}) = \operatorname{arctg}(r\sin\varphi/(1+r\cos\varphi))$; если $\cos\varphi = -r$, то $\arg(f'/z^{p-1}) = \pm\operatorname{arctg}(r/\sqrt{1-r^2})$.

Аналогично доказываются теоремы 6, 7 и 8.

Теорема 6. *Если $f(z) \in L_p$, то в круге $|z| < 1$ имеют место оценки*

$$(15) \qquad -\operatorname{arctg}\frac{rp}{\sqrt{(p+1)^2-r^2p^2}} \leqslant \arg\frac{f}{z^p} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{rp}{\sqrt{(p+1)^2-r^2p^2}}.$$

Оценки точные, достигаются функциями (13), *и только ими.*

Теорема 7. *Если $f(z) \in L_p^*$, то в области $|z| > 1$ имеют место оценки*

$$(16) \qquad -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{r^{4p}-1}} \leqslant \arg\frac{f'}{z^{p-1}} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{r^{4p}-1}}.$$

Оценки точные, лостигаются функциями

$$(17) \qquad f(z) = z^p + e^{ia}/z^p \qquad (a \text{ вещественное})$$

и только ими(4).

(4) При $p = 1$ получаем теорему вращения для класса функций L^* [6].

Теорема 8. *Если $f(z) \in L_p^*$, то в области $|z| > 1$ имеют место оценки*

$$(18) \qquad -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{r^{4p}-1}} \leqslant \arg\frac{f}{z^p} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{r^{4p}-1}}.$$

Оценки точные, достигаются функциями (17) и только ими.

Теорема 9. *Если $f(z) \in R_p^0$, то в круге $|z| < 1$ имеют место оценки*

$$(19) \qquad -\operatorname{arctg}\frac{pr}{\sqrt{(p+1)^2-p^2r^2}} \leqslant \arg\frac{f'}{z^{p-1}} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{pr}{\sqrt{(p+1)^2-p^2r^2}}.$$

Оценки точные, достигаются функциями

$$(20) \qquad f(z) = z^p + \frac{p^2}{(p+1)^2}e^{i\alpha}z^{p+1} \qquad (\alpha \text{ вещественное})$$

и только ими.

Доказательство. Повторяя рассуждения, как и при доказательстве теоремы 5, получим неравенство (14), где $\varepsilon = \sum\limits_{n=2}^{\infty}(p+n-1)\times$ $\times p^{-1}|a_{p+n-1}|$. Исследуя функцию $\varepsilon = \sum\limits_{n=2}^{\infty}[(p+n-1)/p]x_n$ $(x_n \geqslant 0)$ при условии $\sum\limits_{n=2}^{\infty}[(p+n-1)/p]^2x_n = \delta$, $\delta \leqslant 1$ имеем $\varepsilon \leqslant p(p+1)^{-1}$; следовательно

$$-\operatorname{arctg}\frac{pr}{\sqrt{(p+1)^2-p^2r^2}} \leqslant \arg\frac{f'}{z^{p-1}} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{pr}{\sqrt{(p+1)^2-p^2r^2}}.$$

Аналогично доказывается теорема 10.

Теорема 10. *Если $f(z) \in R_p^0$, то в круге $|z| < 1$ имеют место оценки*

$$(21) \qquad -\operatorname{arctg}\frac{p^2r}{\sqrt{(p+1)^4-p^4r^2}} \leqslant \arg\frac{f}{z^p} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{p^2r}{\sqrt{(p+1)^4-p^4r^2}}.$$

Оценки точные, достигаются функциями (20) и только ими.

Повторяя рассуждения, как и при доказательстве теоремы 5, где $\varepsilon = \sum\limits_{n=1}^{\infty}[(p+n-1)/p]|a_{p+n-1}|$, $\varepsilon \leqslant 1$ получаем следующую теорему:

Теорема 11. *Если $f(z) \in R_p^*$, то в области $|z| > 1$ имеют место оценки*

$$(22) \qquad -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{r^{4p}-1}} \leqslant \arg\frac{f'}{z^{p-1}} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{r^{4p}-1}}.$$

Оценки точные, достигаются функциями (17) и только ими.

