ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XVI, 2 SECTIO A 1962

Z Katedry Zespołowej Matematyki Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UMCS
Kierownik: prof. dr Adam Bielecki

KONSTANTY RADZISZEWSKI

Sur la courbure intégrale d'une classe de courbes

O krzywiźnie całkowej pewnej klasy krzywych

Об интегральной кривизне одного класса кривых

Introduction

Dans ce travail, nous nous occuperons de certaines propriétés extérieures des lignes géodésiques sur une surface lisse convexe S.

La notion principale que nous utiliserons dans nos considérations est la courbure intégrale ([7], p. 182) de la courbe. Nous utilisons cette notion au lieu de celle de la courbure ponctuelle, car une surface convexe quelconque ou lisse n'admet pas de deuxième dérivée en tout point. En particulier, tout arc fermé de géodésique sur une surface convexe quelconque admet une courbure intégrale finie, alors que la courbure ponctuelle peut ne pas exister sur un ensemble dense de points.

Le but principal de ce travail et du travail [9] est de démontrer que le rayon-vecteur $r(s) = \overline{AM}$ d'une géodésique $\langle A*B \rangle$, $M \in \langle A*B \rangle$ ou d'une courbe gauche ayant des propriétés analogues peut être exprimé par la formule

$$\boldsymbol{r}(s) = s\boldsymbol{t} + \int\limits_0^s k(x)dx \cdot \boldsymbol{\nu}$$

au voisinage du point A, où s est la longueur de l'arc $\langle A*M \rangle$ de la géodésique $\langle A*B \rangle$, $\boldsymbol{t}$ le vecteur tangent unité de la géodésique $\langle A*B \rangle$ au point A, $k(s)$ la courbure intégrale de l'arc $\langle A*M \rangle$ de la géodésique $\langle A*B \rangle$, enfin $\boldsymbol{\nu}$ un vecteur qui tend vers le vecteur $\boldsymbol{n}$ normal à la surface S au point A, $|\boldsymbol{n}| = 1$.

Ce résultat précise et généralise celui de Pogorielov ([2], p. 33) qui a démontré que l'égalité

$$\boldsymbol{r}(s) = s\boldsymbol{t} + \boldsymbol{a}$$

où $|\boldsymbol{\alpha}|/s \to 0$, $\boldsymbol{\alpha}/|\boldsymbol{\alpha}| \to n$, a lieu pour les géodésiques sur des surfaces convexes lisses.

Une partie des résultats concernant les géodésiques sur les surfaces convexes lisses peut être étendue à une classe plus large. Il s'agit notamment des géodésiques sur des surfaces convexes quelconques et des courbes gauches qui ont des propriétés analogues à celle des géodésiques sur les surfaces convexes.

Les résultats obtenus pour la classe plus large de courbes ne se rapportent pourtant pas à tous les points d'une courbe donnée et les démonstrations correspondantes sont plus compliquées. C'est pourquoi il nous a semblé opportun de présenter *in extenso* la solution du problème pour les géodésiques sur les surfaces convexes lisses et de renvoyer aux remarques les théorèmes analogues pour une classe de courbes plus étendue, bien que les théorèmes énoncés dans les remarques présentent un caractère plus général.

Indépendamment de cela, en utilisant des résultats contenus dans ce travail nous avons démontré le théorème suivant:

Si S et S' sont deux surfaces convexes lisses et isométriques, contenues dans l'espace à 3 dimensions, et si cette isométrie fait correspondre à toute courbe plane $\Gamma \subset S$ une courbe $\Gamma' \subset S'$ ayant la même courbure intégrale et à toute courbe plane $\Gamma'' \subset S'$ une courbe $\Gamma''' \subset S$ ayant la même courbure intégrale, alors ces deux surfaces sont congruentes.

La démonstration de ce théorème sera publiée plus tard.

Notations et définitions

Nous utiliserons dans ce travail les notations suivantes:

$\langle A{*}B\rangle$	arc fermé de courbe d'extrémités A et B;
$(A{*}B)$	arc ouvert de courbe d'extrémités A et B;
$[A{*}B]$	longueur de l'arc $\langle A{*}B\rangle$;
$\langle AB\rangle$	segment de droite fermé d'extrémités A et B;
$[AB]$	longueur du segment de droite $\langle AB\rangle$;
$\{ABC\}$	plan passant par les points A, B et C;
$\{A, l\}$	plan passant par le point A et la droite l;
$\sphericalangle(ABC)$	angle formé par les vecteurs $\overline{BA}$ et $\overline{BC}$, $0 \leqslant \sphericalangle(ABC) \leqslant \pi$;
$\sphericalangle(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{l})$	angle formé par les vecteurs $\boldsymbol{t}$ et $\boldsymbol{l}$, $0 \leqslant \sphericalangle(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{l}) \leqslant \pi$;
$\sphericalangle(t, a)$	angle formé par la droite t et le plan a, $0 \leqslant \sphericalangle(t, a) \leqslant \pi/2$;
$\sphericalangle(a, \beta)$	angle formé par les plans a et β, $0 \leqslant \sphericalangle(a, \beta) \leqslant \pi/2$;
AB	droite passant par les points A et B;
$\overline{AB}$	vecteur d'origine A et d'extrémité B.

Soit S un domaine, c'est-à-dire un ensemble ouvert et connexe, sur une surface fermée S', limitant un solide convexe ayant des points intérieurs. La surface sera appelée lisse si elle admet en tout point un plan tangent continu. Le point $M \in S$ sera appelé lisse si la surface S admet un plan tangent continu au point M.

Nous appellerons plus court chemin $\langle A*B\rangle$ sur S, joignant les points $A \in S$ et $B \in S$, la courbe située sur S qui, de toutes les courbes joignant A et B sur S, a la plus petite longueur.

Un domaine D sur la surface S est dit convexe s'il est possible de joindre tout couple de points du domaine D par un plus court chemin appartenant au domaine D. Tout point du domaine D a un voisinage convexe.

Nous appelons géodésique $\langle A*B\rangle$ joignant les points A et B sur la surface S une courbe ayant la propriété suivante: tout point $M \in \langle A*B\rangle$ a un voisinage $U(M) \subset \langle A*B\rangle$ tel que tout arc $\langle X*Y\rangle \subset U(M)$ soit le plus court chemin joignant les points X et Y (si $M = A$ ou $M = B$, on prendra pour $U(M)$ le demi-voisinage). Evidemment le plus court chemin est une géodésique, mais non réciproquement.

Nous dirons que la courbe $\langle A*B\rangle$ admet au point $M \in \langle A*B\rangle$ une tangente $t(M)$ au sens strict, s'il existe une limite unique des droites $M'M''$, $M' \in \langle A*B\rangle$ et $M'' \in \langle A*B\rangle$, pour tous les M', $M'' \to M$, $M' \neq M''$. Dans le cas $M'' = M$, la droite $t(M)$ sera dite tangente. Plus généralement, la droite $p(M)$ qui est la limite des droites $M'M''$, $M' \in \langle A*B\rangle$, $M'' \in \langle A*B\rangle$, lorsque $M' \to M$, $M'' \to M$, sera appelée droite paratingente de la courbe au point M et l'ensemble de toutes ces droites sera appelé paratingent de la courbe au point M et désigné par $\mathscr{P}(M)$.

S'il existe une limite unique des droites $M'M''$, où $M' \in \langle M*B\rangle$ et $M'' \in \langle M*B\rangle$ ($M' \in \langle A*M\rangle$ et $M'' \in \langle A*M\rangle$) pour tous les M', $M'' \to M$, cette limite sera appelée tangente à droite (à gauche) au sens strict et désignée par $t^+(M)(t^-(M))$.

D'une façon analogue, passant à la limite avec le vecteur $\overline{M'M''}/|\overline{M'M''}|$ on obtient dans le cas où le point M'' correspond à une valeur du paramètre plus grande que le point M' (autrement dit, si $M'' \in \langle M'*B\rangle$): le vecteur tangent au sens strict, le vecteur tangent, le vecteur paratingent, le paratingent de vecteurs, le vecteur tangent à droite (à gauche) au sens strict de la courbe $\langle A*B\rangle$ au point M et nous les désignerons respectivement par $\mathbf{t}(M)$, $\mathbf{t}(M)$, $\mathbf{p}(M)$, $\mathbf{P}(M)$, $\mathbf{t}^+(M)$, $(\mathbf{t}^-(M))$.

Si les points M' et M'' correspondent à des valeurs différentes du paramètre, mais se confondent dans l'espace, nous entendrons par $M'M''$ chaque droite passant par le point M'.

Dans le cas où la courbe $\langle A*B\rangle$ est rectifiable, au lieu d'écrire $t(M)$, $\mathbf{t}(M)$ etc. nous utiliserons aussi les notations $t(s)$, $\mathbf{t}(s)$ etc., où $s = [A*M]$.

Une géodésique $\langle A*B\rangle$ sur une surface convexe admet en tout point des vecteurs $\mathbf{t}^+(M)$ et $\mathbf{t}^-(M)$ et l'on a $\lim\limits_{M\to M_0+} \mathbf{t}^+(M) = \lim\limits_{M\to M_0+} \mathbf{t}^-(M) =$

$= \boldsymbol{t}^-(M_0)$, $\lim_{M \to M_0 -} \boldsymbol{t}^-(M) = \lim_{M \to M_0 -} \boldsymbol{t}^+(M) = \boldsymbol{t}^+(M_0)$. Une géodésique sur une surface convexe lisse admet une tangente au sens strict.

Si l'on place l'origine du vecteur paratingent $\boldsymbol{p}(M)$ d'une courbe $\langle A*B \rangle$ en un point fixe O, son extrémité décrit sur la surface de la sphère-unité un ensemble $\langle\langle A*B \rangle\rangle$ lorsque M parcourt l'arc $\langle A*B \rangle$. L'ensemble $\langle\langle A*B \rangle\rangle$ sera appelé indicatrice sphérique de la courbe $\langle A*B \rangle$.

Si l'indicatrice sphérique d'une courbe $\langle A*B \rangle$ est une courbe rectifiable $\langle\langle A*B \rangle\rangle$, la longueur de la courbe $\langle\langle A*B \rangle\rangle$ sera dite courbure intégrale de la courbe $\langle A*B \rangle$ et notée $k(\langle A*B \rangle) = [\langle\langle A*B \rangle\rangle]$. Il résulte de la définition que les courbes admettant un vecteur tangent continu ont une courbure intégrale finie si, et seulement si le vecteur tangent $\boldsymbol{t}(M)$, $|\boldsymbol{t}(M)| = 1$, est à variation bornée.

