ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XVI, 9 SECTIO A 1962

Z Katedry Zespołowej Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

JAN KISYŃSKI et WITOLD TYM

Sur la convergence des approximations successives pour l'équation $\partial^2 z/\partial x\partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$

O zbieżności ciągów kolejnych przybliżeń dla równania $\partial^2 z/\partial x\partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$

О сходимости последовательных приближений для уравнения $\partial^2 z/\partial x\partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$

1. Enoncé des théorèmes

Dans ce travail E désignera toujours un espace de Banach arbitraire, mais fixé. Lorsqu'il sera question de fonctions à valeurs dans E, toutes les limites et, par conséquent, la continuité des fonctions, la dérivabilité, la convergence des suites de fonctions etc. seront entendues au sens de la norme dans E.

Une fonction de deux variables sera dite de classe C^* dans un ensemble donné Z, si elle peut être prolongée sur un ensemble ouvert $G \supset Z$ de telle façon qu'elle admette dans l'ensemble G des dérivées partielles du premier ordre continues et une dérivée mixte du second ordre continue.

Problème de Goursat. Nous admettons les hypothèses suivantes (cf. [1], pp. 101, 109 et 110):

(H) La fonction $y = g(x)$, de classe C^1, non décroissante dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$, et la fonction $x = h(y)$, de classe C^1, non décroissante dans l'intervalle $\langle 0, b\rangle$, remplissent les conditions:

$$0 \leqslant g(x) \leqslant b \quad \text{pour} \quad x \in \langle 0, a\rangle,$$

$$0 \leqslant h(y) \leqslant a \quad \text{pour} \quad y \in \langle 0, b\rangle,$$

$$\text{si} \quad g(x) = y \quad \text{et} \quad h(y) = x, \quad \text{alors} \quad x = y = 0.$$

Nous admettons que toutes les fonctions $d\lambda^i(x)/dx$, $i = 0, 1, \ldots$, où $\lambda^0(x) = x$, $\lambda^{i+1}(x) = h\Big(g\big(\lambda^i(x)\big)\Big)$, sont bornées dans leur ensemble dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$, ou bien (ce qui est tout à fait équivalent) que toutes les fonctions $d\mu^i(y)/dy$, $i = 0, 1, \ldots$, où $\mu^0(y) = y$, $\mu^{i+1}(y) = g\big(h(\mu^i(y))\big)$, sont bornées dans leur ensemble dans l'intervalle $\langle 0, b\rangle$ (1).

(K) Nous supposons donnée une fonction $\chi(x, y)$ à valeurs dans E, de classe C^1 dans l'ensemble

$$\Delta = \{(x, y):\ g(x) \leqslant y \leqslant b,\ \ h(y) \leqslant x \leqslant a\};$$

les dérivées de cette fonction satisfont dans l'ensemble Δ aux conditions de Lipschitz

$$\|\chi_x(x, y) - \chi_x(x, \bar{y})\| \leqslant \Lambda |y - \bar{y}|,$$

$$\|\chi_y(x, y) - \chi_y(\bar{x}, y)\| \leqslant \Lambda |x - \bar{x}|,$$

où Λ est une constante positive.

Enfin nous supposons donnée une fonction continue $f(x, y, z, p, q)$ à valeurs dans E, définie pour $(x, y) \epsilon \Delta$ et $z, p, q \epsilon E$.

Dans ces hypothèses il s'agit de déterminer une fonction $z(x, y)$ (dite solution du problème de Goursat) à valeurs dans E, de classe C^* dans l'ensemble Δ, vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{1}$$

et les conditions

$$z\big(x, g(x)\big) = \chi\big(x, g(x)\big) \quad \text{pour} \quad x \epsilon \langle 0, a\rangle,$$

$$z\big(h(y), y\big) = \chi\big(h(y), y\big) \quad \text{pour} \quad y \epsilon \langle 0, b\rangle.$$

Problème de Cauchy (2). Soit une fonction $y = g(x)$, continue dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ et une fonction $x = h(y)$, continue dans l'intervalle $\langle 0, b\rangle$. Supposons qu'il existe un $a^* \epsilon \langle 0, a\rangle$ et un $b^* \epsilon \langle 0, b\rangle$ tels que $g(x) = 0$ pour $x \epsilon \langle a^*, a\rangle$ et $h(y) = 0$ pour $y \epsilon \langle b^*, b\rangle$, que la fonction $g(x)$ soit strictement décroissante de b^* à zéro dans l'intervalle $\langle 0, a^*\rangle$ et que la fonction inverse de $g(x)$ dans l'intervalle $\langle 0, a^*\rangle$ soit identique à la fonction $h(y)$ considérée dans l'intervalle $\langle 0, b^*\rangle$.

---

(1) Cette condition est remplie, par exemple, quand il existe un nombre ε, $0 < \varepsilon < \min(a, b)$, tel que l'une des inégalités $d\big(h(g(x))\big)/dx < 1$ pour $x \epsilon \langle 0, \varepsilon\rangle$ ou $d\big(g(h(y))\big)/dy < 1$ pour $y \epsilon \langle 0, \varepsilon\rangle$, est remplie; donc, en particulier, lorsque $g'(0) \times h'(0) < 1$, c'est-à-dire lorsque les tangentes aux courbes $y = g(x)$ et $x = h(y)$ au point $(0, 0)$ sont distinctes, comme l'a supposé Goursat [5].