Теорема 12. *Если $F(z) \epsilon Q'_p$, то в круге $|z|<1$ имеют место оценки*

$$(23)\qquad -\operatorname{arctg}\frac{|p|+1+\gamma|pr}{\sqrt{(p+1)^2|p+\gamma|^2-|p+1+\gamma|^2p^2r^2}}\leqslant$$

$$\leqslant \arg\frac{F'(z)}{z^{p-1}}\leqslant \operatorname{arctg}\frac{|p+1+\gamma|pr}{\sqrt{(p+1)^2|p+\gamma|^2-|p+1+\gamma|^2p^2r^2}}.$$

Оценки точные, достигаются функциями

$$(24)\qquad F(z)=z^p+\frac{p+1+\gamma}{p+\gamma}\frac{p^2}{(p+1)^2}e^{i\alpha}z^{p+1}\qquad (\alpha \text{ вещественное})$$

и только ими[5].

Для доказательства теоремы повторяем рассуждения, как и при доказательстве теоремы 5. В данном случае

$$\varepsilon=\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma}\right|\frac{p+n-1}{p}|b_{p+n-1}|$$

Исследуя функцию $\varepsilon=\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma}\right|\frac{p+n-1}{p}x_n$ $(x_n\geqslant 0)$ при условии $\sum_{n=2}^{\infty}[(p+n-1)/p]^2x_n=\delta$, $\delta\leqslant 1$, а также пользуясь неравенством $\frac{|p+n-1+\gamma|}{p+n-1}\leqslant\frac{|p+1+\gamma|}{p+1}$ [6], получаем, что $\varepsilon\leqslant\left|\frac{p+1+\gamma}{p+\gamma}\right|\times$ $\times\frac{p}{p+1}$. Тогда

$$-\frac{|p+1+\gamma|pr}{\sqrt{(p+1)^2|p+\gamma|^2-|p+1+\gamma|^2p^2r^2}}\leqslant\frac{\varepsilon r^{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{1+\varepsilon r^{n-1}\cos\varphi_{n-1}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|p+1+\gamma|pr}{\sqrt{(p+1)^2|p+\gamma|^2-|p+1+\gamma|^2p^2r^2}}.$$

следовательно,

$$-\operatorname{arctg}\frac{|p+1+\gamma|pr}{\sqrt{(p+1)^2|p+\gamma|^2-|p+1+\gamma|^2p^2r^2}}\leqslant$$

$$\leqslant\arg\frac{F'}{z^{p-1}}\leqslant\operatorname{arctg}\frac{|p+1+\gamma|pr}{\sqrt{(p+1)^2|p+\gamma|^2-|p+1+\gamma|^2p^2r^2}}.$$

---

[5] При $\gamma=p$ получаем теорему вращения для класса функций Q_p.
[6] См. сноску [1] на стр. 138.

Для функций (24)

$$\arg\frac{F'}{z^{p-1}} = \operatorname{arctg}\frac{\left|\dfrac{p+1+\gamma}{p+\gamma}\right|\dfrac{p}{p+1}r\sin\varphi}{1+\left|\dfrac{p+1+\gamma}{p+\gamma}\right|\dfrac{p}{p+1}r\cos\varphi};$$

если $\cos\varphi = -\left|\dfrac{p+1+\gamma}{p+\gamma}\right|\dfrac{pr}{p+1}$, то

$$\arg\frac{F'}{z^{p-1}} = \pm\operatorname{arctg}\frac{\left|\dfrac{p+1+\gamma}{p+\gamma}\right|\dfrac{p}{p+1}r}{\sqrt{1-\left|\dfrac{p+1+\gamma}{p+\gamma}\right|^2\dfrac{p^2}{(p+1)^2}r^2}},$$

т. е. указанные оценки точные.