Nous appellerons plan osculateur au sens de Menger d'une courbe $\langle A*B \rangle$ au point $M \in \langle A*B \rangle$ la limite unique des plans passant par les points M', M'', M''' de la courbe $\langle A*B \rangle$ lorsque ces points tendent d'une façon arbitraire vers le point M, $M' \neq M'' \neq M''' \neq M'$. Comme dans ce travail et dans le travail [9] nous n'aurons à considérer que des plans de ce type, les plans osculateurs seront toujours entendus au sens de Menger.

D'une façon générale, la limite des plans passant par trois points différents M', M'', M''' de la courbe $\langle A*B \rangle$ lorsque ces points tendent vers le point M sera appelée plan paratingent et désignée par $\sigma(M)$, l'ensemble de ces plans au point M sera dit paratingent de plans et noté $\pi(M)$.

Nous appellerons vecteur normal $\boldsymbol{n}(M)$ du plan osculateur de la courbe $\langle A*B \rangle$ au point M la limite unique des vecteurs $\overline{M'M''} \times \overline{M''M'''} / |\overline{M'M''} \times \overline{M''M'''}|$ lorsque les points M', M'', M''' de la courbe $\langle A*B \rangle$ tendent vers le point M de manière que les valeurs du paramètre τ', τ'', τ''' correspondant à ces points satisfont à la condition $\tau' < \tau'' < \tau'''$, (ou, autrement dit $M'' \in \langle M'*B \rangle$, $M''' \in \langle M''*B \rangle$). Le plan osculateur muni d'un vecteur normal ainsi déterminé sera appelé plan osculateur orienté et noté $\boldsymbol{\sigma}(M)$.

D'une façon générale, le plan paratingent muni d'un vecteur normal déterminé de la façon indiquée sera appelé plan paratingent orienté et noté $\boldsymbol{\sigma}(M)$. L'ensemble de tous les plans $\boldsymbol{\sigma}(M)$ en un point donné de la courbe sera dit paratingent des plans orientés et noté $\boldsymbol{\pi}(M)$.

Dans le cas où les points M', M'', M''' sont en ligne droite, comme plan passant par ces points on peut admettre un plan quelconque passant par eux, celui qui convient le mieux au problème considéré. Si la courbe $\langle A*B \rangle$ contient un segment de droite, on prendra pour plan osculateur aux points de ce segment un plan quelconque, celui qui convient le mieux au problème considéré, mais le même pour tous les points du segment.

Si la courbe $\langle A*B\rangle$ admet un vecteur tangent continu et un plan osculateur orienté continu, sa courbure intégrale peut être définie comme il suit: Considérons la ligne brisée $W_n:\langle M_0, M_1, \ldots, M_n\rangle$ inscrite dans $\langle A*B\rangle$, $[A*M_i]<[A*M_{i+1}]$. Désignons les extrémités des vecteurs $\overline{M_iM_{i+1}}/|M_iM_{i+1}|$, d'origine O, par $\overline{M}_{i+1}$ et joignons-les sur la surface de la sphère-unité par des arcs de grands cercles de longueur inférieure à π. Nous obtenons ainsi, sur la surface de la sphère, une ligne brisée sphérique $\overline{W}_n:\langle \overline{M}_1, \overline{M}_2, \ldots, \overline{M}_n\rangle$ (indicatrice sphérique de la ligne brisée W_n). Il est évident que $\overline{W}_n$ tend vers l'indicatrice sphérique de la courbe $\langle A*B\rangle$. Dans le travail [7] il a été communiqué que la longueur de la ligne brisée $\overline{W}_n$ tend vers la courbure intégrale $k(\langle A*B\rangle)$. La courbure intégrale de la courbe $\langle A*B\rangle$ donc peut être définie comme la limite des courbures intégrales des lignes brisées inscrites W_n.

Liberman ([1], p. 146) a prouvé que le vecteur tangent $\vec{t}^+(M)$ du plus court chemin $\langle A*B\rangle$ sur une surface convexe est un vecteur à variation bornée, d'où il s'ensuit que la courbe $\langle\langle A*B\rangle\rangle$ est rectifiable.

Le point M_0 de la surface convexe S est appelé point d'arête s'il existe une seule droite l_0 appuyant S au point M_0 telle que

$$l_0 \subset \lim_{M_n\to M_0} \tau(M_n)$$

pour toutes les suites convergentes de plans d'appui $\tau(M_n)$ de la surface S, $M_n\in S$. La droite l_0 sera appelée arête de la surface au point M_0.

La convergence d'une suite de courbes $\langle A_n*B_n\rangle$ vers une courbe $\langle A*B\rangle$ sera entendue de telle façon que l'on peut référer les courbes $\langle A_n*B_n\rangle$ et $\langle A*B\rangle$ à un paramètre commun φ, pour lequel sera satisfaite la condition: pour tout $\varepsilon>0$ il existe un indice n_0 tel que pour $n>n_0$ on ait $[M_n(\varphi), M(\varphi)]<\varepsilon$ pour tous les φ simultanément, où $\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1$, $M_n(\varphi)\in\langle A_n*B_n\rangle$, $M(\varphi)\in\langle A*B\rangle$.

Remarque 1. Nous désignerons par $\mathscr{K}$ la classe des courbes $\langle A*B\rangle$ qui vérifient les conditions suivantes:

La courbe $\langle A*B\rangle$ admet en tout point les vecteurs demi-tangents $\boldsymbol{t}^+(M)$ et $\boldsymbol{t}^-(M)$ tels que

$$\lim_{M\to M_0+} \boldsymbol{t}^+(M) = \lim_{M\to M_0+} \boldsymbol{t}^-(M) = \boldsymbol{t}^+(M_0),$$

$$\lim_{M\to M_0-} \boldsymbol{t}^+(M) = \lim_{M\to M_0-} \boldsymbol{t}^-(M) = \boldsymbol{t}^-(M_0), \qquad \boldsymbol{t}^+(M_0) \neq -\boldsymbol{t}^-(M_0).$$

Il résulte de la définition que si la courbe $\langle A*B\rangle\in\mathscr{K}$, ses vecteurs demi-tangents $\boldsymbol{t}^+(M)$ et $\boldsymbol{t}^-(M)$ ont un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité.

Observons que le nombre des points de la courbe $\langle A*B\rangle$ pour lesquels $\sphericalangle(\boldsymbol{t}^-, \boldsymbol{t}^+) > a > 0$ est fini ([5], p.17).

Les courbes de la classe $\mathscr{K}$ sont rectifiables, on peut donc prendre pour paramètre la longueur de l'arc s.

Le paratingent de la courbe $\langle A*B\rangle \epsilon \mathscr{K}$ est plan en tout point. Cela résulte immédiatement du fait que si M_i et N_i sont des points sur $\langle A*B\rangle$ tendant vers M et tels que le point M les sépare sur $\langle A*B\rangle$, et $0 < \sphericalangle(\boldsymbol{t}^-(M), \boldsymbol{t}^+(M))$, alors les plans $\{M_iMN_i\}$ tendent vers un plan passant par les demi-tangentes $t^-(M)$ et $t^+(M)$, donc la limite des droites M_iN_i sera aussi contenue dans ce plan. Dans les autres cas, la limite des droites M_iN_i est une des demi-tangentes.

En tenant compte de ces remarques on peut construire l'indicatrice sphérique d'une courbe $\langle A*B\rangle \epsilon \mathscr{K}$ de la manière suivante:

Prenant un même point 0 pour origine, menons les vecteurs $\boldsymbol{t}^+(M)$ et $\boldsymbol{t}^-(M)$. Aux points pour lesquels $\boldsymbol{t}^+ \neq \boldsymbol{t}^-$ nous joignons les extrémités des vecteurs $\boldsymbol{t}^+$ et $\boldsymbol{t}^-$ sur la sphère-unité par un arc de grand cercle de longueur inférieure à π. On obtient ainsi une courbe continue $\langle\langle A*B\rangle\rangle$ qui est l'indicatrice sphérique de la courbe $\langle A*B\rangle$ de classe $\mathscr{K}$. Si la courbe $\langle\langle A*B\rangle\rangle$ est rectifiable, sa longueur est la courbure intégrale de la courbe $\langle A*B\rangle$.

Si W_n est une ligne brisée inscrite dans la courbe $\langle A*B\rangle \epsilon \mathscr{K}$ et si la courbe $\langle A*B\rangle$ admet en tout point des plans osculateurs orientés à droite et à gauche, alors la courbe $\langle A*B\rangle$ a une courbure intégrale finie que l'on peut définir comme la limite des courbures intégrales des lignes brisées W_n.

Quelques lemmes

Lemme 1. *Soit une courbe $\langle A*B\rangle$ admettant un vecteur tangent continu $\boldsymbol{t}(M)$, $|\boldsymbol{t}(M)| = 1$, $M \epsilon \langle A*B\rangle$.*

$$\textit{Si} \quad \sphericalangle[\boldsymbol{t}(M), \overline{AB}] < \varepsilon < \frac{\pi}{4}, \textit{ on a } [A*B] \leqslant [AB]/\cos\varepsilon.$$

Démonstration. De l'hypothèse il résulte que la courbe $\langle A*B\rangle$ est rectifiable. Dans la courbe $\langle A*B\rangle$ inscrivons la ligne brisée W_n: $\langle M_0^n = A, M_1^n, \ldots, M_n^n = B\rangle$, $[A*M_i^n] < [A*M_{i+1}^n]$. Soit, pour $n > n_0$,

$$(1) \qquad [W_n] > [A*B] - \varepsilon_1$$

et pour $M \epsilon \langle M_i^n * M_{i+1}^n\rangle$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$(2) \qquad \sphericalangle[\boldsymbol{t}(M), \overline{M_i^n M_{i+1}^n}] < \varepsilon_2$$

ce qui est toujours possible, car les droites $M_i^n M_{i+1}^n$ tendent vers les tangentes de la courbe $\langle A*B\rangle$; d'autre part, s'il existait une suite de lignes brisées W_{n_k} à cordes maximales tendant vers zéro et telles que sur les arcs $\langle M_{i_k}^{n_k} * M_{i_{k+1}}^{n_k} \rangle \subset \langle A*B \rangle$ il existe un point P_{i_k} satisfaisant à l'inégalité

$$\measuredangle [\boldsymbol{t}(P_{i_k}), \overline{M_{i_k}^{n_k} M_{i_{k+1}}^{n_k}}] \geqslant \varepsilon_2 > 0,$$

alors on pourrait extraire une sous-suite convergente $P_{i_k} \to P \in \langle A*B \rangle$ et, le vecteur tangent étant continu, on aurait $\boldsymbol{t}(P_{i_k}) \to \boldsymbol{t}(P)$. Comme $P_{i_k} \in \langle M_{i_k}^{n_k} * M_{i_{k+1}}^{n_k} \rangle$, il viendrait $M_{i_k}^{n_k} \to P$, $M_{i_{k+1}}^{n_k} \to P$ et, compte tenu de l'existence d'une tangente au sens strict, on aurait

$$\overline{M_{i_k}^{n_k} M_{i_{k+1}}^{n_k}} / |\overline{M_{i_k}^{n_k} M_{i_{k+1}}^{n_k}}| \to \boldsymbol{t}(P).$$