(2) Cet énoncé du problème de Cauchy, un peu plus général que l'énoncé usuel, est dû à M. A. Bielecki; ainsi formulé, il comprend comme cas particulier le problème de Darboux, ce qui est avantageux pour les calculs.

Soit une fonction $\sigma(x)$ à valeurs dans E, de classe C^1 dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$, et une fonction $\tau(y)$ à valeurs dans E, de classe C^1 dans l'intervalle $\langle 0, b\rangle$.

Enfin, soit une fonction continue $f(x, y, z, p, q)$ à valeurs dans E, définie pour $(x, y)\in\Delta$ et $z, p, q\in E$.

Le problème consiste à déterminer une fonction $z(x, y)$ (dite solution du problème de Cauchy) à valeurs dans E, de classe C^* dans l'ensemble Δ, satisfaisant à l'équation (1) et aux conditions

$$(2)\qquad \begin{gathered} z(x, y) = \sigma(x)+\tau(y) \\ \text{si } y = g(x),\quad x\in\langle 0, a\rangle \text{ ou bien } \quad x = h(y),\quad y\in\langle 0, b\rangle, \\ \partial z(x, y)/\partial x = \sigma'(x) \quad \text{si} \quad y = g(x),\quad x\in\langle 0, a\rangle, \\ \partial z(x, y)/\partial y = \tau'(y) \quad \text{si} \quad x = h(y),\quad y\in\langle 0, b\rangle. \end{gathered}$$

Hypothèse 1. Il existe une fonction $M(r)$, continue, non décroissante et positive dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$ telle que

$$(3)\qquad \int_0^\infty \frac{dr}{M(r)} = \infty$$

et

$$\|f(x, y, z, p, q)\| \leqslant M(r) \quad \text{pour} \quad (x, y)\in\Delta \quad \text{et} \quad \|z\|, \|p\|, \|q\| \leqslant r.$$

Hypothèse 2. Il existe une fonction $\varkappa(t)$, non négative, sommable au sens de Lebesgue dans l'intervalle $\langle 0, a+b\rangle$, et une fonction $\omega(u)$, continue et non décroissante dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$ telles que $\omega(0) = 0$, $\omega(u) > 0$ pour $u > 0$,

$$(4)\qquad \int_{0+} \frac{du}{\omega(u)} = \infty$$

et

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\|f(x, y, z, p, q)-f(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})\| \leqslant \\ &\leqslant \varkappa(x+y)\,\omega(\|z-\bar{z}\|+\|p-\bar{p}\|+\|q-\bar{q}\|) \end{aligned}$$

pour $(x, y)\in\Delta$ et $z, p, q, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}\in E$.

Hypothèse 3. Il existe une fonction réelle $\omega(t, u)$, définie pour $t\in(t_0, a+b\rangle$, $t_0 = \inf\{x+y : (x, y)\in\Delta\}$, et $u \geqslant 0$, continue et non décroissante par rapport à u pour tout $t\in(t_0, a+b\rangle$ fixé, sommable au sens de Lebesgue par rapport à t pour tout $u \geqslant 0$ fixé, telle que

(i) il existe $K > 0$ tel que $\|f(x, y, z, p, q)-f(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})\| \leqslant \omega(x+y, \max(K\|z-\bar{z}\|, \|p-\bar{p}\|, \|q-\bar{q}\|))$ pour $(x, y)\in\Delta$ et $z, p, q, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}\in E$,

(ii) pour tout $\varepsilon \in (0, a+b-t_0\rangle$ $u(t) \equiv 0$ est l'unique fonction continue dans l'intervalle $\langle t_0, t_0+\varepsilon\rangle$ vérifiant les conditions $u'(t_0) = 0$ et

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} \omega(\tau, u(\tau))d\tau \text{ pour } t\in\langle t_0, t_0+\varepsilon\rangle.$$

Théorème 1. *Sous les hypothèses* 1 *et* 2 *le problème de Goursat admet exactement une solution.*

Théorème 2. *Sous les hypothèses* 1 *et* 3 *le problème de Cauchy admet exactement une solution.*

Pour $E = (-\infty, \infty)$, des théorèmes analogues ont été établis dans [6]; l'existence des solutions y a été démontrée par la méthode de Schauder, qui mène à des calculs assez pénibles dans le cas du problème de Goursat. Dans la présente note nous utiliserons, pour établir les théorèmes 1 et 2, la méthode des approximations successives.

2. Remarque sur la continuité des solutions par rapport aux conditions aux limites et au second membre de l'équation et sur l'existence des solutions

Des théorèmes 1 et 2 on peut obtenir des théorèmes sur la continuité des solutions par rapport au second membre et aux conditions aux limites. Dans ce but il suffit d'appliquer les résultats des théorèmes 1 et 2 à l'espace de Banach E_0 des suites $x = \{x_n\}_{n=0,1,\dots}$, $x_n\in E$, telles que $\|x_n - x_0\|_E \to 0$, avec la norme $\|x\|_{E_0} = \sup\limits_n \|x_n\|_E$ (cf. [7] et aussi [8] et [9]).