Теорема 13. *Если* $F(z)\in Q_p^*$, *то в области* $|z|>1$ *имеют место оценки*

(25) $$-\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\sqrt{r^{4p}-\varepsilon^2}} \leqslant \arg\frac{F'}{z^{p-1}} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\sqrt{r^{4p}-\varepsilon^2}},$$

где

(25′) $$\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma}\right|\frac{p+n-1}{p}|b_{p+n-1}|.$$

Доказывается теорема точно также, как и теорема 5. Для функции

(26) $$F(z) = z^p - \frac{p-\gamma}{p+\gamma}\frac{e^{i\alpha}}{z^p} \qquad (\alpha \text{ вещественное})$$

имеем

$$\arg\frac{F'}{z^{p-1}} = \operatorname{arctg}\frac{-\left|\dfrac{p-\gamma}{p+\gamma}\right|\dfrac{\sin\varphi}{r^{2p}}}{1+\left|\dfrac{p-\gamma}{p+\gamma}\right|\dfrac{\cos\varphi}{r^{2p}}};$$

если $\cos\varphi = -\left|\dfrac{p-\gamma}{p+\gamma}\right|\dfrac{1}{r^{2p}}$, то

$$\arg\frac{F'}{z^{p-1}} = \operatorname{arctg}\frac{\left|\dfrac{p-\gamma}{p+\gamma}\right|\dfrac{1}{r^{2p}}}{\sqrt{1-\left|\dfrac{p-\gamma}{p+\gamma}\right|^2\dfrac{1}{r^{4p}}}}$$

и, так как для данной функции $\varepsilon = |(p-\gamma)/(p+\gamma)|$, то указанные оценки точные.

II.

А. Шильд в теореме 7 [4] высказал предположение:

Если $w = f(z) \in S_p$ и через d_0 обозначить радиус круга, покрываемого образом круга $|z| \leqslant r_0$ при отображении $w = f(z)$, где r_0 — радиус выпуклости полинома $f(z)$, а через D_0 — радиус круга, покрываемого образом круга $|z| < 1$ при том же отображении, то $d_0/D_0 \geqslant 3/4$.

Эта гипотеза была доказана З. Левандовским [3], а позже нами [7]. С помощью леммы указанной в части I может быть доказано более общее утверждение(⁷):

Пусть Sh есть класс однолистных в круге $|z| < 1$ функций $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ для которых $a_n \geqslant 0$ и $\sum_{n=2}^{\infty} n a_n = 1$(⁸). Пусть r_m — корень уравнения $\sum_{n=2}^{\infty} n^m a_n r_m^{n-1} = 1$.

Будем рассматривать выражение

$$\eta_m = \frac{r_m - \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n r_m^n}{1 - \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n} \qquad (m > 1)$$

Тогда можно показать, что $\min\limits_{f \in Sh} \eta_m = 2^{2-m} - 2^{-2(m-1)}$ при $m = 2$ и $f(z) \in S_p$ получаем задачу, поставленную А. Шильдом.

Подобная же задача может быть решена для p-листных функций.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гальперин, И. М., *К теории p-листных функций*, ДАНУССР, сдана в печать.

[2] Lewandowski, Z., *Quelques remarques sur les théorèmes de Schild relatifs à une classe de fonctions univalentes* [*Несколько замечаний о теоремах Шильда, относящихся к одному классу однолистных функций*], Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **9**, 9 (1955), 149-155.

[3] — *Nouvelles remarques sur les théorèmes de Schild relatifs à une classe de fonctions univalentes* (*démonstration d'une hypothèse de Schild*) [*Дальнейшие замечания о теоремах Шильда, относящихся к некоторому классу однолистных функций* (*доказательство гипотезы Шильда*)], Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **10**, 8 (1956), стр. 81-94.