Donc

$$\measuredangle [\overline{M_{i_k}^{n_k} M_{i_{k+1}}^{n_k}}, \boldsymbol{t}(P)] \to 0 \quad \text{et} \quad \measuredangle [\boldsymbol{t}(P_{i_k}), \boldsymbol{t}(P)] \to 0,$$

d'où

$$\measuredangle [\boldsymbol{t}(P_{i_k}), \overline{M_{i_k}^{n_k} M_{i_{k+1}}^{n_k}}] \to 0,$$

en contradiction avec l'hypothèse

$$\measuredangle [\boldsymbol{t}(P_{i_k}), \overline{M_{i_k}^{n_k} M_{i_{k+1}}^{n_k}}] \geqslant \varepsilon_2 > 0.$$

Par les points M_i^n menons les plans α_i^n perpendiculaires à la droite AB. Les plans α_i^n coupent la droite AB aux points N_i^n, $i = 0, 1, \ldots, n$. Il est évident que $N_i^n \in \langle AB \rangle$ et $[AN_i^n] < [AN_{i+1}^n]$, pourvu que ε et ε_2 soient suffisamment petits, d'où

$$\sum_{i=0}^{n-1} [N_i^n N_{i+1}^n] = [AB].$$

D'après l'hypothèse et (2) on a $\measuredangle [\boldsymbol{t}(M), \overline{AB}] < \varepsilon$ et $\measuredangle [\boldsymbol{t}(M), \overline{M_i^n M_{i+1}^n}] < \varepsilon_2$, donc $\measuredangle [(\overline{M_i^n M_{i+1}^n}, \overline{AB})] < \varepsilon + \varepsilon_2$ d'où, $\langle N_i^n N_{i+1}^n \rangle$ étant la projection orthogonale de $\langle M_i^n M_{i+1}^n \rangle$ sur la droite AB, il vient $[N_i^n N_{i+1}^n]:$ $:[M_i^n M_{i+1}^n] > \cos(\varepsilon + \varepsilon_2)$ et

$$\sum_{i=0}^{n-1} [M_i^n M_{i+1}^n] < \sum_{i=0}^{n-1} [N_i^n N_{i+1}^n] : \cos(\varepsilon + \varepsilon_2) = [AB] : \cos(\varepsilon + \varepsilon_2)$$

c'est-à-dire $[W_n] < [AB]:\cos(\varepsilon + \varepsilon_2)$ et, compte tenu de (1) $[A*B] - \varepsilon_1 \leqslant$ $\leqslant [AB]:\cos(\varepsilon + \varepsilon_2)$. ε_1 et ε_2 étant arbitrairement petits, on a $[A*B] \leqslant$ $\leqslant [AB]/\cos \varepsilon$. Le lemme est donc démontré.

Remarque 2. De même que dans le lemme 1 on peut prouver que pour une suite de lignes brisées W_n inscrites dans la courbe $[A*B] \in K$ il existe un point $C_i^n \in \langle M_i^n * M_{i+1}^n \rangle$ et un vecteur paratingent $\boldsymbol{p}(C_i^n)$ en ce point tels que $\measuredangle (\boldsymbol{p}(C_i^n), \overline{M_i^n M_{i+1}^n}) < \varepsilon_2$. En répétant le raisonnement du lemme 1 on obtient (3), d'où il s'ensuit que, la courbe $\langle A*B\rangle \epsilon \mathscr{K}$ pouvant être décomposée en un nombre fini d'arcs vérifiant la condition du lemme 1, les courbes de la classe $\mathscr{K}$ sont rectifiables.

Lemme 2. *Soit une suite de courbes $\langle A_n*B_n\rangle$ admettant un vecteur tangent continu $\boldsymbol{t}(M_n)$, $|\boldsymbol{t}(M_n)| = 1$, et tendant vers la courbe $\langle A*B\rangle$ qui admet un vecteur tangent continu $\boldsymbol{t}(M)$, $|\boldsymbol{t}(M)| = 1$.*

Si pour toute suite de points $M_n \to M$, $M_n \epsilon \langle A_n*B_n\rangle$, $M \epsilon \langle A*B\rangle$, on a $\boldsymbol{t}(M_n) \to \boldsymbol{t}(M)$, alors $[A_n*B_n] \to [A*B]$.

Démonstration. Supposons que les courbes $\langle A_n*B_n\rangle \to \langle A*B\rangle$.

Observons que le vecteur $\boldsymbol{t}(M_n)$ tend uniformément vers $\boldsymbol{t}(M)$, lorsque $\langle A_n*B_n\rangle \to \langle A*B\rangle$, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un indice n_0 tel que pour tout point $M_n \epsilon \langle A_n*B_n\rangle$, $n > n_0$, il existe un point $M \epsilon \langle A*B\rangle$ satisfaisant à

$$|\boldsymbol{t}(M_n) - \boldsymbol{t}(M)| < \varepsilon \tag{3}$$

(en effet, s'il existait une sous-suite $\langle A_{n_k}*B_{n_k}\rangle$ telle que sur toute $\langle A_{n_k}*B_{n_k}\rangle$ il y aurait un point $P_{n_k} \epsilon \langle A_{n_k}*B_{n_k}\rangle$ satisfaisant à l'inégalité $|\boldsymbol{t}(P_{n_k}) - \boldsymbol{t}(P)| \geqslant \varepsilon$ pour tous les points $P \epsilon \langle A*B\rangle$, alors on pourrait extraire de la suite P_{n_k} une sous-suite tendant vers $P_0 \epsilon \langle A*B\rangle$, soit P_{n_k}. On aurait donc en vertu de l'hypothèse $|\boldsymbol{t}(P_{n_k}) - \boldsymbol{t}(P_0)| \to 0$, en contradiction avec la supposition que $|\boldsymbol{t}(P_{n_k}) - \boldsymbol{t}(P_0)| \geqslant \varepsilon > 0$).

Soit maintenant $W^k: \langle M^0 = A, M^1, \ldots, M^k = B\rangle$ une ligne brisée, $[A*M^i] < [A*M^{i+1}]$, inscrite dans $\langle A*B\rangle$ et telle que l'on ait, pour $k > n_1$,

$$[W^k] > [A*B] - \varepsilon_1 \tag{4}$$

et pour tout $M \epsilon \langle M^i*M^{i+1}\rangle$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$,

$$\sphericalangle[\boldsymbol{t}(M), \overline{M^iM^{i+1}}] < \varepsilon_2 \tag{5}$$

ce qui peut être réalisé comme dans la démonstration du lemme 1.

Soit $W_k^n: \langle M_n^0 = A_n, M_n^1, \ldots, M_n^k = B\rangle$ une ligne brisée inscrite dans la courbe $\langle A_n*B_n\rangle$ et satisfaisant à la condition

$$\lim_{n\to\infty} M_n^i = M^i, \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Pour $n > n_2$ on aura

$$|[W^k] - [W_n^k]| < \varepsilon_3 \tag{6}$$

et

$$\sphericalangle(\overline{M^iM^{i+1}}, \overline{M_n^iM_n^{i+1}}) < \varepsilon_4, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{7}$$

Considérons l'indice $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$, alors, compte tenu de (3), (4), (7) nous aurons, pour $n > n_3$, $k > n_3$, $M_n \epsilon \langle M_n^i*M_n^{i+1}\rangle$, $M \epsilon$ $\epsilon \langle M^i*M^{i+1}\rangle$,

$$\sphericalangle[\boldsymbol{t}(M_n), \overline{M_n^i M_n^{i+1}}] \leqslant \sphericalangle[\boldsymbol{t}(M_n), \boldsymbol{t}(M)] + \sphericalangle[\boldsymbol{t}(M), \overline{M_n^i M_n^{i+1}}] \leqslant$$
$$\leqslant \sphericalangle[\boldsymbol{t}(M_n), \boldsymbol{t}(M)] + \sphericalangle[\boldsymbol{t}(M), \overline{M^i M^{i+1}}] + \sphericalangle[\overline{M^i M^{i+1}}, \overline{M_n^i M_n^{i+1}}] \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 = \varepsilon_5.$$

D'où, en vertu du lemme 1, il vient

$$(8) \qquad [M_n^i * M_n^{i+1}] \leqslant [M_n^i M_n^{i+1}]/\cos\varepsilon_5.$$

Comme i ne dépend pas de ε_5, on tire de (8)

$$(9) \qquad [W_n^k] \leqslant [A_n * B_n] \leqslant [W_n^k]/\cos\varepsilon_5$$

pour $n > n_3$, $k > n_3$. Mais, à cause de (6), on a pour $n > n_3$

$$[W^k] - \varepsilon_3 < [W_n^k] < [W^k] + \varepsilon_3$$

et, d'après (4), on a pour $k > n_3$

$$[A*B] - \varepsilon_1 < [W^k] < [A*B].$$

En ajoutant les deux dernières inégalités on obtient $[A*B] - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 < < [W_n^k] < [A*B] + \varepsilon_3$ et, compte tenu de (9)
$[A*B] - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 < [A_n * B_n] < ([A*B] + \varepsilon_3)/\cos\varepsilon_5$.

Puisque ε_1, ε_3 et ε_5 peuvent être arbitrairement petits, on trouve $[A_n * B_n] \to [A*B]$.

Le lemme 2 est ainsi démontré.

Remarque 3. Moyennant quelques compléments, on peut établir un lemme analogue pour les courbes de la classe $\mathscr{K}$. En effet, on a:

Lemme 2'. *Soit* $\langle A_n * B_n \rangle \in \mathscr{K}$, $\langle A*B \rangle \in K$ *et* $\langle A_n * B_n \rangle \to \langle A*B \rangle$.