Pour $E = (-\infty, \infty)$, en suivant le procédé de Ciliberto [2], on peut en déduire un théorème sur l'existence d'une solution (pas nécessairement unique) du problème de Goursat ([3]) en admettant les hypothèses 1 et 2 et en remplaçant la condition (5) par la suivante:

$$(5') \qquad |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \varkappa(x+y)\omega(|p-\bar{p}|+|q-\bar{q}|).$$

3. Réduction des problèmes de Cauchy et de Goursat à des équations fonctionnelles sans conditions supplémentaires

Lemme 1. Moyennant les hypothèses (H) et (K) le système d'équations aux fonctions inconnues $G(x)$ et $H(y)$

$$G(x) + H\big(g(x)\big) = \chi\big(x, g(x)\big) \qquad \text{pour} \qquad x\in\langle 0, a\rangle,$$
$$H(y) + G\big(h(y)\big) = \chi\big(h(y), y\big) \qquad \text{pour} \qquad y\in\langle 0, b\rangle,$$

([3]) Le théorème, obtenu par une méthode analogue, sur l'existence d'une solution, pas nécessairement unique, du problème de Cauchy serait moins général que les théorèmes établis par d'autres méthodes.

admet une solution de classe C^1. La fonction $G(x)+H(y)$ est alors définie univoquement.

Lemme 2. Moyennant l'hypothèse (H), si $s(x,y)$ est une fonction à valeurs dans E, continue dans l'ensemble Δ, le problème de Goursat

$$\partial^2 z/\partial x\partial y = s(x,y) \quad \text{pour} \quad (x,y)\in\Delta,$$
$$z(x,g(x)) = 0 \quad \text{pour} \quad x\in\langle 0,a\rangle,$$
$$z(h(y),y) = 0 \quad \text{pour} \quad y\in\langle 0,b\rangle,$$

admet exactement une solution de classe C^* dans Δ. Cette solution est donnée par la formule

$$z(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\int_{x_{i+1}}^{x_i}\int_{y_{i+1}}^{y_i} s(u,v)\,dv\,du, \tag{6}$$

où $x_{2i}=\lambda^i(x)$, $y_{2i}=\mu^i(y)$, $x_{2i+1}=h(\mu^i(y))$, $y_{2i+1}=g(\lambda^i(x))$, et on obtient les dérivées $\partial z/\partial x$ et $\partial z/\partial y$ en dérivant la série (6) terme à terme.

Pour démontrer ces lemmes il suffit de remarquer que les théorèmes 1 et 4 du travail [1] et les considérations du chapitre 2 du travail [6] restent valables aussi pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

Des lemmes 1 et 2 nous obtenons immédiatement:

Lemme 3. Pour que la fonction $z(x,y)$ à valeurs dans E, de classe C^* dans l'ensemble Δ soit la solution du problème de Goursat, il faut et il suffit qu'elle satisfasse dans l'ensemble Δ à l'équation

$$z(x,y) = G(x)+H(y)+ \\ +\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\int_{x_{i+1}}^{x_i}\int_{y_{i+1}}^{y_i} f\Big(u,v,z(u,v),\frac{\partial z(u,v)}{\partial u},\frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\Big)dv\,du$$

où les fonctions $G(x)$ et $H(y)$ sont définies dans le lemme 1 et x_i et y_i, $i=0,1,\ldots$, dans le lemme 2.

Enfin, en raisonnant de même qu'au chapitre 2 du travail [6], nous obtenons:

Lemme 4. Pour que la fonction $z(x,y)$ à valeurs dans E, de classe C^* dans l'ensemble Δ, soit solution du problème de Cauchy il faut et il suffit qu'elle satisfasse dans l'ensemble Δ à l'équation

$$z(x,y) = \sigma(x)+\tau(y)+\iint_{\Delta_{xy}} f\Big(u,v,z(u,v),\frac{\partial z(u,v)}{\partial u},\frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\Big)du\,dv,$$

où
$$\Delta_{x,y} = \{(u, v):(u, v)\in\Delta,\ u \leqslant x,\ v \leqslant y\}.$$

4. Démonstration du théorème 2

Soit $C^1(\Delta)$ un espace de Banach de fonctions à valeurs dans E, de classe C^1 dans l'ensemble Δ, avec la norme
$$\|z\|_1 = \sup\{\|z(x, y)\|,\ \|\partial z(x, y)/\partial x\|,\ \|\partial z(x, y)/\partial y\|: (x, y)\in\Delta\}.$$

Soit F une transformation de l'espace $C^1(\Delta)$ en lui-même définie par la formule:
$$(Fz)(x, y) = \sigma(x)+\tau(y)+\iint\limits_{\Delta_{xy}} f\left(u, v, z(u, v), \frac{\partial z(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u, v)}{\partial v}\right) du\, dv.$$

Lemme 5. Si $z_0\in C^1(\Delta)$ et si la suite des fonctions z_n, $n = 1, 2, \ldots$, définies par la formule $z_{n+1} = Fz_n$ converge dans l'espace $C^1(\Delta)$ vers une fonction z, alors z est une solution du problème de Cauchy et la suite des dérivées $\partial^2 z_n/\partial x\partial y$, $n = 1, 2, \ldots$, converge uniformément dans l'ensemble Δ vers $\partial^2 z/\partial x\partial y$.