[4] Schild, A., *On a class of functions schlicht in the unit circle* [*О некотором классе однолистных в единичном круге функций*], Proc. Amer. Math. Soc., **5**, 1 (1954), стр. 115-120.

(⁷) Эти результаты были доложены на 4-ом математическом съезде в Ленинграде в 1961 г.

(⁸) Это пространство фактически было введено А. Шильдом, изучал это пространство З. Левандовский.

[5] Эзрохи, Т. Г., *Об одном классе однолистных функций*, Украинский математический журнал, печатается.
[6] Эзрохи, Т. Г., *Об одном классе функций, однолистных в области* $|z| > 1$, Известия Высших Учебных Заведений, Математика, печатается.
[7] — *Об одной теореме Шильда-Левандовского*, Известия Ясского Политехнического Института, послана в печать.

МЕЖВУЗОВСКИЙ СЕМИНАР ПО ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПОД РУКОВОДСТВОМ ПРОФ. ДОКТОРА ФИЗ.-МАТ. НАУК, В. А. ЗМОРОВИЧА — КИЕВ.

Streszczenie

Przyjmujemy, że L_p oznacza klasę funkcji $f(z)$ holomorficznych w kole jednostkowym $C = \{z: |z| < 1\}$ wyznaczoną przez warunki (1) i (2) w tekście in extenso tej pracy (po rosyjsku), R_p^0 i Q_p — klasy określone przez (1) i (5), lub odpowiednio (7) i (8); ostatnią będziemy oznaczać symbolem Q_p' w przypadku $\gamma = p$. Klasy L_p, R_p^0 i Q_p' badał już I. M. Halperin [1]; szczególnym przypadkiem jest klasa $L = L_1$, badana dawniej przez Z. Lewandowskiego [2].

W podobny sposób określamy trzy klasy funkcji holomorficznych w obszarze zewnętrznym $C^* = \{z: |z| > 1\}$: L_p^*, R_p^* et Q_p^*, scharakteryzowane odpowiednio przez zespoły warunków (3) i (4) lub (3) i (6), lub też (9) i (10).

Dowodzimy następujących twierdzeń:

Jeśli $f(z) \epsilon L_p^*$ albo $f(z) \epsilon Q_p^*$, to dopełnienie obrazu $f(C^*)$ obszaru C^* jest gwiaździste ze względu na punkt $z = 0$. (Tw. 1 i 4).

Funkcje klasy Q_p są p-listne i gwiaździste w C (Tw. 3), a funkcje klasy R_p^* — wypukłe w C^* (Tw. 2).

W klasie L_p stosują się ostre oszacowania (12) i (15); kresy są osiągnięte przez ekstremalne funkcje postaci (13), z rzeczywistym a, i nigdzie poza tym (Tw. 5 i 6). Analogicznymi oszacowaniami są dla klas L^* lub R_p^* nierówności (16) i (18), lub odpowiednie nierówności (22), z ekstremalnymi funkcjami (17), gdzie a jest rzeczywiste (Tw. 7, 8 i 11), w klasie zaś R_p^0 nierówności (19) i (21) z ekstremalnymi funkcjami (20), gdzie a jest rzeczywiste (Tw. 9 i 10). W klasach Q_p' i Q_p^* otrzymujemy również ostre oszacowania tego rodzaju, (23) dla pierwszej i (25), (25') dla drugiej. Odpowiednie funkcje ekstremalne wyrażają się wzorami (24) dla pierwszej lub odpowiednio (26) dla drugiej klasy (Tw. 12 i 13).

Twierdzenia te są kontynuacją cytowanych w bibliografii badań A. Schilda, Z. Lewandowskiego, I. M. Halperina i samej autorki.