Si $\lim \boldsymbol{t}^+(M_n) \subset \boldsymbol{P}(M)$ *pour* $M_n \to M$, *où* $\boldsymbol{t}^+(M_n)$ *est le vecteur tangent à droite à la courbe* $\langle A_n * B_n \rangle$ *au point* $M_n \in \langle A_n * B_n \rangle$ *et* $\boldsymbol{P}(M)$ *est le paratingent de vecteurs de la courbe* $\langle A*B \rangle$ *au point* $M \in \langle A*B \rangle$, *alors* $[A_n * B_n] \to \to [A*B]$.

D é m o n s t r a t i o n. Tout point $M \in \langle A*B \rangle$ admet un voisinage $\hat{U}(M) \subset \subset \langle A*B \rangle$ (non nécessairement ouvert, mais connexe et ayant des points intérieurs) tel que si le point $M' \in \hat{U}(M)$, alors

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\sphericalangle[\boldsymbol{t}^+(M'), \boldsymbol{t}^-(M)] < \varepsilon \quad \text{pour} \quad M' \in \langle A*M \rangle, \\ &\sphericalangle[\boldsymbol{t}^+(M'), \boldsymbol{t}^+(M)] < \varepsilon \quad \text{pour} \quad M' \in \langle M*B \rangle. \end{aligned}$$

Si l'on rejette les extrémités éventuelles des arcs $\hat{U}(M)$, on obtient des voisinages ouverts $U(M)$ des points M. En vertu du lemme de Borel il existe un nombre fini de voisinages $U(M)$ recouvrant la courbe $\langle A*B \rangle$. Supposons que les points dont les voisinages ont la propriété de recouvrir la courbe $\langle A*B \rangle$ soient $N_1 = A, N_2, \ldots, N_k = B$, $[A*N_i] < [A*N_{i+1}]$.

Prenons la ligne brisée $W^m: \langle M^0 = A, M^1, \dots, M^m = B\rangle$ inscrite dans $\langle A*B\rangle$, telle que tous les points N_i sont ses sommets, $[A*M^i] < [A*M^{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, et qu'il existe un point $M^i \in U(N_j)U(N_{j+1})$ pour chaque $j = 1, 2, \dots, k-1$.

Il résulte du choix des points M^i que M^i et M^{i+1} appartiennent au même voisinage $U(N_j)$ d'un point N_j et que le point N_j ne les sépare pas De là et de (10) il suit qu'il existe un point N_j tel que

$$(11)\quad \begin{aligned} &\sphericalangle[t^+(M), t^+(N_j)] < \varepsilon \quad \text{si} \quad \langle M^i * M^{i+1}\rangle \subset \langle N_j * B\rangle, \\ &\sphericalangle[t^+(M), t^-(N_j)] < \varepsilon \quad \text{si} \quad \langle M^i * M^{i+1}\rangle \subset \langle A * N_j\rangle, \end{aligned}$$

pour $M \in \langle M^i * M^{i+1}\rangle$ (nous admettons $t^+(M^{i+1}) = t^-(M^{i+1})$).

Considérons l'arc $\langle M^i * M^{i+1}\rangle \subset \langle A*B\rangle$ et prenons une subdivision de la courbe $\langle A*B\rangle$ par les points M^i assez fine pour que l'on ait

$$(12)\quad \sphericalangle[t^+(M^i), \overline{M^i M^{i+1}}] < \varepsilon_1 = 2\varepsilon, \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

(Nous allons prouver qu'une telle subdivision est possible. Pour $M \in \langle N_j * N_{j+1}\rangle$ on a, à cause de (10), $\sphericalangle[t^\pm(M), t^+(N_j)] < \varepsilon$ ou bien $\sphericalangle[t^\pm(M) t^-(N_{j+1})] < \varepsilon$. Soit $\langle M^p = N_j, M^{p+1}, \dots, M^{p+r} = N_{j+1}\rangle$ la partie de la ligne brisée W^m inscrite dans l'arc $\langle N_j * N_{j+1}\rangle$. Si pour une suite partielle W^{m_k} on avait $\sphericalangle[t^+(M^{p+i_k}), \overline{M^{p+i_k} M^{p+i_k+1}}] \geqslant 2\varepsilon$, il existerait une suite partielle $M^{p+i_k} \to M' \in \langle N_j * N_{j+1}\rangle$ et

$$\overline{M^{p+i_k} M^{p+i_k+1}} / |\overline{M^{p+i_k} M^{p+i_k+1}}| \to p(M').$$

D'autre part, les vecteurs $t^+(M^{p+i_k})$ auraient une suite partielle convergeant vers $t^\pm(M')$ et il viendraient $\sphericalangle[p(M'), t^\pm(M')] \geqslant 2\varepsilon$. Mais $\sphericalangle[t^+(M'), t^-(M')] \geqslant \sphericalangle[p(M'), t^\pm(M') \geqslant 2\varepsilon$. Si au point M' on avait, par exemple, $\sphericalangle[t^+(M'), t^+(N_j)] < \varepsilon$ et $\sphericalangle[t^-(M'), t^+(N_j)] < \varepsilon$, alors $\sphericalangle[t^+(M'), t^-(M')] \leqslant \sphericalangle[t^+(M'), t^+(N_j)] + \sphericalangle[t^+(N_j), t^-(M')] < 2\varepsilon$ et il y aurait contradiction. Le nombre des arcs $\langle N_j * N_{j+1}\rangle$ étant fini, on a donc (12) pour tous les $i = 0, 1, \dots, m-1$, pourvu que $m > m_1$).

De (11) et (12) résulte que l'on aura, pour tout point $M \in \langle M^i * M^{i+1}\rangle$,

$$\sphericalangle[t^+(M), \overline{M^i M^{i+1}}] \leqslant \sphericalangle[t^+(M), t^+(M^i)] + \sphericalangle[t^+(M^i), \overline{M^i M^{i+1}}] \leqslant$$

$$\sphericalangle[t^+(M), t^\pm(N_j)] + \sphericalangle[t^\pm(N_j), t^+(M^i)] + \sphericalangle[t^+(M^i), \overline{M^i M^{i+1}}] < 4\varepsilon$$

où, dans $t^\pm(N_j)$, il faut prendre le signe $+$ lorsque $\langle M^i * M^{i+1}\rangle \subset \langle N_j * N_{j+1}\rangle$ ou le signe $-$ lorsque $\langle M^i * M^{i+1}\rangle \subset \langle N_{j-1} * N_j\rangle$, (on admet $t^+(M^{i+1}) = t^-(M^{i+1})$). Il en résulte que pour un vecteur paratingent arbitraire $p(M) \in P(M)$, $M \in \langle M^i * M^{i+1}\rangle$, $i = 0, 1, \dots, m-1$,

$$(13)\quad \sphericalangle[p(M), \overline{M^i M^{i+1}}] < 4\varepsilon$$

(pour les points M^i et M^{i+1} on admet ici $\boldsymbol{P}(M^i) = \boldsymbol{t}^+(M^i)$, $\boldsymbol{P}(M^{i+1}) = \boldsymbol{t}^-(M^{i+1})$).

Soient donnés des points $M_n^{0+} = A_n, M_n^{1-}, M_n^{i+}, \ldots, M_n^{m-1+}, M_n^{m-} = B$ sur la courbe $\langle A_n * B_n\rangle$, où $[A_n * M_n^{i-}] \leqslant [A * M_n^{i+}], [A_n * M_n^{i+}] < [A_n * M_n^{i+1-}]$, et admettons que $M_n^{i-} \to M^i$, $M_n^{i+} \to M^i$, $\boldsymbol{t}^-(M_n^{i-}) \to \boldsymbol{t}^-(M^i)$ et $\boldsymbol{t}^+(M_n^{i+}) \to \boldsymbol{t}^+(M^i)$ lorsque $\langle A_n * B_n\rangle \to \langle A * B\rangle$. De tels points existent, car si

$$M_n \to M \epsilon (M^{i-1} * M^i), \quad \lim_{M_n \to M} \boldsymbol{t}^\pm(M_n) \subset \boldsymbol{P}(M),$$

$$\lim M = M^i, \quad \lim_{M \to M^i} \boldsymbol{P}(M) = \boldsymbol{t}^-(M^i),$$

on a

$$\lim_{M_n \to M_n^{i-}} \boldsymbol{t}^\pm(M_n) = \boldsymbol{t}^-(M_n^{i-}), \quad \lim_{M_n^{i-} \to M^i} \boldsymbol{t}^-(M_n^{i-}) = \boldsymbol{t}^-(M^i).$$

Désignons par W_n^m la ligne brisée $M_n^{0+}, M_n^{1-}, \ldots, M_n^{m-}$. Evidemment $[W_n^m] \to [W^m]$ et $[W^m] \to [A * B]$.

Remarquons ensuite que les $\boldsymbol{t}^+(M_n)$ tendent uniformément vers $\boldsymbol{p}(M) \epsilon \boldsymbol{P}(M)$, $M_n \epsilon \langle M_n^{i+} * M_n^{i+1-}\rangle \subset \langle A_n * B_n\rangle$, $M \epsilon \langle M^i * M^{i+1}\rangle \subset \langle A * B\rangle$, où l'on admet $\boldsymbol{p}(M^i) = \boldsymbol{t}^+(M^i)$, $\boldsymbol{p}(M^{i+1}) = \boldsymbol{t}^-(M^{i+1})$. En effet, s'il existait une suite

$$M_{n_k} \epsilon \langle M_{n_k}^{i_k+} * M_{n_k}^{i_k+1-}\rangle$$

telle que $\sphericalangle[\boldsymbol{t}^+(M_{n_k}), \boldsymbol{p}(M)] \geqslant \varepsilon$ pour tous les $M \epsilon \langle M^i * M^{i+1}\rangle$ et $\boldsymbol{p}(M) \epsilon \boldsymbol{P}(M)$, il existerait une suite partielle M_{n_k} convergeant vers $M' \epsilon \langle M^i * M^{i+1}\rangle$ et l'hypothèse du lemme entraînerait $\boldsymbol{t}^+(M_{n_k}) \to \boldsymbol{p}(M')$, en contradiction avec la supposition $[\boldsymbol{t}^+(M_{n_k}), \boldsymbol{p}(M)] \geqslant \varepsilon$.