D é m o n s t r a t i o n. La fonction z satisfait aux conditions (2) puisque toutes les fonctions z_n, $n = 1, 2, \ldots$, les remplissent. Soit (x_n, y_n), $n = 1, 2, \ldots$, une suite de points de l'ensemble Δ tendant vers (x_0, y_0). Alors, comme les suites de fonctions z_n, $\partial z_n/\partial x$ et $\partial z_n/\partial y$, $n = 1, 2, \ldots$, sont uniformément convergentes, les suites $z_n(x_n, y_n)$, $\partial z_n(x_n, y_n)/\partial x$ et $\partial z_n(x_n, y_n)/\partial y$, $n = 1, 2, \ldots$, convergent respectivement vers $z(x_0, y_0)$, $\partial z(x_0, y_0)/\partial x$ et $\partial z(x_0, y_0)/\partial y$, d'où la fonction $f(x, y, z, p, q)$ étant continue, la suite
$$\partial^2 z_n(x_n, y_n)/\partial x\partial y =$$
$$= f\big(x_n, y_n, z_n(x_n, y_n), \partial z_n(x_n, y_n)/\partial x, \partial z_n(x_n, y_n)/\partial y\big), \quad n = 1, 2, \ldots,$$
converge vers $f\big(x_0, y_0, z(x_0, y_0), \partial z(x_0, y_0)/\partial x, \partial z(x_0, y_0)/\partial y\big)$. Il en résulte que la suite des dérivées $\partial^2 z_n/\partial x\partial y$, $n = 1, 2, \ldots$, converge uniformément sur l'ensemble Δ vers $f\big(x, y, z(x, y), \partial z(x, y)/\partial x, \partial z(x, y)/\partial y\big)$; en vertu du théorème sur la dérivation terme à terme il existe donc une dérivée continue $\partial^2 z(x, y)/\partial x\partial y = f\big(x, y, z(x, y), \partial z(x, y)/\partial z(x, y)/\partial y\big)$ qui est définie dans Δ.

Lemme 6. Si l'hypothèse 1 est vérifiée et si $z_0\in C^1(\Delta)$, $\bar{z}_0\in C^1(\Delta)$ et les suites z_n et $\bar{z}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, sont définies par les formules $z_{n+1} = Fz_n$ et $\bar{z}_{n+1} = F\bar{z}_n$, alors les dérivées $\partial^2 z_n/\partial x\partial y$ et $\partial^2 \bar{z}_n/\partial x\partial y$, $n = 1, 2, \ldots$, sont bornées dans leur ensemble sur l'ensemble Δ et l'on a

(7)

$$\lim_{t\to t_0^+}\sup\left\{\left\|\frac{\partial^2 z_m(x,y)}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z_n(x,y)}{\partial x\partial y}\right\|: m,n\geqslant 1,(x,y)\in\Delta, x+y\leqslant t\right\}=0.$$

Démonstration. Posons

$$A=\sup\left\{\left\|\frac{\partial^2 z_1(x,y)}{\partial x\partial y}\right\|,\left\|\frac{\partial^2 \bar{z}_1(x,y)}{\partial x\partial y}\right\|:(x,y)\in\Delta\right\},$$

$$B=\sup\{\|\sigma(x)+\tau(y)\|,\|\sigma(x)\|,\|\tau'(y)\|:(x,y)\in\Delta\}.$$

A cause de (3) l'équation

$$R(t)=A+M\Big(B+\max[1,(a+b-t_0)]\int_{t_0}^{t}R(\tau)d\tau\Big) \tag{8}$$

admet une solution $R(t)$ continue sur tout l'intervalle $\langle t_0, a+b\rangle$. On a $\|\partial^2 z_1(x,y)/\partial x\partial y\|\leqslant A\leqslant R(x+y)$ et, si $\|\partial^2 z_n(x,y)/\partial x\partial y\|\leqslant R(x+y)$, il vient

$$\|z_n(x,y)-\sigma(x)-\tau(y)\|=\left\|\iint_{\Delta_{xy}}\left[\frac{\partial^2 z_n(u,v)}{\partial u\partial v}\right]dudv\right\|\leqslant \tag{9}$$

$$\leqslant\iint_{\substack{u+v\geqslant t_0\\ u\leqslant x, v\leqslant b}}R(u+v)dudv=\int_{t_0}^{x+y}\Big(\int_{t_0}^{t}R(\tau)d\tau\Big)dt\leqslant(a+b-t_0)\int_{t_0}^{x+y}R(\tau)d\tau,$$

$$\left\|\frac{\partial z_n(x,y)}{\partial x}-\sigma'(x)\right\|=\left\|\int_{g(x)}^{y}\left[\frac{\partial^2 z_n(x,v)}{\partial x\partial v}\right]dv\right\|\leqslant \tag{10}$$

$$\leqslant\int_{g(x)}^{y}R(x+v)dv\leqslant\int_{t_0}^{x+y}R(\tau)d\tau,$$

$$\left\|\frac{\partial z_n(x,y)}{\partial y}-\tau'(y)\right\|=\left\|\int_{h(y)}^{x}\left[\frac{\partial^2 z_n(u,y)}{\partial u\partial y}\right]du\right\|\leqslant \tag{11}$$

$$\leqslant\int_{h(y)}^{x}R(u+y)du\leqslant\int_{t_0}^{x+y}R(\tau)d\tau,$$

par conséquent

$$\left\| \frac{\partial^2 z_{n+1}(x,y)}{\partial x \partial y} \right\| \leqslant M\left(\max\left(\|z_n(x,y)\|, \left\| \frac{\partial z_n(x,y)}{\partial x} \right\|, \left\| \frac{\partial z_n(x,y)}{\partial y} \right\| \right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant M\left(B + [\max(1, a+b-t_0)] \int_{t_0}^{x+y} R(\tau)d\tau\right) \leqslant R(x+y)$$