Przedmiotem części II jest klasa S_h wszystkich funkcji kształtu $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \geqslant 0$, jednolistnych w kole C i spełniających warunek

$\sum_{n=2}^{\infty} na_n = 1$. Oznaczamy przez r_m pierwiastek równania $\sum_{n=2}^{\infty} n^m a_n r_m^{n-1} = 1$ i przyjmujemy, że $h_m = (r_m - \sum_{n=2}^{\infty} a_n r_m^n):(1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n)$, $m > 1$. Otóż można dowieść, że w klasie S_h jest $\min h_n = 2^{2-m} - 2^{-2(m-1)}$, co w szczególnym przypadku $m = 2$ i $f(z) \in S_p$ prowadzi do rozstrzygnięcia problemu A. Schilda [4] uzyskanego już poprzednio przez Z. Lewandowskiego.

Résumé

Nous admettons que L_p désigne la classe des fonctions holomorphes dans le cercle unité $C = \{z: |z| < 1\}$ determinée par les conditions (1) et (2) dans le texte in extenso de cette note (en russe), R_p^0 et Q_p — les classes engendrées par (1) et (5) resp. (7) et (8); la dernière s'écrira Q_p' dans le cas où $\gamma = p$. Les classes L_p, R_p^0 et Q_p' ont été étudiées par I. M. Halperin [1]; la classe $L = L_1$ a été déjà introduite par Z. Lewandowski [2].

Nous définissons, d'une manière analogue, trois classes L_p^*, R_p^* et Q_p^* de fonctions holomorphes dans le domaine extérieur $C^* = \{z: |z| > 1\}$, caractérisées par les trois couples de conditions: (3) et (4) ou (3) et (6), ou bien (9) et (10).

Nous démontrons les théorèmes suivantes:

Si $f(z) \in L_p^*$ ou bien si $f(z) \in Q_p^*$, l'ensemble complémentaire à l'image $f(C^*)$ de l'ensemble C^* est étoilé par rapport au point $z = 0$ (Th. 1 et 4).

Les fonctions de classe Q_p sont p-valentes et étoilées dans C (Th. 3) et celles de classe R_p^* sont convexes dans C^* (Th. 2).

Dans la classe L_p ont lieu les limitations précises (12) et (15); les limites étant atteintes par les fonctions extrémales de la forme (13) avec un a réel, et nulle part ailleurs (Th. 5 et 6). Les limitations analogues dans L_p^*, resp. R_p^*, sont (16) et (18), resp. (22), avec les fonctions extrémales (17), a réel (Th. 7, 8 et 11), ou bien (19) et (21) dans R_p^0 avec les fonctions extrémales (20), a toujours réel (Th. 9 et 10). Dans les classes Q_p' et Q_p^* on obtient aussi des limitations du même genre, (23) pour la première et (25, 25′) pour la seconde, les fonctions extrémales correspondantes s'exprimant par (24) et (25) resp. (Th. 12 et 13).

Ces théorèmes, contenus dans première partie de cette note, sont une continuation des travaux cités dans la bibliographie, de A. Schild, de Z. Lewandowski, de I. M. Halparin et de l'auteur même.

Le sujet de la II^e partie de la note est la classe S_h formée de toutes les fonctions $f(z) = z - \sum_{u=2}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \geqslant 0$, univalentes dans le cercle C et

telles que $\sum_{n=2}^{\infty} na_n = 1$. Si l'on désigne par r_m la racine de l'équation $\sum_{n=2}^{\infty} n^m a_n r_m^{n-1} = 1$ et si l'on pose $h_m = \left(r_m - \sum_{n=2}^{\infty} a_n r_m^n\right) : \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n\right)$, $m > 1$, alors on peut montrer que, dans la classe S_h, $\min h_n = 2^{2-m} - 2^{-2(m-1)}$, ce qui donne dans le cas particulier $m = 2$ et $f(z) \epsilon S_p$ la solution d'un problème de A. Schild [4], qui a été déjà trouvée par Z. Lewandowski [3].