Par conséquent, pour $n > n_0$ et pour tout vecteur $\boldsymbol{t}^+(M_n)$, $M_n \epsilon \langle M_n^{i+} * M_n^{i+1-}\rangle$, il existe un vecteur $\boldsymbol{p}(M) \epsilon \boldsymbol{P}(M)$, $M \epsilon \langle M^i * M^{i+1}\rangle$, tel que

$$\sphericalangle[\boldsymbol{t}^+(M_n), \boldsymbol{p}(M)] < \varepsilon \tag{14}$$

En outre, comme W_n^m tend vers W^m,

$$\sphericalangle(\overline{M_n^{i+} M_n^{i+1-}}, \overline{M^i M^{i+1}}) < \varepsilon \tag{15}$$

En tenant compte de (13), (14) et (15) on trouve pour $M_n \epsilon \langle M_n^{i+} * M_n^{i+1-}\rangle$,

$$\sphericalangle[\boldsymbol{t}^+(M_n), \overline{M_n^{i+} M_n^{i+1-}}] \leqslant \sphericalangle[\boldsymbol{t}^+(M_n), \boldsymbol{p}(M)] + \sphericalangle[\boldsymbol{p}(M), \overline{M_n^{i+} M_n^{i+1-}}] \leqslant$$
$$\leqslant \sphericalangle[\boldsymbol{t}^+(M_n), \boldsymbol{p}(M)] + \sphericalangle[\boldsymbol{p}(M), \overline{M^i M^{i+1}}] + \sphericalangle[\overline{M^i M^{i+1}}, \overline{M_n^{i+} M_n^{i+1-}}] <$$
$$< 4\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 6\varepsilon.$$

Remarquons qu'il en résulte une évaluation pour un vecteur paratingent quelconque $\boldsymbol{p}(M_n)$ de l'arc $\langle M_n^{i+} * M_n^{i+1-}\rangle$.

En appliquant ensuite le lemme 1, qui s'étend sans modification aux courbes de la classe $\mathscr{K}$, on obtient $[M_n^{i+}*M_n^{i+1-}] \leqslant [M_n^{i+} M_n^{i+1-}]/\cos 6\varepsilon$.

En s'appuyant sur le fait que

$$\sum_{i=1}^{m-1} [M_n^{i-}*M_n^{i+}] < \varepsilon$$

pour $n > n_1$ et en répétant le raisonnement du lemme 2, on obtient la conclusion.

(Le fait que $[M_n^{i-}*M_n^{i+}] \to 0$, lorsque $M_n^{i-} \to M^i$, $M_n^{i+} \to M^i$, résulte de ce que $\sphericalangle[\boldsymbol{t}^-(M^i), \boldsymbol{t}^+(M^i)] = \varphi < \pi$. En effet, dans l'arc $\langle M_n^{i-}*M_n^{i+}\rangle$ on inscrit une ligne brisée $L_n^p = \langle P_n^0 = M_n^{i-}, P_n^1, \ldots, P_n^p = M_n^{i+}\rangle$ telle que $[M_n^{i-}*M_n^{i+}] = [L_n^p] + \varepsilon_n$ et $\sphericalangle[\overline{P_n^j P_n^{j+1}}, \boldsymbol{p}(P_n)] < \varepsilon$ pour tous les $j = 0, 1, \ldots, p-1$, où $\boldsymbol{p}(P_n)$ est le vecteur paratingent de la courbe $\langle M_n^{i-}*M_n^{i+}\rangle$ en un point P_n de celle-ci et où l'on admet $\boldsymbol{P}(M_n^{i-}) = \boldsymbol{t}^+(M_n^{i-})$, $\boldsymbol{P}(M_n^{i+}) = \boldsymbol{t}^-(M_n^{i+})$. Comme les limites des vecteurs $\boldsymbol{p}(P_n)$ sont contenues dans l'angle $\sphericalangle[\boldsymbol{t}^-(M^i), \boldsymbol{t}^+(M^i)]$ et font avec sa bissectrice $\overline{M^iN}$ un angle inférieur ou égal à $\varphi/2$, les vecteurs $\boldsymbol{p}(P_n)$, pour $n > n'$, feront avec le vecteur $\overline{M^iN}$ un angle inférieur à ψ, $\varphi/2 < \psi < \pi/2$. Projetons maintenant la ligne brisée L_n^p perpendiculairement sur la droite M^iN. On obtient sur la droite M^iN une suite de points $\overline{P}_n^0, \overline{P}_n^1, \ldots, \overline{P}_n^p$, les projections des points $P_n^0, P_n^1, \ldots, P_n^p$. Evidemment $[M^i\overline{P}_n^j] < [M^i\overline{P}_n^{j+1}]$ et $[P_n^jP_n^{j+1}] \leqslant$ $\leqslant [\overline{P}_n^j\overline{P}_n^{j+1}]/\cos\psi$, d'où $[L_n^p] = [M_n^{i-}*M_n^{i+}] - \varepsilon_n \leqslant [\overline{P}_n^0\overline{P}_n^p]/\cos\psi \to 0$.

Il résulte de ces considérations que dans le cas où $\boldsymbol{t}^-(M^i) = -\boldsymbol{t}^+(M^i)$, la longueur de l'arc $\langle M_n^{i-}*M_n^{i+}\rangle$ peut tendre vers une valeur quelconque lorsque $M_n^{i-} \to M^i$ et $M_n^{i+} \to M^i$. Il est, en effet, possible de construire un „soufflet" convenable, les angles aux sommets de ce „soufflet" étant arbitrairement petits.)

Exemple 1. Soit $\langle A*B\rangle$ le segment de droite $\langle 0, 1\rangle$ de l'axe x dans le plan (x, y).

$\langle A_0*B_0\rangle$ est la ligne brisée $\langle M_1^0, M_2^0, M_3^0\rangle$, $M_1^0(0, 0)$, $M_3^0(1, 0)$, $[M_1^0M_2^0] = [M_2^0M_3^0] = 1$. $\langle A_1*B_1\rangle$ est la ligne brisée $\langle M_1^1, M_2^1, \ldots, M_5^1\rangle$, $M_1^1(0, 0)$, $M_3^1(1/2, 0)$, $M_5^1(1, 0)$; $[M_1^1M_2^1] = [M_2^1M_3^1] = \ldots = [M_4^1M_5^1] = {}^1/_2$. $\langle A_n*B_n\rangle$ est la ligne brisée $M_{2k+1}^n(k/2^n, 0)$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n$,

$$[M_1^nM_2^n] = [M_2^nM_3^n] = \ldots = [M_{2^n}^nM_{2^n+1}^n] = 1/2^n$$

et les ordonnées des points M_{2k}^n, $k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, sont positives. Il est clair que $\langle A_n*B_n\rangle \to \langle A*B\rangle$, mais $[A_n*B_n] = 2[A*B]$. On voit donc que la condition des lemmes 2 et 2', qui exige que la limite des paratingents des courbes $\langle A_n*B_n\rangle$ soit contenue dans le paratingent de la courbe $\langle A*B\rangle$, est nécessaire. Dans cet exemple $\boldsymbol{t}^+(M_{2k+1}^n)$ ne tend pas vers le vecteur paratingent de la courbe $\langle A*B\rangle$.

La circonstance qu'il ne suffit pas de supposer que les droites tangentes à droite tendent vers les droites paratingents et qu'il est nécessaire de supposer la convergence des vecteurs correspondants, résulte de la démonstration (donnée entre parenthèses) que $[M_n^{i-} * M_n^{i+}] \to 0$.

Plan osculateur

Nous appellerons plan osculateur au point M d'un segment de droite, situé sur une surface convexe lisse S, le plan qui contient ce segment et qui est perpendiculaire au plan tangent à la surface S au point M.

Théorème 1. *Une géodésique $\langle A*B\rangle$ sur une surface convexe lisse S admet en tout point $M \in \langle A*B\rangle$ un plan osculateur au sens de Menger continu orienté, perpendiculaire au plan tangent à la surface S au point M.*

Démonstration. Admettons, sans nuire à la généralité, que S soit une surface fermée.

Il résulte de la définition de la géodésique que tout point $M_0 \in \langle A*B\rangle$ a un voisinage $U(M_0) \subset \langle A*B\rangle$ tel que tout arc fermé de la géodésique $\langle A*B\rangle$, contenu dans $U(M_0)$, est le plus court chemin joignant ses extrémités. Soit $\langle A*B\rangle$ un tel arc.

Considérons les points $X_n, Y_n, Z_n \in \langle A*B\rangle$, qui tendent vers M_0 lorsque $n \to \infty$. Le plan passant par les points X_n, Y_n, Z_n sera désigné par σ_n. Admettons que $\sigma_n \to \sigma_0$. Désignons par $\tau(M_0)$ le plan tangent à la surface S au point M_0.

Supposons que $\sphericalangle[\sigma_0, \tau(M_0)] = \alpha_0 < \pi/2$, où $\sphericalangle[\sigma_0, \tau(M_0)]$ est l'angle contenant les points intérieurs du solide V limité par la surface S.

A l'extérieur du solide V menons par les points $M \in \langle A*B\rangle$ des demi-droites $l^+(M)$ perpendiculaires à la droite $t(M_0)(t(M_0)$ est tangente à la courbe $\langle A*B\rangle$ au point $M_0)$ et faisant avec le demi-plan $\sigma_0^- \subset \sigma_0$, d'arête $t(M_0)$ et contenant les points intérieurs du solide V, l'angle $\alpha_0 + \varepsilon < < \pi/2$, $\varepsilon > 0$, $\sphericalangle[l^+(M), \sigma_0] = \alpha_0 + \varepsilon < \pi/2$.

Les plans tangents à la surface S étant continus, il existe un voisinage du point M_0 sur $\langle A*B\rangle$ dans lequel de telles demi-droites existeront. Soit $\langle A*B\rangle$ un arc contenu dans ce voisinage. Si l'on complète les demi-droites $l^+(M)$ par les droites $l(M)$, celles-ci engendreront une surface cylindrique W.