et, par récurrence, $\partial^2 z_n(x,y)/\partial x \partial y \leqslant R(x+y)$ pour $n = 1, 2, \ldots,$ De même on a $\partial^2 \bar{z}_n(x,y)/\partial x \partial y \leqslant R(x+y)$. Il reste a établir (7). Posons

$$\nu(t) = \sup \|f(x, y, \sigma(x)+\tau(y)+z, \sigma'(x)+p, \tau'(y)+q) - \\ -f(x, y, \sigma(x)+\tau(y)+\bar{z}, \sigma'(x)+\bar{p}, \tau'(y)+\bar{q})\|$$

pour

$$(x,y) \in \Delta; \ \|z\|, \|\bar{z}\| \leqslant (a+b-t_0) \int_{t_0}^{t} R(\tau)d\tau; \ \|p\|, \|q\|, \|\bar{p}\|, \|\bar{q}\| \leqslant \int_{t_0}^{t} R(\tau)d\tau.$$

Les fonctions $f, \sigma, \tau, \sigma', \tau'$ étant continues et l'ensemble Δ étant compact, on a $\lim\limits_{t \to t_0+} \nu(t) = 0$. Les formules (9), (10) et (11) et les inégalités analogues pour les $\bar{z}_n$ entraînent $\|\partial^2 z_m(x,y)/\partial x \partial y - \partial^2 \bar{z}_n(x,y)/\partial x \partial y\| \leqslant r(x+y)$, d'où il résulte (7).

Lemme 7. Si la fonction $\delta(t)$, non négative et sommable dans l'intervalle $\langle t_0, a+b \rangle$, est continue à droite au point t_0 et si l'on a $\delta(t_0) = 0$ et

$$(12) \qquad \delta(t) \leqslant \omega\left(t, \max\left(K \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{s} \delta(\tau)d\tau \right] ds, \int_{t_0}^{t} \delta(\tau)d\tau \right)\right)$$

pour $t \in (t_0, a+b\rangle$, alors $\delta(t) = 0$ presque partout dans l'intervalle $\langle t_0, a+b \rangle$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = a+b$ une division de l'intervalle $\langle t_0, a+b \rangle$ telle que $K(t_i - t_{i-1}) \leqslant 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Alors on obtient de (12) l'inégalité

$$(13) \qquad \delta(t) \leqslant \omega\left(t, \int_{t_0}^{t} \delta(\tau)d\tau\right) \quad \text{pour} \quad t \in (t_0, t_1\rangle,$$

dont il résulte que la fonction $D(t) = \int_{t_0}^{t} \delta(\tau)d\tau$ satisfait à l'inégalité

$$(14) \qquad D(t'') - D(t') \leqslant \left| \int_{t'}^{t''} \omega(t, D(t))dt \right| \quad \text{pour} \quad t', t'' \in (t_0, t_1\rangle.$$

En tenant compte de l'hypothèse 3, il résulte de l'inégalité (14), par un raisonnement tout pareil à celui de Coddington et Levinson [3], p. 79-80 (cf. aussi [4], p. 50) que $D(t)=0$ pour $t\in\langle t_0, t_1\rangle$, donc $\delta(t)=0$ presque partout dans l'intervalle $\langle t_0, t_1\rangle$. Alors, les intégrales au second membre de l'inégalité (12) peuvent être remplacées par $\int\limits_{t_1}^{t}\Big|\int\limits_{t_1}^{s}\delta(\tau)d\tau\Big|ds$ et $\int\limits_{t_1}^{t}\delta(\tau)d\tau$.

On obtient ainsi l'inégalité $\delta(t)\leqslant\omega(t,\int\limits_{t_1}^{t}\delta(\tau)d\tau)$ pour $t\in\langle t_1, t_2\rangle$, dont il résulte, en raisonnant comme dans le cas de l'inégalité (13), que $\delta(t)=0$ presque partout dans l'intervalle $\langle t_1, t_2\rangle$. On constate de même que $\delta(t)=0$ presque partout dans les intervalles $\langle t_{i-1}, t_i\rangle, i=1,2,\ldots,n$.

Démonstration du théorème 2. A cause du lemme 5, il suffit de prouver que pour tout couple de fonctions $z_0\in C^1(\Delta)$ et $\bar{z}_0\in C^1(\Delta)$, les deux suites de fonctions z_n et $\bar{z}_n$, $n=1,2,\ldots$, définies par les formules $z_{n+1}=Fz_n$ et $\bar{z}_{n+1}=F\bar{z}_n$ tendent dans l'espace $C^1(\Delta)$ vers la même limite, c'est-à-dire remplissent la condition

$$\lim_{n,m\to\infty}\|z_m-\bar{z}_n\|_1=0. \tag{15}$$

Pour $m, n=1,2,\ldots$ et $t\in\langle t_0, a+b\rangle$ posons

$$\delta_{m,n}(t)=\sup\left\{\left\|\frac{\partial^2 z_m(x,y)}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\bar{z}_n(x,y)}{\partial x\partial y}\right\|:(x,y)\in\Delta,\ x+y=t\right\}.$$