Pour ε assez petits, la surface W sera convexe et sa convexité sera dirigée vers l'extérieur du solide V, c'est-à-dire les sections des surfaces S et W par un plan passant par $t(M_0)$ et perpendiculaire à la droite $l(M_0)$ sont situées du même côté de la droite $t(M_0)$ dans un voisinage du point M_0. En effet, si la surface W était concave, par exemple sur l'arc $\langle K*L\rangle \subset \subset \langle A*B\rangle$, on pourrait rendre W convexe, en la déformant vers l'extérieur du solide V, les points K et L restant fixes. Mais, alors, la surface cylindrique W' ainsi obtenue coupera la surface S en dehors de l'arc $(K*L)$ et l'arc $(K*L)$ lui-même se trouverait, avec un voisinage sur la surface W', à l'extérieur du solide V, en contradiction avec le théorème de Busemann-Feller [8]: un arc joignant K et L à l'extérieur de V a une longueur au moins égale à celle de l'arc du plus court chemin joignant les points K et L sur une surface convexe S. Or, dans le cas considéré, on peut joindre les points K et L sur la surface W' par un arc plus court que $[K*L]$ et extérieur à V, puisque l'arc $\langle K*L\rangle$ sur la surface cylindrique W' est convexe et n'est pas le plus court chemin sur W' pour ε suffisamment petit. Soit $\langle A*B\rangle$ un arc contenu dans un tel voisinage.

Considérons maintenant les plans σ_n. Comme $\sigma_n \to \sigma_0$, pour $n > n_0$ on aura $\sphericalangle(\sigma_n, \sigma_0) < \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 < \pi/2 - a_0 - \varepsilon$ et $\sphericalangle[\sigma_n, l^+(M)] \leqslant \sphericalangle(\sigma_n, \sigma_0) + \sphericalangle(\sigma_0, l^+(M)) < \varepsilon_1 + a_0 + \varepsilon = \pi/2 - \varepsilon' < \pi/2$.

Comme le plan σ_0 fait avec la demi-droite $l^+(M)$ l'angle $a_0 + \varepsilon < \pi/2$, et la surface W est convexe dans le voisinage du point M_0, la courbe Γ_0, intersection du plan σ_0 et de la surface W, est convexe sur la surface W (c'est-à-dire après le développement de W sur le plan) et sa convexité est dirigée vers l'intérieur du solide V (c'est-à-dire, W étant développée sur le plan, les courbes Γ_0 et $\langle A*B\rangle$ sont situées de part et d'autre de leur tangente commune au point M_0) dans un voisinage du point M_0. Cela résulte du fait que si l'on prend sur la demi-droite $l^+(M_0)$ un point P_0, le plan π_0 passant par le point P_0 et perpendiculaire à la droite $l(M_0)$ coupe la courbe Γ_0 aux points E_0 et F_0 et le point M_0 sépare les points E_0 et F_0 sur Γ_0 (si $M_0 = A$, la surface W peut être convenablement prolongée), lorsque le point P_0 est assez proche de M_0. Désignons par N_0 le vecteur normal du plan σ_0. Les surfaces W, σ_0 et π_0 limiteront une surface R_0, appelée „bonnet", dont la base est contenue dans le plan σ_0 (comme le vecteur normal $N(M)$ de la surface W, $M \epsilon W$, est continu au point M_0, il existe un voisinage du point M_0 sur la surface W tel que $\sphericalangle[N(M), N_0] \leqslant \sphericalangle[N(M), N(M_0)] + \sphericalangle[N(M_0), N_0] = \sphericalangle[N(M), N(M_0)] + \sphericalangle[l^+(M), \sigma_0] < \varepsilon_2 + a_0 + \varepsilon < \pi/2$ lorsque le point P_0 est assez proche de M_0, $M \epsilon \langle E_0 * F_0\rangle$). Par conséquent, en vertu d'un théorème d'Alexandrov ([1], p. 297) la courbe Γ_0 est convexe sur la surface W, sa convexité étant dirigée dans le sens de $l^+(M_0)$.

Soit Γ_n la courbe intersection du plan σ_n et de la surface W. Sur la demi-droite $l^+(M_0)$ prenons un point P_n et menons le plan π_n passant par le point P_n et perpendiculaire à la droite $l(M_0)$. Le plan π_n coupera la courbe Γ_n aux points E_n et F_n, Comme $\pi_n \to \pi_0$ lorsque $P_n \to P_0$ et $\sigma_n \to \sigma_0$, on a $\Gamma_n \to \Gamma_0$, $E_n \to E_0$, $F_n \to F_0$.

Les surfaces σ_n, π_n et W limiteront une surface R_n. Lorsque $\sigma_n \to \sigma_0$ et $\pi_n \to \pi_0$, il vient $R_n \to R_0$. Comme pour les points M situés sur la partie de la surface W qui appartient à la surface R_0 on a $\sphericalangle[N(M), N_0] \leqslant$

$\leqslant \varepsilon_2 + a_0 + \varepsilon < \pi/2$, une inégalité analogue aura lieu, si $n > n_1$, pour la surface R_n, donc les surfaces R_n seront des „bonnets". Par suite, les arcs $\langle E_n * F_n \rangle \subset \Gamma_n$ seront convexes sur la surface W, leur convexité étant dirigée vers l'intérieur du solide V.

Considérons maintenant les points X_n, Y_n, Z_n. Ils appartiennent au plan σ_n et à la surface W, donc aussi à la courbe Γ_n. Comme les points X_n, Y_n, Z_n tendent vers le point M_0, ils appartiennent pour $n > n_2$ aux arcs $\langle E_n * F_n \rangle$, puisque $E_n \to E_0 \neq M_0$ et $F_n \to F_0 \neq M_0$. Mais les points X_n, Y_n, Z_n appartiennent au plus court chemin $\langle A * B \rangle$. En vertu du théorème de Liberman ([1], p. 138), l'arc $\langle A * B \rangle$ est convexe sur la surface cylindrique W et sa convexité est dirigée vers l'extérieur du solide V, contrairement aux arcs $\langle E_n * F_n \rangle$. Par conséquent, les arcs convexes dans le plan (après développement de la surface W) $\langle A * B \rangle$ et $\langle E_n * F_n \rangle$ auraient en commun trois points et leurs convexités seraient opposées, ce qui est impossible, si l'arc de géodésique $\langle A * B \rangle$ joignant les points X_n, Y_n, Z_n n'est pas un segment de droite.

Dans le cas où les points X_n, Y_n, Z_n ne sont pas en ligne droite, nous arrivons ainsi à une contradiction avec l'hypothèse que l'angle entre les plans σ_0 et $\tau(M_0)$ n'est pas droit, la géodésique admet donc un plan osculateur au sens de Menger, perpendiculaire au plan tangent à la surface. Dans le cas où les points X_n, Y_n, Z_n sont en ligne droite, les plans sont indéterminés, mais, si l'on prend pour σ_n le plan perpendiculaire au plan tangent à la surface au point X_n, leur continuité entraîne la convergence des plans σ_n vers le plan σ_0 perpendiculaire au plan tangent à la surface.

L'existence du plan osculateur orienté résulte immédiatement de la convexité de la surface. En effet, si $X_n \in \langle A * Y_n \rangle$, $Z_n \in \langle Y_n * B \rangle$, $Y_n \in \langle X_n * Z_n \rangle$, et si N_n est le vecteur normal de la courbe qui est l'intersection du plan σ_n avec la surface S au point Y_n, dirigé vers l'extérieur de V, alors $\sphericalangle(\overline{X_n Y_n}, N_n) \leqslant \sphericalangle(\overline{Y_n Z_n}, N_n)$, ce qui suffit pour l'existence du plan osculateur orienté.

L'existence d'un plan osculateur de Menger entraîne sa continuité.

La démonstration du théorème est ainsi achevée.

Remarque 4. La démonstration du théorème 1 peut être appliquée à celle des théorèmes suivants:

Théorème 1'. *Si M_0 est un point lisse d'une surface convexe S et $\langle A * B \rangle$ une géodésique passant par le point M_0, la géodésique $\langle A * B \rangle$ admet au point M_0 un plan osculateur au sens de Menger, orienté et perpendiculaire au plan tangent à la surface au point M_0.*

Théorème 1". *Soit M_0 un point d'arête de la surface convexe S et l_0 l'arête de la surface S au point M_0.*

Si la géodésique $\langle M_0 * B\rangle$ fait au point M_0 un angle non nul avec la droite l_0, elle admet au point M_0 un plan osculateur au sens de Menger, orienté et perpendiculaire au plan τ_0, $\tau_0 = \lim\limits_{M \to M_0,\, M \in \langle M_0 * B\rangle} \tau(M)$, où $\tau(M)$ est le plan appuyant S au point M.

Théorème 2. *L'indicatrice sphérique d'une géodésique $\langle A*B\rangle$ sur une surface convexe lisse est une courbe $\langle\langle A*B\rangle\rangle$ admettant une tangente au sens strict.*

Démonstration. Soit $\boldsymbol{t}(M)$ le vecteur tangent unité de la géodésique $\langle A*B\rangle$ au point M. Le vecteur $\boldsymbol{t}(M)$ est le rayon-vecteur de la courbe $\langle\langle A*B\rangle\rangle$($\langle\langle A*B\rangle\rangle$ est une courbe, ce qui résulte immédiatement du fait que $\boldsymbol{t}(M)$ est un vecteur continu du point M). Il s'agit de prouver que les grands cercles de la sphère-unité qui passent par les extrémités des vecteurs $\boldsymbol{t}(M')$ et $\boldsymbol{t}(M'')$ tendent vers une limite lorsque $\boldsymbol{t}(M')$ et $\boldsymbol{t}(M'')$ tendent vers le vecteur $\boldsymbol{t}(M)$.

Ce problème équivaut à démontrer que les plans orientés $\{\boldsymbol{t}(M'), \boldsymbol{t}(M'')\}$ (c'est-à-dire munis des vecteurs normaux $\boldsymbol{t}(M')\times\boldsymbol{t}(M'')/|\boldsymbol{t}(M')\times \times\boldsymbol{t}(M'')|$) passant par le point M' et parallèles aux vecteurs $\boldsymbol{t}(M')$ et $\boldsymbol{t}(M'')$ tendent vers une limite lorsque $M', M'' \to M$, $[A*M'] < [A*M'']$.

Soient M_n et M'_n, $[A*M_n] < [A*N'_n]$, des suites de points sur la géodésique $\langle A*B\rangle$ qui tendent vers le point M. De l'existence d'un plan osculateur orienté (théorème 1) résulte que l'on a $\sphericalangle[\boldsymbol{t}(M_n)\times \overline{M_nM'_n}, \overline{M_nM'_n}\times\boldsymbol{t}(M'_n)] \to 0$.

Considérons maintenant le triangle sphérique dont les sommets sont les extrémités des vecteurs $\boldsymbol{t}(M_n)$, $\overline{M_nM'_n}/|\overline{M_nM'_n}|$, $\boldsymbol{t}(M'_n)$; il est immédiat que l'angle dont le sommet est l'extrémité du vecteur $\overline{M_nM'_n}/|\overline{M_nM'_n}|$ tend vers π et, par conséquent, le plan orienté $\{\boldsymbol{t}(M_n), \boldsymbol{t}(M'_n)\}$ tend vers la même limite que le plan orienté $\{\boldsymbol{t}(M_n), \overline{M_nM'_n}\}$. Comme le plan orienté $\{\boldsymbol{t}(M_n), \overline{M_nM'_n}\}$ tend, en vertu du théorème 1, vers le plan osculateur orienté de la géodésique $\langle A*B\rangle$ au point M, les plans orientés $\{\boldsymbol{t}(M_n), \boldsymbol{t}(M'_n)\}$ tendront vers la même limite.

Nous avons donc démontré que l'indicatrice sphérique $\langle\langle A*B\rangle\rangle$ de la géodésique $\langle A*B\rangle$ admet une tangente au sens strict. Il s'ensuit que la tangente ordinaire de la courbe $\langle\langle A*B\rangle\rangle$ est continue. Cela prouve encore une fois que la courbe $\langle\langle A*B\rangle\rangle$ est rectifiable.

Il résulte de cette démonstration que les grands cercles tangents à la courbe $\langle\langle A*B\rangle\rangle$ sur la sphère-unité sont les images sphériques des plans osculateurs de la courbe $\langle A*B\rangle$ et les grands cercles perpendiculaires aux précédents sont les images sphériques des plans tangents à la surface S le long de la géodésique (par image sphérique d'un plan on comprend ici le cercle obtenu par l'intersection de la surface de la sphère-unité avec le plan parallèle mené par le centre de la sphère).

En s'appuyant sur les théorèmes 1' et 1'' et en répétant sans modifications les raisonnements faits pour établir le théorème 2, on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème 2'. *Si la géodésique $\langle A*B\rangle$, passant par les points d'arête de la surface, fait avec l'arête correspondante un angle non nul, et si les points A et B ne sont pas sommets de la surface convexe S, l'indicatrice sphérique $\langle\langle A*B\rangle\rangle$ admet en tout point, correspondant à un point d'arête, une tangente à droite et à gauche au sens strict; en tout point correspondant à un point lisse, elle admet une tangente au sens strict. Autrement dit, la courbe $\langle\langle A*B\rangle\rangle$ est de classe $\mathscr{K}$.*

On peut aussi démontrer la proposition suivante:

Théorème 2''. *Si la courbe $\langle A*B\rangle$ admet un vecteur tangent continu et un plan osculateur orienté, son indicatrice sphérique a une tangente au sens strict, donc elle est une courbe rectifiable.*

Ou encore, le théorème plus général:

Théorème 2'''. *Si la courbe $\langle A*B\rangle$ admet au point A une tangente t_0 au sens strict et un plan osculateur orienté, il existe un voisinage $U(A)\subset \subset\langle A*B\rangle$ du point A tel que l'indicatrice sphérique de l'arc $U(A)$ soit une courbe rectifiable.*

Démonstration. Dans le travail [3] (p. 101) se trouve le théorème suivant:

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu C de E_n possède en un de ses points c_0 une tangente au sens strict D_0 est qu'un voisinage de c_0 sur C soit un arc rectifiable A admettant, après fixation d'un sens de parcours, D_0 comme tangente ordinaire en c_0 et que, en nous bornant à ne considérer que les points c de A où existe une tangente ordinaire, nous ayons $\lim_{c\to c_0}$ (tang. orientée en c) $=$ tang. orientée en c_0.

Il résulte de ce théorème que la courbe $\langle A*B\rangle$ est rectifiable dans un voisinage du point A.

Considérons maintenant deux vecteurs paratingents $\boldsymbol{p}(M_n')$ et $\boldsymbol{p}(M_n)$ de la courbe $\langle A*B\rangle$, $M_n, M_n'\in\langle A*B\rangle$, $M_n\to A$, $M_n'\to A$, $\langle A*M_n\rangle\subset \subset\langle A*M_n'\rangle$. De l'hypothèse résulte que $\boldsymbol{p}(M_n)\to t_0$ et $\boldsymbol{p}(M_n')\to t_0$. Les plans orientés $\{\boldsymbol{p}(M_n), \overline{M_nM_n'}\}$ et $\{\overline{M_nM_n'}, \boldsymbol{p}(M_n')\}$ tendent vers le plan osculateur orienté $\sigma(A)$ au point A. En répétant la démonstration du théorème 2 on constate que $\{p(M_n), p(M_n')\}\to\sigma(A)$, l'indicatrice sphérique $\langle\langle A*B\rangle\rangle$ de la courbe $\langle A*B\rangle$ admet donc au point correspondant au vecteur t_0 une tangente au sens strict. Il n'y a plus qu'à profiter du fait que le paratingent d'un arc simple de Jordan est un continu ([4], p. 164) et du théorème cité plus haut, pour obtenir la conclusion de notre théorème.

Exemple 2. Considérons au voisinage du point $x=0$ la courbe $y=x^3\sin x^{-1}$; nous aurons $y(0)=0$, $y'=3x^2\sin x^{-1}-x\cos x^{-1}$, $y''=$ $=6x\sin x^{-1}-4\cos\ x^{-1}-x^{-1}\sin x^{-1}$,

$$k(x)=\int\limits_0^x\frac{|y''|}{\sqrt{1+y'^2}}dx\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^x\frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\left|6x\sin\frac{1}{x}-4\cos\frac{1}{x}\right|dx\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^x\frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|dx-5x=\infty.$$

On voit que cette courbe a une courbure intégrale infinie, bien qu'elle ait une tangente au sens strict et un plan osculateur continu. Pourtant, il n'existe pas de plan osculateur orienté pour $x=0$, car son vecteur normal admet au voisinage de $x=0$ une infinité de fois les valeurs $\boldsymbol{k}$ et $-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}$ désignant le vecteur-unité de l'axe Oz.

Courbure intégrale

Théorème 3. *Si la suite de surfaces convexes lisses S_n tend vers une surface convexe lisse S et la suite de géodésiques $\langle A_n{*}B_n\rangle\subset S_n$ tend vers la géodésique $\langle A{*}B\rangle\subset S$, alors $k(\langle A_n{*}B_n\rangle)\to k(\langle A{*}B\rangle)$.*

Si les courbes $\langle A_n{*}B_n\rangle$ et $\langle A{*}B\rangle$ sont rapportées au même paramètre x, $x_0\leqslant x\leqslant x_1$, de sorte que $M_n(x)\in\langle A_n{*}B_n\rangle$, $M(x)\in\langle A{*}B\rangle$, $M_n(x)\to$ $\to M(x)$, lorsque $\langle A_n{*}B_n\rangle\to\langle A{*}B\rangle$, alors $k_n(x)=k\big(\langle A_n{*}M_n(x)\rangle\big)$ tend uniformément vers $k(x)=k\big(\langle A{*}M(x)\rangle\big)$.

Démonstration. Les plans tangents de la surface S_n le long de la géodésique $\langle A_n{*}B_n\rangle$ tendent vers les plans tangents de la surface S le long de la géodésique $\langle A{*}B\rangle$ et les tangentes à $\langle A_n{*}B_n\rangle$ tendent vers les tangentes de la géodésique $\langle A{*}B\rangle$ (en vertu du théorème de Liberman ([1], p. 144); il en résulte que les plans osculateurs de la géodésique $\langle A_n{*}B_n\rangle$ tendent vers les plans osculateurs de la géodésique $\langle A{*}B\rangle$. D'où $\langle\langle A_n{*}B_n\rangle\rangle\to$ $\langle\langle A{*}B\rangle\rangle$ et les tangentes de la courbe $\langle\langle A_n{*}B_n\rangle\rangle$ tendent vers les tangentes de la courbe $\langle\langle A{*}B\rangle\rangle$. En vertu du lemme 1 on a donc $[\langle\langle A_n{*}B_n\rangle\rangle]\to$ $\to[\langle\langle A{*}B\rangle\rangle]$.

Nous allons maintenant prouver que les $k_n(x)=k(\langle A_n{*}M_n\rangle)$ tendent uniformément vers $k(x)=k(\langle A{*}M\rangle)$.

Supposons le contraire, c'est-à-dire admettons qu'il existe une suite $x_{k_1},x_{k_2},\ldots,x_{k_n},\ldots;$ $M_{k_n}(x_{k_n})\in\langle A_{k_n}{*}B_{k_n}\rangle$ telle que $|k_{k_n}(x_{k_n})-k(x_{k_n})|\geqslant\varepsilon$, où k_n est une suite partielle de la suite $1,2,\ldots$ De la suite x_{k_n} on peut extraire une suite partielle convergente $x_{n_i}\to x'\in\langle x_0,x_1\rangle$. Nous partagerons la suite x_{n_i} en deux suites partielles suivant que $x_{n_i}<x'$, ou que $x_{n_i}>x'$. Soit x_{p_i} la suite partielle telle que $x_{p_i}<x'$.

On a évidemment

(17) $$|k_{p_i}(x_{p_i}) - k(x_{p_i})| \geqslant \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

$k(x)$ étant une fonction continue, il existe pour tout $\varepsilon_1 > 0$ un indice p_0 tel que pour $p_i > p_0$

(18) $$|k(x_{p_i}) - k(x')| < \varepsilon_1$$

et, comme $k_{p_i}(x') \to k(x')$, il existe pour $\varepsilon_2 > 0$ un indice $\bar{p}_0$ tel que pour $p_i > \bar{p}_0$

(19) $$|k_{p_i}(x') - k(x')| < \varepsilon_2$$

Les inégalités (17), (18) et (19) donnent

$$\varepsilon \leqslant |k_{p_i}(x_{p_i}) - k(x_{p_i})| \leqslant |k_{p_i}(x_{p_i}) - k_{p_i}(x')| + |k_{p_i}(x') - k(x_{p_i})|$$
$$\leqslant |k_{p_i}(x_{p_i}) - k_{p_i}(x')| + |k_{p_i}(x') - k(x')| + |k(x') - k(x_{p_i})|$$
$$\leqslant |k_{p_i}(x_{p_i}) - k_{p_i}(x')| + \varepsilon_2 + \varepsilon_1$$

pour $p_i > p' = \max(p_0, \bar{p}_0)$.