Les fonctions $\delta_{m,n}(t)$ sont continues sur l'intervalle $\langle t_0, a+b\rangle$ et, comme

$$\|z_m(x,y)-\bar{z}_n(x,y)\|=\left\|\iint\limits_{\Delta_{xy}}\left(\frac{\partial^2 z_m(u,v)}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2\bar{z}_n(u,v)}{\partial u\partial v}\right)du\,dv\right\|\leqslant \tag{16}$$

$$\leqslant\iint\limits_{\substack{u+v\geqslant t_0\\ u\leqslant x, u\leqslant y}}\delta_{m,n}(u+v)\,du\,dv=\int\limits_{t_0}^{x+y}\Big[\int\limits_{t_0}^{s}\delta_{m,n}(\tau)d\tau\Big]ds\leqslant(a+b-t_0)\int\limits_{t_0}^{x+y}\delta_{m,n}(\tau)d\tau,$$

$$\left\|\frac{\partial z_m(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial\bar{z}_n(x,y)}{\partial x}\right\|=\left\|\int\limits_{g(x)}^{y}\left(\frac{\partial^2 z_m(x,v)}{\partial x\partial v}-\frac{\partial^2\bar{z}_n(x,v)}{\partial x\partial v}\right)dv\right\|\leqslant \tag{17}$$

$$\leqslant\int\limits_{g(x)}^{y}\delta_{m,n}(x+v)dv\leqslant\int\limits_{t_0}^{x+y}\delta_{m,n}(\tau)d\tau,$$

$$\left\|\frac{\partial z_m(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial\bar{z}_n(x,y)}{\partial y}\right\|=\left\|\int\limits_{h(y)}^{x}\left(\frac{\partial^2 z_m(u,y)}{\partial u\partial y}-\frac{\partial^2\bar{z}_n(u,y)}{\partial u\partial y}\right)du\right\|\leqslant \tag{18}$$

$$\leqslant\int\limits_{h(y)}^{x}\delta_{m,n}(u+y)du\leqslant\int\limits_{t_0}^{x+y}\delta_{m,n}(\tau)d\tau,$$

on a

$$(19) \qquad \|z_m - \bar{z}_n\|_1 \leqslant \max(1, a+b-t_0) \int_{t_0}^{a+b} \delta_{m,n}(\tau)\,d\tau.$$

Vu le lemme 6, les fonctions $\delta_{m,n}(t)$, $m, n = 1, 2, \ldots$, sont bornées dans leur ensemble sur l'intervalle $\langle t_0, a+b\rangle$.

Posons

$$\delta(t) = \limsup_{m,n\to\infty} \delta_{m,n}(t).$$

Alors, eu égard à (19), on obtient, d'après le lemme de Fatou, l'inégalité

$$\limsup_{m,n\to\infty} \|z_m - \bar{z}_n\|_1 \leqslant \max(1, a+b-t_0) \int_{t_0}^{a+b} \delta(\tau)\,d\tau,$$

donc, pour établir l'égalité (15) et achever ainsi la démonstration du théorème 2, il suffit de prouver que $\delta(t) = 0$ presque partout dans l'intervalle $\langle t_0, a+b\rangle$. Pour cela, nous allons appliquer le lemme 7. De (7) il s'ensuit immédiatement que $\delta(t)$ est continue à droite au point t_0 et que $\delta(t_0) = 0$; il reste donc à prouver que l'inégalité (12) est qérifiée. D'après (i), on a pour $m, n = 1, 2\ldots$ et $(x, y) \epsilon \Delta$, $x+y > t_0$,

$$\left\| \frac{\partial^2 z_{m+1}(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \bar{z}_{n+1}(x,y)}{\partial x \partial y} \right\| =$$

$$= \left\| f\left((x, y, z_m(x,y), \frac{\partial z_m(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial z_m(x,y)}{\partial y}\right) - \right.$$

$$\left. - f\left((x, y, z_n(x,y), \frac{\partial \bar{z}_n(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}_n(x,y)}{\partial y}\right) \right\| \leqslant \omega\Big(x+y, \max\Big(K\|z_m(x,y) -$$

$$- \bar{z}_n(x,y)\|, \left\| \frac{\partial z_m(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial \bar{z}_n(x,y)}{\partial x} \right\|, \left\| \frac{\partial z_n(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial \bar{z}_n(x,y)}{\partial y} \right\| \Big)\Big),$$

d'où compte tenu de (16), (17), (18) et du fait que la fonction $\omega(t, u)$ est monotone par rapport à u, on déduit l'inégalité

$$\delta_{m+1,n+1}(t) \leqslant \omega\left(t, \max\left(K \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{s} \delta_{m,n}(\tau)\,d\tau\right] ds, \int_{t_0}^{t} \delta_{m,n}(\tau)\,d\tau\right)\right)$$

pour $m, n = 1, 2, \ldots$ et $t \epsilon (t_0, a+b\rangle$. La fonction $\omega(t, u)$ étant continue et monotone par rapport à u, l'inégalité (12) en résulte en vertu du lemme de Fatou. Donc $\delta(t)$ vérifie toutes les hypothèses du lemme 7 et, par conséquent, $\delta(t) = 0$ presque partout dans l'intervalle $\langle t_0, a+b\rangle$, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

5. Démonstration du théorème 1

Désignons par Φ l'opération transformant l'espace $C^1(\Delta)$ en lui-même, définie par la formule

$$(\Phi z)(x, y) =$$
$$= G(x)+H(y)+\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\int_{x_{i+1}}^{x_i}\int_{y_{i+1}}^{y_i} f\left(u, v, z(u, v), \frac{\partial z(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u, v)}{\partial v}\right) dv\, du.$$

Lemme 8. Si $z_0 \in C^1(\Delta)$ et si la suite des fonctions z_n, $n = 1, 2, \ldots$, définies par la formule $z_{n+1} = \Phi z_n$, converge dans l'espace $C^1(\Delta)$ vers une fonction z, alors z est une solution du problème de Goursat et la suite des dérivées $\partial^2 z_n/\partial x\partial y$, $n = 1, 2, \ldots$, converge uniformément sur Δ vers la fonction $\partial^2 z/\partial x\partial y$.