Soit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/3$, alors on tire de ce qui précède, pour $p_i > p'$,

(20) $$k_{p_i}(x') \geqslant k_{p_i}(x_{p_i}) + \varepsilon/3.$$

Prenons un nombre arbitraire $\delta > 0$, alors, comme $x_{p_i} \to x'$, il existe un indice p'' tel que pour $p_i > p''$ on a $x' - \delta < x_{p_i} < x'$. D'où $k_{p_i}(x' - \delta) \leqslant k_{p_i}(x_{p_i})$ et, pour $p_i > p = \max(p', p'')$, on déduit de (20)

$$k_{p_i}(x' - \delta) \leqslant k_{p_i}(x_{p_i}) \leqslant k_{p_i}(x') - \varepsilon/3.$$

En passant à la limite $k(x' - \delta) \leqslant k(x') - \varepsilon/3$ et, comme δ est un nombre arbitrairement petit et $k(x)$ une fonction continue, on aura pour $\delta \to 0$, $k(x') \leqslant k(x') - \varepsilon/3$ en contradiction avec l'hypothèse $\varepsilon > 0$, ce qui établit le théorème.

D'une façon analogue, en profitant du lemme 2, on obtient:

Théorème 3'. *Le théorème 3 reste vrai si l'on suppose que S_n sont des surfaces polyédrales convexes.*

Ou encore:

Théorème 4. *Si $\langle A{*}B\rangle$ est une géodésique sur une surface convexe lisse et si $W_n: \langle M_0 = A, M_1, \ldots, M_n = B\rangle$ est une ligne brisée inscrite dans $\langle A{*}B\rangle$ et $[A{*}M_i] < [A{*}M_{i+1}]$,* alors *$k(W_n) \to k(\langle A{*}B\rangle)$ lorsque $W_n \to \langle A{*}B\rangle$.*

Si l'on rapporte les courbes W_n et $\langle A{*}B\rangle$ au même paramètre $x \in \langle x_0, x_1\rangle$, de sorte que $M_n(x) \in \langle A_n{*}B_n\rangle$, $M(x) \in \langle A{*}B\rangle$, $M_n(x_0) = M(x_0) = A$, $M_n(x_1) = M(x_1) = B$ et $M_n(x) \to M(x)$ lorsque $W_n \to \langle A{*}B\rangle$, alors $k(\langle A{*}M_n(x)\rangle) = k_n(x)$, où $\langle A{*}M_n(x)\rangle \subset W_n$, tend uniformément vers $k(x) = k(\langle A{*}M(x)\rangle)$, où $\langle A{*}M(x)\rangle \subset \langle A{*}B\rangle$.

Aux théorèmes ci-dessus on peut donner un énoncé encore plus général.

Théorème 5. *Soient $\langle A^*B\rangle$ et $\langle A_n{}^*B\rangle$ des courbes de la classe $\mathscr{K}$, admettant en tout point deux plans osculateurs orientés à gauche et à droite (au sens de Menger), ces plans ne faisant en aucun point de la courbe $\langle A^*B\rangle$ un angle égal à π. Si*

$$\langle A_n{}^*B_n\rangle \to \langle A^*B\rangle, \qquad \lim_{M_n\to M} \boldsymbol{P}(M_n) \to \boldsymbol{P}(M) \quad et \quad \lim_{M_n\to M} \pi(M_n)\subset \pi(M),$$

où $\boldsymbol{P}(M_n)$ et $\pi(M_n)$ sont les paratingents de vecteurs et de plans osculateurs orientés de la courbe $\langle A_n{}^*B_n\rangle$ au point M_n, et si $\boldsymbol{P}(M)$ et $\pi(M)$ sont les paratingents correspondants de la courbe $\langle A^*B\rangle$ au point M, alors $k(\langle A_n{}^*B_n\rangle)\to k(\langle A^*B\rangle)$.

Démonstration. Il résulte de l'hypothèse que la courbe $\langle\langle A^*B\rangle\rangle$ n'a pas de points de rebroussement (sinon, l'angle formé par les plans osculateurs orientés à gauche et à droite de la courbe $\langle A^*B\rangle$ au point correspondant serait égal à π) et qu'elle admet des demi-tangentes au sens strict, elle est donc une courbe de la classe $\mathscr{K}$. On a $\langle\langle A_n{}^*B_n\rangle\rangle\in\mathscr{K}$ pour $n>n_0$ et $\langle\langle A_n{}^*B_n\rangle\rangle\to\langle\langle A^*B\rangle\rangle$. La limite du paratingent de vecteurs de la courbe $\langle\langle A_n{}^*B_n\rangle\rangle$ est contenue dans le paratingent de vecteurs de la courbe $\langle\langle A^*B\rangle\rangle$. Pour obtenir la conclusion il n'y a plus qu'à appliquer le lemme 2'.

Exemple 3. Soit $\langle A^*B\rangle$ le segment $\langle 0,1\rangle$ de l'axe des x du plan (x,y). La ligne brisée $\langle A_n{}^*B_n\rangle$ sera construite de la manière suivante: divisons le segment $\langle 0,1\rangle$ par les points $M_0, M_1, \ldots, M_{2^n}$ d'abscisses $0, 1/2^n, 2/2^n, \ldots, 2^n/2^n = 1$. Sur les segments $\overline{M_iM_{i+1}}$ construisons les triangles $M_iN_iM_{i+1}$, les ordonnées des points N_i étant positives, $\sphericalangle(\overline{M_iN_i}, \overline{N_iM_{i+1}}) = 1/2^n$, $[M_iN_i]=[N_iM_{i+1}]$. D'où on a $\sphericalangle(\overline{N_{i-1}M_i}, \overline{M_iN_i}) = 2/2^n$. Comme le nombre des points N_i est 2^n et celui des points M^i, qui sont les sommets de la ligne brisée $\langle A_n{}^*B_n\rangle$ est 2^n-1, on a $k(\langle A_n{}^*B_n\rangle) = 2^n/2^n+2(2^n-1)/2^n\to 3$, tandis que $k(\langle A^*B\rangle)=0$.

On obtient un exemple analogue si l'on prend pour $\langle A^*B\rangle$ un arc de cercle et si les courbes $\langle A_n{}^*B_n\rangle$ sont des courbes ayant une tangente au sens strict.

Dans cet exemple toutes les hypothèses du théorème 5 sont vérifiées, sauf $\lim \pi(M_n)\subset\pi(M)$, par contre, on a $\pi(M_n)\to\pi(M)$.

L'exemple montre que la condition $\pi(M_n)\to\pi(M)$ n'est pas suffisante pour que le théorème 5 ait lieu, car elle n'assure pas la vérification de l'hypothèse du lemme 2, qui exige que la limite du paratingent de vecteurs de la courbe $\langle\langle A_n{}^*B_n\rangle\rangle$ soit contenue dans le paratingent de vecteurs de la courbe $\langle\langle A^*B\rangle\rangle$.

Exemple 4. Soit $\langle A^*B'\rangle$ un demi-cercle et $t(C)$ la tangente au point C, $[A^*C]=[C^*B']$, de la courbe $[A^*B']$. Soit $\langle A'^*B\rangle$ le demi-cercle symétrique de $\langle A^*B'\rangle$ par rapport à la droite $t(C)$. La courbe plane $\langle A^*B\rangle$ ainsi obtenue est composée de deux arcs de cercle $\langle A^*C\rangle$ et $\langle C^*B\rangle$.

Nous construirons les courbes $\langle A_n{}^*B_n\rangle$ comme il suit: faisons subir à l'arc $\langle C^*B\rangle$ de la courbe $\langle A^*B\rangle$ une translation parallèle à la droite $t(C)$ de sorte que le point C se déplacera sur la droite $t(C)$ vers un point D, $[CD]=1/n$. On obtient ainsi la courbe $\langle A^*CD^*B\rangle$. Au segment $\langle CD\rangle$ substituons maintenant une courbe similaire à la courbe $\langle A_n{}^*B_n\rangle$ de l'exemple 4 (c'est-à-dire, les angles seront les mêmes et toutes les longueurs seront réduites dans le rapport $1:n$). La courbe ainsi contruite sera désignée par $\langle A_n{}^*B_n\rangle$. Evidemment $\langle A_n{}^*B_n\rangle\to\langle A^*B\rangle$, $\boldsymbol{P}(M_n)\to\boldsymbol{P}(M)$, $\lim\pi(M_n)\subset\pi(M)$ lorsque $M_n\to M$, $M_n\in\langle A_n{}^*B_n\rangle$, $M\in\langle A^*B\rangle$, et pourtant $\lim k(\langle A_n{}^*B_n\rangle)\neq k(\langle A^*B\rangle)$.

L'hypothèse que l'angle entre les plans osculateurs orientés à gauche et à droite au point donné de la courbe n'est pas égal à π est, comme le prouve l'exemple ci-dessus, indispensable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Александров, А. Д., *Внутренная геометрия выпуклых поверхностей* (en russe), Moskva-Leningrad 1948.

[2] Погорелов, А. В., *Изгибание выпуклых поверхностей* (en russe), Moskva-Leningrad 1951.

[3] Pauc, Ch., *Les méthodes directes en géométrie différentielle*, Paris 1941.

[4] Bouligand, G., *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Paris 1932.

[5] Riesz, F., et Sz. Nagy, B., *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest 1952.

[6] Radó, T., *Length and area*, New York 1948.

[7] Александров, А. Д., *Теория кривых на основе приближения ломаными*, Успехи Матем. Наук, **2**, 3 (1947), p. 182-184.

[8] Busemann, H., Feller, W., *Krümmungseigenschaften konvexer Flächen*, Acta Math., **66**, (1935), p. 1-47.

[9] Radziszewski, K., *Sur un théorème de Pogorielov*, Annales Univ. Mariae Curie-Skłodowska, **16** (1962), p. 41-51.

Streszczenie

W pracy tej podaję szereg twierdzeń dotyczących krzywizny integralnej pewnej klasy krzywych. Między innymi dowodzę istnienia płaszczyzny ściśle stycznej w sensie Mengera dla linii geodezyjnej na gładkiej wypukłej powierzchni i istnienia skończonej krzywizny integralnej dla pewnych klas krzywych oraz badam kiedy ze zbieżności krzywych wynika zbieżność ich krzywizn integralnych.

Резюме

В этой работе дается несколько теорем об интегральной кривизне одного класса кривых. Доказывается, среди других, существование соприкасающейся плоскости в смысле Менгера к геодезической на гладкой выпуклой поверхности, существование конечной интегральной кривизны для некоторого класса кривых и даются условия сходимости интегральных кривизн сходящей последовательности кривых.