La démonstration est la même que dans le cas du lemme 5.

Lemme 9. Si l'hypothèse 1 est réalisée et si $z_0 \in C^1(\Delta)$, $z_{n+1} = \Phi z_n$, $n = 1, 2, \ldots$, les dérivées $\partial^2 z_n/\partial x\partial y$, $n = 1, 2, \ldots$, sont bornées dans leur ensemble sur l'ensemble Δ.

La démonstration est semblable à celle du lemme 6. Posons

$$A = \sup\left\{\left\|\frac{\partial^2 z_1(x, y)}{\partial x\partial y}\right\| : (x, y)\in\Delta\right\},$$

$$B = \sup\{\|G(x)+H(y)\|, \|G'(x)\|, \|H'(y)\| : (x, y)\in\Delta\},$$

$$L = \sup\left\{\left\|\frac{d}{dx}\lambda^i(x)\right\|, \left\|\frac{d}{dx}g(\lambda^i(x))\right\|, \left\|\frac{d}{dx}\mu^i(y)\right\|, \left\|\frac{d}{dy}h(\mu^i(y))\right\| :\right.$$
$$\left.(x, y)\in\Delta,\ i = 0, 1, \ldots\right\}$$

D'après (3), l'équation

$$R(t) = A + M\left(B+\max(2L, a+b)\int_0^t R(\tau)d\tau\right) \tag{8}^*$$

admet une solution $R(t)$ continue sur tout l'intervalle $\langle 0, a+b\rangle$. On a $\|\partial^2 z_1(x, y)/\partial x\partial y\| \leqslant A \leqslant R(x+y)$, et, si $\|\partial^2 z_n(x, y)/\partial x\partial y\| \leqslant R(x+y)$

$$\|z_n(x, y)-G(x)-H(y)\| = \left\|\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\int_{x_{i+1}}^{x_i}\int_{y_{i+1}}^{y_i}\frac{\partial^2 z_n(u, v)}{\partial u\partial v}dv\, du\right\| \leqslant \tag{9}^*$$

$$\leqslant \int_0^x\int_0^y R(u+v)dv\, du \leqslant \int_0^{x+y}\left[\int_0^t R(\tau)d\tau\right]dt \leqslant (a+b)\int_0^{x+y} R(\tau)d\tau,$$

(10)*

$$\left\| \frac{\partial z_n(x,y)}{\partial x} - G'(x) \right\| = \left\| \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \int_{x_{i+1}}^{x_i} \int_{v_{i+1}}^{v_i} \frac{\partial^2 z_n(u,v)}{\partial u \partial v} dv du \right\} \right\| =$$

$$= \left\| \int_{g(x)}^{y} \frac{\partial^2 z_n(x,v)}{\partial x \partial v} dv + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} \lambda^{i+1}(x) \right) \int_{g(\lambda^{i+1}(x))}^{g(\lambda^i(x))} \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial v} (\lambda^{i+1}(x), v) dv + \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} g(\lambda^i(x)) \right) \int_{\lambda^{i+1}(x)}^{\lambda^i(x)} \frac{\partial^2 z_n}{\partial u \partial y} \big(u, g(\lambda^i(x))\big) du \right\| \leqslant$$

$$\leqslant L \Bigg(\int_{g(x)}^{y} R(x+v) dv + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{g(\lambda^{i+1}(x))}^{g(\lambda^i(x))} R\big(\lambda^{i+1}(x) + v\big) dv +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\lambda^{i+1}(x)}^{\lambda^i(x)} R\big(u + g(\lambda^i(x))\big) du \Bigg) = 2L \int_0^{x+y} R(\tau) d\tau,$$

et, d'une façon analogue,

$$\left\| \frac{\partial z_n(x,y)}{\partial y} - H'(y) \right\| \leqslant 2L \int_0^{x+y} R(\tau) d\tau. \tag{11*}$$

Par conséquent

$$\left\| \frac{\partial^2 z_{n+1}(x,y)}{\partial x \partial y} \right\| \leqslant M \left(\max \left(\|z_n(x,y)\|, \left\| \frac{\partial z_n(x,y)}{\partial x} \right\|, \left\| \frac{\partial z_n(x,y)}{\partial y} \right\| \right) \right) \leqslant$$

$$\leqslant M \left(B + \max(2L, a+b) \int_0^{x+y} R(\tau) d\tau \right) \leqslant R(x+y)$$

et l'inégalité $\|\partial^2 z_n(x,y)/\partial x \partial y\| \leqslant R(x+y)$, $n = 1, 2, \ldots$, se trouve ainsi démontrée par récurrence.

Lemme 10. Supposons vérifie l'hypothèse 2 et soit $\delta(t)$ une fonction non négative, sommable sur l'intervalle $\langle 0, a+b \rangle$ et satisfaisant presque partout sur cet intervalle à l'inégalité

$$\delta(t) \leqslant \varkappa(t) \omega \left((a+b+4L) \int_0^t \delta(\tau) d\tau \right). \tag{12*}$$

Dans ces conditions, $\delta(t) = 0$ presque partout sur l'intervalle $\langle 0, a+b \rangle$.

Démonstration. Posons

$$\bar{t} = \sup\left\{t : t \in \langle 0, a+b\rangle, \int_0^t \delta(\tau)d\tau = 0\right\}.$$

Si $\bar{t} = a+b$, le lemme se trouve démontré. Si $\bar{t} < a+b$, alors, pour $\bar{t} < t \leqslant a+b$, on a $\int_0^t \delta(\tau)d\tau > 0$, d'où $\omega\left((a+b+4L)\int_0^t \delta(\tau)d\tau\right) > 0$, donc

$$\frac{\delta(t)}{\omega\left((a+b+4L)\int_0^t \delta(\tau)d\tau\right)} \leqslant \varkappa(t)$$

presque partout dans l'intervalle $(\bar{t}, a+b)$. Par conséquent, en appliquant le théorème sur le changement de variables dans l'intégrale de Lebesgue, on obtient

$$\int_0^a \frac{du}{\omega(u)} = (a+b+4L)\int_{\bar{t}}^{a+b} \frac{\delta(t)dt}{\omega\left((a+b+4L)\int_0^t \delta(\tau)d\tau\right)} \leqslant (a+b+4L)\int_{\bar{t}}^{a+b} \varkappa(t)dt$$

où $a = (a+b+4L)\int_0^{a+b} \delta(t)dt > 0$, ce qui signifie que $\int_{0+} \frac{du}{\omega(u)}$ est convergente dans le voisinage de zéro, en contradiction avec (4).

Démonstration du théorème 1. Cette démonstration est semblable à celle du théorème 2, c'est pourquoi nous nous bornerons à l'esquisser. Au lieu de l'opération F on y utilise l'opération Φ, au lieu des lemmes 5-7 — les lemmes 8-10. Les différences dans les calculs qu'il y a lieu de faire sont les suivantes. Au lieu des inégalités (16)-(18), en procédant comme dans le cas des inégalités (9)*-(11)* on établit les inégalités

$$\|z_m(x, y) - \bar{z}_n(x, y)\| \leqslant (a+b)\int_0^{x+y} \delta_{m,n}(\tau)d\tau, \tag{16*}$$

$$\left\|\frac{\partial z_m(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \bar{z}_n(x, y)}{\partial x}\right\| \leqslant 2L\int_0^{x+y} \delta_{m,n}(\tau)d\tau, \tag{17*}$$

$$\left\|\frac{\partial z_m(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial \bar{z}_n(x, y)}{\partial y}\right\| \leqslant 2L\int_0^{x+y} \delta_{m,n}(\tau)d\tau, \tag{18*}$$

d'où l'on tire l'inégalité

$$\limsup_{m,n\to\infty} \|z_m - \bar{z}_n\|_1 \leqslant \max(2L, a+b) \int_0^{a+b} \delta(\tau)\,d\tau.$$

Ensuite, moyennant les inégalités (16)*-(18)*, on démontre que $\delta_{m+1,n+1}(t) \leqslant \varkappa(t)\,\omega\big((a+b+4L)\int_0^t \delta_{m,n}(\tau)\,d\tau\big)$, d'où l'on déduit finalement l'inégalité (12)*.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bielecki, A., et Kisyński, J., *Sur le problème de Goursat relatif à l'équation* $\partial^2 z/\partial x\partial y = f(x, y)$, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **10** (1956), p. 99-126.

[2] Ciliberto, C., *Il problema di Darboux per una equazione di tipo iperbolico in due variabili*, Ricerche di Mat., **4** (1955), p. 15-29.

[3] Coddington, E. A., et Levinson, N., *Uniqueness and convergence of successive approximations*, J. Indian Math. Soc., **16** (1952), p. 75-81.

[4] — *Theory of ordinary differential equations*, New York - Toronto-London, 1955.

[5] Goursat, E., *Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, **6** (1904), p. 117-144.

[6] Kisyński, J., *Sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes classiques relatifs à l'équation* $s = f(x, y, z, p, q)$, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **11** (1957), p. 73-112.

[7] — *Sur les équations différentielles dans les espaces de Banach*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. des sci. math., astr. et phys., **7** (1959), p. 381-385.

[8] — *Application de la méthode des approximations successives dans la théorie de l'équation* $\partial^2 z/\partial x\partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **14** (1960), p. 63-84.

[9] — *Solutions généralisées du problème de Cauchy — Darboux pour l'équation* $\partial^2 z/\partial x\partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, **14** (1960), p. 87-109.

Streszczenie

Dowodzi się zbieżności ciągów kolejnych przybliżeń rozwiązań zadań Cauchy'ego i Goursata dotyczących równania (1) w dowolnej przestrzeni Banacha E. Metodą stosowaną w pracy [7] otrzymuje się twierdzenie o ciągłej zależności rozwiązań tych zadań od warunków początkowych i prawej strony równania, natomiast metodą Ciliberto [2] dostaje się pewne nowe twierdzenie o istnieniu rozwiązań zadania Goursata w przypadku $E = (-\infty, \infty)$.

Резюме

Доказывается, что последовательные приближения решений задач Коши и Гурсата для уравнения (1) в произволвном пространстве Банаха E сходятся. Методом применяемым в работе [7] получается теорема о непрерывной зависимости решений этих задач от начальных данных и правой стороны уравнения. Применяя метод Силиберто [2] получается одну новую теорему о существовании решений задачи Гурсата в случае $E = (-\infty, \infty)$.